UNIVERSITÉ DE CERGY-PONTOISE

U.F.R. Economie et Gestion **L2 - S3**

Licence d'Économie et Finance / Licence de Gestion

MATH 201 : PROBABILITÉS

TEST 1 - Octobre 2014 - 1h 30 min

Il sera tenu compte du soin apporté à la rédaction.
CALCULATRICES INTERDITES
LES PORTABLES DOIVENT ÊTRE DÉBRANCHÉS ET RANGÉS.

Questions diverses - 8 points

Les questions de cet exercice sont indépendantes les unes des autres.

1. • Définitions - 3 points

1.1 On considère l'expérience aléatoire $\mathcal{E}$. Donner la définition de son univers Ω.
Qu'est ce qu'un événement lié à l'expérience $\mathcal{E}$?

1.2 Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathrm{P})$ un espace probabilisé. Donner la définition de deux événements A et B **indépendants pour la probabilité** P.
Application On lance un dé non truqué : montrer que les événements A : « On obtient un nombre pair » et B : « on obtient un multiple de 3 » sont indépendants.

1.3 Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathrm{P})$ un espace probabilisé, B un événement de probabilité non nulle. Donner la définition de la **probabilité conditionnée par** B, notée P_B.

2. • 1 point Déterminer le nombre « d'anagrammes » du mot ANAGRAMME.

3. • 2,5 points Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathrm{P})$ un espace probabilisé. Les égalités suivantes étant admises :
1) $\mathrm{P}(\emptyset) = 0$
2) Si E et F sont deux événements incompatibles : $\mathrm{P}(E \cup F) = \mathrm{P}(E) + \mathrm{P}(F)$.
Démontrer que pour tous événements A et B, $\mathrm{P}(A \cap \overline{B}) = \mathrm{P}(A) - \mathrm{P}(A \cap B)$.

Application numérique : Soient A et B deux événements d'un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathrm{P})$ tels que $\mathrm{P}(A) = 0,3$; $\mathrm{P}(\overline{B}) = 0,4$ et $\mathrm{P}(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0,2$. Déterminer $\mathrm{P}(A \cap \overline{B})$.

4. • 1,5 point Donner la ligne des $\binom{4}{p}$ du triangle de Pascal
En déduire le développement de $(2x - 3y)^4$ en utilisant la formule du binôme de Newton.

Exercice 1 - 3 points

1. On lance une pièce de monnaie trois fois de suite. On note F_i l'événement « on obtient FACE au $i^{\text{ième}}$ lancer », pour $i \in \{1, 2, 3\}$. Décrire à l'aide des F_i et des connecteurs logiques les événements suivants :
   (a) $A =$ « On obtient au moins une fois FACE ».
   (b) $B =$ « On obtient au moins deux fois PILE ».
   (c) $C =$ « On obtient FACE exactement deux fois ».
   (d) $D =$ « On obtient PILE au cours d'au moins un des deux premiers lancers ».

2. On lance indéfiniment une pièce de monnaie « bien équilibrée ». On note F l'événement « on n'obtient que des FACES » et pour tout entier n non nul, Φ_n l'événement « on obtient FACE à chacun des n premiers lancers ». Exprimer l'événement F à l'aide des événements $\Phi_n, n \in \mathbb{N}^*$ et de connecteurs logiques.

   Que peut-on dire de la suite (Φ_n) ?

Exercice 2 - 9 points

Lors d'une fête des écoles, on décide d'organiser une loterie. La participation est fixée à m € par partie.

Une urne contient 5 boules : 2 blanches et 3 noires. Le joueur tire 2 boules simultanément de l'urne.

• Si le joueur tire deux boules de couleurs différentes, il a perdu.
• Si le joueur tire deux boules noires, il est remboursé de sa participation m €.
• Si le joueur tire deux boules blanches, il a le droit de tourner « la roue de la fortune » décomposée en 5 secteurs identiques :

- Deux secteurs affichent un gain de 20 €
- Les trois autres secteurs affichent un gain égal à la participation m €

Tous les résultats seront donnés sous forme de fractions rationnelles irréductibles.

1. On note B l'événement « le joueur a tiré deux boules blanches » et N l'événement « le joueur a tiré deux boules noires », enfin on note M l'événement « le joueur est remboursé de sa mise »

   (a) Quel est l'univers Ω associé à cette expérience ? En donner le cardinal.

   (b) Calculer les probabilités $\mathrm{P}(B)$ et $\mathrm{P}(N)$.

   (c) Déterminer $\mathrm{P}_B(M)$ puis $\mathrm{P}(B \cap M)$. En déduire $\mathrm{P}(M)$.

   (d) Déterminer la probabilité de gagner 20 €

2. On note X la variable aléatoire égale au gain algébrique (c-a-d. gain - mise de départ) du joueur.

   Recopier sur votre copie et compléter le tableau de la loi de probabilité de X.

x_i	$-m$	0	$20 - m$
p_i			

   Quel est le gain moyen du joueur par partie ?

