UNIVERSITÉ DE CERGY-PONTOISE

U.F.R. Economie et Gestion **L2 - S3**

Licence d'Économie et Finance / Licence de Gestion

MATH 201 : PROBABILITÉS

TEST 1 - Mercredi 16 Octobre 2013 - 1h 30 min

Il sera tenu compte du soin apporté à la rédaction.
CALCULATRICES INTERDITES
LES PORTABLES DOIVENT ÊTRE DÉBRANCHÉS ET RANGÉS.
Le barème est donné à titre indicatif

Questions diverses - 13 points

Les questions de cet exercice sont indépendantes les unes des autres.

1. Dans le triangle de Pascal, les valeurs des $\binom{4}{p}$ sont données ci-dessous :

p	0	1	2	3	4
$\binom{4}{p}$	1	4	6	4	1

   de même donner la ligne des $\binom{5}{p}$

   En déduire le développement de $(2x-y)^5$ en utilisant la formule du binôme de Newton.

2. Déterminer le nombre « d'anagrammes » du mot EVENEMENT (les 4 « E » sont sans accents et considérés comme identiques).

3. On tire trois boules successivement d'une urne contenant des boules rouges et noires en très grand nombre, et pour tout $k \in \{1; 2.3\}$, on considère l'événement R_k : « la k-ième boule tirée est rouge ». Exprimer en fonction de R_1, R_2 et R_3 et des connecteurs logiques les événement suivants :
   (a) A : « on obtient trois boules rouges »
   (b) B : « on obtient trois boules de même couleur »
   (c) C : « on obtient exactement une boule rouge »
   (d) D : « on obtient au moins une boule rouge »

4. Soit Ω un ensemble non vide et $\mathcal{T} = \mathcal{P}(\Omega)$ la tribu des parties de Ω. Donner la définition de P est une probabilité sur l'espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$.

5. Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathrm{P})$ un espace probabilisé. Les égalités suivantes étant admises :
   1) $\mathrm{P}(\emptyset) = 0$
   2) Si E et F sont deux événements incompatibles : $\mathrm{P}(E \cup F) = \mathrm{P}(E) + \mathrm{P}(F)$.
   Démontrer que pour tous événements A et B, $\mathrm{P}(A \cap \overline{B}) = \mathrm{P}(A) - \mathrm{P}(A \cap B)$.

   Application numérique : Soient A et B deux événements d'un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathrm{P})$ tels que $\mathrm{P}(A) = 0,3$; $\mathrm{P}(\overline{B}) = 0,4$ et $\mathrm{P}(A \cup B) = 0,7$. Déterminer $\mathrm{P}(A \cap \overline{B})$.

6. Soient A, B et C trois événements d'un univers Ω tels que $\mathrm{P}(A \cap B \cap C) = 0$
   (a) Exprimer $\mathrm{P}\ (A \cup B \cup C)$ grâce à la formule du crible de Poincaré.
   (b) On suppose que A, B et C sont équiprobables et indépendants deux à deux : on pose $\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(B) = \mathrm{P}(C) = p$.
   Montrer que $\mathrm{P}(A \cup B \cup C) = 3p(1-p)$

7. Une rangée de l'amphithéâtre comporte 10 sièges sur lesquels vont s'asseoir aléatoirement 10 étudiants : parmi ceux ci les étudiants « bavard N°1 » et « bavard N°2 » (notés respectivement B_1 et B_2). Déterminer la probabilité de l'événement pénible A : « B_1 et B_2 sont assis côte à côte ».

8. Montrer que si la V.A. R. D. X suit la loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$, alors $E(X) = \dfrac{n+1}{2}$

Exercice 1 - 3 points

Lors d'un examen sous forme de Q.C.M., à la question portant sur la définition de probabilité un étudiant a le choix entre 3 propositions dont une seule, la C, est exacte.

On suppose que si l'étudiant connaît la réponse juste il répond effectivement par C. Sinon il répond en choisissant au hasard une des trois réponses.

On note : E l'événement « l'étudiant connaît la réponse correcte », et R_C : « l'étudiant répond C à la question ».