3. Dans cette partie l'organisateur met 2 boules blanches dans l'urne et $n \geq 3$ boules noires. Déterminer, en fonction de n, la probabilité de l'événement A : « le joueur tire deux boules de couleurs différentes ».

   L'organisateur souhaite que la probabilité que le joueur récupère sa mise ou gagne de l'argent soit supérieure à $0,5$. Tout en gardant 2 boules blanches, quel nombre n minimal de boules noires doit-il mettre dans l'urne ? (on pourra prendre $\sqrt{17} \approx 4,1$ pour les calculs numériques)

UNIVERSITÉ DE CERGY-PONTOISE

U.F.R. Economie et Gestion **L2 - S3**

Licence d'Économie et Finance / Licence de Gestion

Corrigé du TEST 1 - Probabilités

Questions diverses - 3+1+2,5+1,5 = 8 points

1. • 3 points Définitions

1.1 • 1 point On appelle **univers** associé à une expérience aléatoire $\mathcal{E}$, l'ensemble (noté Ω) de tous les résultats possibles. **Un événement** lié à une expérience aléatoire $\mathcal{E}$ est un sous-ensemble de son univers Ω.

1.2 • 1,5 point Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathrm{P})$ un espace probabilisé. On dit que deux événements A et B sont **indépendants pour la probabilité** P si et seulement si $\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A) \times \mathrm{P}(B)$

Application : $\mathrm{P}(A) = \dfrac{1}{2}$ et $\mathrm{P}(B) = \dfrac{1}{3}$. De plus, $A \cap B = \{6\}$ donc $\mathrm{P}(A \cap B) = \dfrac{1}{6} = \mathrm{P}(A) \times \mathrm{P}(B)$

1.3 • 0,5 point Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathrm{P})$ un espace probabilisé, B un événement de probabilité non nulle. On appelle **probabilité conditionnée par** B**,** l'application notée P_B de $\mathcal{P}(\Omega)$ dans $\mathbb{R}^+$ définie par : $\forall A \in \mathcal{P}(\Omega), \mathrm{P}_B(A) = \dfrac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(B)}$

2. • 1 point ANAGRAMME : il y a $\dbinom{9}{3} = 84$ façons de placer les 3 A sur les 9 places, puis $\dbinom{6}{2} = 15$ façons de placer les 2 M sur les 6 places restantes, enfin, il y a $4! = 24$ façons de placer les 4 dernières lettres distinctes.

Donc ANAGRAMME possède $84 \times 15 \times 24 = 1260 \times 24 = 30240$ anagrammes

3. • 2,5 points

(1 point) On vérifie que les événements $A \cap B$ et $A \cap \overline{B}$ sont incompatibles afin d'utiliser les égalités données en hypothèse.

• On a $(A \cap B) \cap (A \cap \overline{B}) = A \cap (B \cap \overline{B}) = A \cap \emptyset = \emptyset$

• De plus $(A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) = A \cap (B \cup \overline{B}) = A \cap \Omega = A$

On utilise la propriété admise avec $E = A \cap B$ et $F = A \cap \overline{B}$: E et F sont incompatibles, d'où $\mathrm{P}(E \cup F) = \mathrm{P}(E) + \mathrm{P}(F)$ c-a-d. $\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(A \cap B) + \mathrm{P}(A \cap \overline{B})$

(1,5 point) *Application numérique :* $\mathrm{P}\ (B) = 1 - \mathrm{P}(\overline{B}) = 0,6$,

De plus, $\mathrm{P}(\overline{A} \cap \overline{B}) = \mathrm{P}(\overline{A \cup B})$, donc $\mathrm{P}(A \cup B) = 0,8$

Donc, $\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A \cup B) = 0,1$; et donc $\mathrm{P}(A \cap \overline{B}) = \mathrm{P}(A) - \mathrm{P}(A \cap B) = 0,2$.

4. • 1,5 point

p	0	1	2	3	4
$\dbinom{4}{p}$	1	4	6	4	1

$(2x-3y)^4 = \binom{4}{0}(2x)^0(-3y)^4 + \binom{4}{1}(2x)^1(-3y)^3 + \binom{4}{2}(2x)^2(-3y)^2 + \binom{4}{3}(2x)^3(-3y)^1 + \binom{4}{4}(2x)^4(-3y)^0 = 81y^4 + 4\times 2x \times (-27y^3) + 6\times 4x^2 \times 9y^2 + 4\times 8x^3 \times (-3y) + 16x^4 = 81y^4 - 216xy^3 + 216x^2y^2 - 96x^3y + 16x^4$

Exercice 1 - 3 points

1. • **4 x 0,5 = 2 points** On lance une pièce de monnaie trois fois de suite. On note F_i l'événement « on obtient FACE au $i^{\text{ième}}$ lancer », pour $i \in \{1,2,3\}$.
   (a) $A =$ « On obtient au moins une fois FACE » : $A = F_1 \cup F_2 \cup F_3$
   (b) $B =$ « On obtient au moins deux fois PILE » : $B = (\overline{F_1} \cap \overline{F_2}) \cup (\overline{F_1} \cap \overline{F_3}) \cup (\overline{F_2} \cap \overline{F_3})$
   (c) $C =$ « On obtient FACE exactement deux fois » :
   $C = (F_1 \cap F_2 \cap \overline{F_3}) \cup (\overline{F_1} \cap F_2 \cap F_3) \cup (F_1 \cap \overline{F_2} \cap F_3)$
   (d) $D =$ « On obtient PILE au cours d'au moins un des deux premiers lancers » :
   $D = \overline{F_1} \cup \overline{F_2}$
2. • **1 point** $F = \displaystyle\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \Phi_n$.
   La suite $(\Phi_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est clairement décroissante ($\Phi_{n+1} \subset \Phi_n$ car pour obtenir $n+1$ FACES aux $n+1$ premiers lancers, il faut déjà avoir obtenu n FACES au n premiers lancers)

Exercice 2 - 9 points

1. • **5 points**
   (a) • **1 point** L'univers est l'ensemble des combinaisons de 2 boules prises parmi 5, Card $\Omega = \binom{5}{2} = 10$
   (b) • **1 point** Il n'y a qu'un tirage permettant d'obtenir les 2 boules blanches : donc $\mathrm{P}(B) = \dfrac{1}{10} = 0,1$
   Il y a $\binom{3}{2} = 3$ façons de tirer 2 boules noires parmi les 3, $\mathrm{P}(N) = \dfrac{3}{10} = 0,3$.
   (c) • **2 points** D'après l'énoncé, $\mathrm{P}_B(M) = \dfrac{3}{5}$, et d'après la formule des probabilités conditionnelles, $\mathrm{P}(M \cap B) = \mathrm{P}(B) \times \mathrm{P}_B(M) = \dfrac{1}{10} \times \dfrac{3}{5} = \dfrac{3}{50}$.
   D'après la formule des probabilités totales, (il n'y a que deux manières d'être remboursé de sa mise) $\mathrm{P}(M) = \mathrm{P}(M \cap B) + \mathrm{P}(M \cap N) = \dfrac{3}{50} + \dfrac{3}{10} = \dfrac{18}{50} = \dfrac{9}{25} = 0,36$
   (d) • **1 point** Pour gagner 20€ il faut tirer les deux boules blanches puis obtenir l'un des deux secteurs (sur 5) affichant « 20 € » : donc la probabilité d'obtenir 20€ est $\dfrac{1}{10} \times \dfrac{2}{5} = \dfrac{1}{25}$

2. • **1,5 point**

x_i	$-m$	0	$20-m$
p_i	$\dfrac{3}{5}$	$\dfrac{9}{25}$	$\dfrac{1}{25}$

Explication : on a $\mathrm{P}(X=0)=\mathrm{P}(M)=\dfrac{9}{25}$ d'après la question **1. c)**

on a $\mathrm{P}(X=20-m)=\dfrac{1}{25}$ d"après la question **1. d)**

Enfin $\mathrm{P}(X=-m)=1-\mathrm{P}(X=0)-\mathrm{P}(X=20-m)=\dfrac{3}{5}$

$\overline{X}=-m\times\dfrac{3}{5}+0\times\dfrac{9}{25}+(20-m)\times\dfrac{1}{25}=\dfrac{20-16m}{25}$: c'est le gain moyen par partie pour les joueurs.

3. • **2,5 points**

• **1 point** S'il y a dans l'urne 2 boules blanches et n boules noires, $\mathrm{P}(A)=\dfrac{\binom{2}{1}\times\binom{n}{1}}{\binom{n+2}{2}}=\dfrac{2n}{\frac{(n+2)!}{n!2!}}=\dfrac{4n}{(n+1)(n+2)}$

• **0,5 point** Le joueur se voit rembourser sa mise ou gagne de l'argent s'il ne tire pas deux boules de couleurs différentes, donc la probabilité que le joueur récupère sa mise ou gagne de l'argent est $1-\mathrm{P}(A)=\dfrac{n^2-n+2}{(n+1)(n+2)}$

• **1 point** On résout l'inéquation $\dfrac{n^2-n+2}{(n+1)(n+2)}\geq\dfrac{1}{2}\Longleftrightarrow n^2-5n+2\geq 0$

On calcule le discriminant ($\Delta=17$) et les deux racines du polynôme $P(n)=n^2-5n+2$: $n_1=\dfrac{5-\sqrt{17}}{2}\approx 0,45$ et $n_2=\dfrac{5+\sqrt{17}}{2}\approx 4,55$. Le polynôme $P(n)$ est positif à l'extérieur des racines, et si on prend $n\geq 3$, il doit donc y avoir au minimum 5 boules noires dans l'urne.