On suppose que $\mathrm{P}(E) = p \in]0;1[$ et on note $P_c = \mathrm{P}(R_C)$

1. Déterminer $\mathrm{P}_E(R_C)$ $\mathrm{P}_{\overline{E}}(R_C)$.
2. Exprimer P_c en fonction de p.
3. En déduire en fonction de p, la probabilité qu'une personne ayant coché la réponse C connaisse effectivement la bonne réponse.

Exercice 2 - 4,5 points

Une urne contient 9 boules numérotées de 1 à 9. On tire au hasard 2 boules de cette urne. On note P l'événement « les deux boules tirées ont des numéros pairs » et I l'événement « les deux boules tirées ont des numéros impairs », enfin A l'événement « les deux boules tirées sont de même parité ».

Déterminer la probabilité de A dans les trois cas suivants : on précisera l'univers associé à l'expérience aléatoire considérée dans chacun des cas et on donnera son cardinal.

1. On tire les 2 boules simultanément.
2. On tire successivement et sans remise les deux boules.
3. On tire successivement et avec remise les deux boules.

UNIVERSITÉ DE CERGY-PONTOISE

U.F.R. Economie et Gestion **L2 - S3**

Licence d'Économie et Finance / Licence de Gestion

Corrigé du TEST 1 - Probabilités

Questions diverses - 13 points

1. **1,5 point**

p	0	1	2	3	4	5
$\binom{5}{p}$	1	5	10	10	5	1

$$\begin{aligned}(2x-y)^5 &= \binom{5}{0}(2x)^0(-y)^5+\binom{5}{1}(2x)^1(-y)^4+\binom{5}{2}(2x)^2(-y)^3+\binom{5}{3}(2x)^3(-y)^2\\ &\quad+\binom{5}{4}(2x)^4(-y)^1+\binom{5}{5}(2x)^5(-y)^0\\ &= -y^5+5\times 2xy^4-10\times 4x^2y^3+10\times 8x^3y^2-5\times 16x^4y+32x^5\\ &= -y^5+10xy^4-40x^2y^3+80x^3y^2-80x^4y+32x^5\end{aligned}$$

2. **1 point** Une méthode possible : on place les 4 « E » : il y a $\binom{9}{4}=\dfrac{9!}{5!4!}=\dfrac{6.7.8.9}{1.2.3.4}=$ 126 possibilités. Puis on place les 2 « N » : il y a $\binom{5}{2}=10$ possibilités. Enfin on place les 3 dernières lettres (« V, M et T ») : il y a $3!=6$ possibilités. Ainsi EVENEMENT possède $126\times 10\times 6=7560$ anagrammes.

3. **4 x 0,5 = 2 points**
   (a) $A=R_1\cap R_2\cap R_3$
   (b) $B=(R_1\cap R_2\cap R_3)\cup(\overline{R_1}\cap\overline{R_2}\cap\overline{R_3})$
   (c) $C=(R_1\cap\overline{R_2}\cap\overline{R_3})\cup(\overline{R_1}\cap R_2\cap\overline{R_3})\cup(\overline{R_1}\cap\overline{R_2}\cap R_3)$
   (d) $D=R_1\cup R_2\cup R_3$

4. **1 point** P est **application** de $\mathcal{T}$ vers $[0;1]$ telle que $P(\Omega)=1$ et qui possède la propriété de σ-additivité.

5. **1 point** On vérifie que les événements $A\cap B$ et $A\cap\overline{B}$ sont incompatibles afin d'utiliser les égalités prises en hypothèse.
   • on a $(A\cap B)\cap(A\cap\overline{B})=A\cap(B\cap\overline{B})=A\cap\emptyset=\emptyset$
   • De plus $(A\cap B)\cup(A\cap\overline{B})=A\cap(B\cup\overline{B})=A\cap\Omega=A$
   On utilise la propriété admise avec $E=A\cap B$ et $F=A\cap\overline{B}$: E et F sont incompatibles, d'où $\mathrm{P}(E\cup F)=\mathrm{P}(E)+\mathrm{P}(F)$ c-a-d. $\mathrm{P}(A)=\mathrm{P}(A\cap B)+\mathrm{P}(A\cap\overline{B})$

   1,5 point *Application numérique :* P $(B)=1-\mathrm{P}(\overline{B})=0,6$, d'où $\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cup B)=0,2$; et donc $\mathrm{P}(A\cap\overline{B})=\mathrm{P}(A)-\mathrm{P}(A\cap B)=0,1$.

6. **2 points** Soient A, B et C trois événements d'un univers Ω tels que $\mathrm{P}(A \cap B \cap C) = 0$
   (a) $\mathrm{P}\ (A \cup B \cup C) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) + \mathrm{P}(C) - \mathrm{P}(A \cap B) - \mathrm{P}(A \cap C) - \mathrm{P}(B \cap C) + \mathrm{P}(A \cap B \cap C) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) + \mathrm{P}(C) - \mathrm{P}(A \cap B) - \mathrm{P}(A \cap C) - \mathrm{P}(B \cap C)$ car $\mathrm{P}(A \cap B \cap C) = 0$
   (b) Si $\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(B) = \mathrm{P}(C) = p$, $\mathrm{P}(A \cup B \cup C) = p + p + p - \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(C) - \mathrm{P}(B)\mathrm{P}(C) = 3p - 3p^2 = 3p(1-p)$
7. **2 points** L'univers considéré est l'ensemble des permutations des 10 étudiants : soit Card $\Omega = 10!$

   On détermine le nombre de cas où B_1 et B_2 sont assis côte à côte : on place d'abord B_1 : il y a 10 choix possibles. Puis on place B_2 : si B_1 est en bout de rangée, B_2 n'a qu'un choix pour être à côté de B_1 ... sinon B_2 a 2 choix (à gauche et à droite de B_1) : ce qui fait donc $2 + 8 \times 2 = 18$ façons de placer B_1 et B_2 l'un à côté de l'autre. Une fois les bavards placés, les 8 autres étudiants ont 8! possibilités pour se placer (ce sont les permutations de 8 étudiants sur 8 places). Ainsi Card $A = 18 \times 8!$ et $\mathrm{P}(A) = \dfrac{2 \times 9 \times 8!}{10!} = \dfrac{2}{10} = 0,2$: ce qui malheureusement reste bien trop important pour que je puisse avoir la paix !
8. **1 point** • $E(X) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\mathrm{P}(X = k) = \sum_{k=1}^{n} k \times \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \times \sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{n} \times \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{2}$

Exercice 2 - 3 points

1. **1 point** D'après les données de l'énoncé, $\mathrm{P}_E(R_C) = 1$ et $\mathrm{P}_{\overline{E}}(R_C) = \dfrac{1}{3}$.
2. **1 point** D'après la formule des probabilités totales,
$$P_c = \mathrm{P}(R_C) = \mathrm{P}(E) \times \mathrm{P}_E(R_C) + \mathrm{P}(\overline{E}) \times \mathrm{P}_{\overline{E}}(R_C) = p \times 1 + (1-p) \times \frac{1}{3} = \frac{1+2p}{3}$$
3. **1 point** On cherche $\mathrm{P}_{R_C}(E) = \dfrac{\mathrm{P}(R_C \cap E)}{\mathrm{P}(R_C)} = \dfrac{\mathrm{P}(E) \times \mathrm{P}_E(R_C)}{\mathrm{P}(R_C)} = \dfrac{1 \times p}{P_c} = \dfrac{3p}{1+2p}$

Exercice 3 - $3 \times 1,5 =$ 4,5 points

Remarquons que si les boules sont numérotées de 1 à 9, il y a 4 numéros pairs et 5 numéros impairs !

0,5 point pour l'univers et son cardinal et 1 point pour la probabilité de A

1. On tire les 2 boules simultanément : l'univers Ω_1 est l'ensemble des combinaisons de 2 boules prises parmi 9 : Card$\Omega_1 = \dbinom{9}{2} = \dfrac{9!}{7!2!} = 36$. De plus, Card $P = \dbinom{4}{2} = 6$ et Card $I = \dbinom{5}{2} = 10$. Comme $P \cap I = \emptyset$, $\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(P) + \mathrm{P}(I) = \dfrac{6}{36} + \dfrac{10}{36} = \cdots = \dfrac{4}{9}$.
2. On tire successivement et sans remise les deux boules : l'univers Ω_2 est l'ensemble des arrangements de 2 boules prises parmi 9, donc Card $\Omega_2 = A_9^2 = 72$.

   De plus, Card $P = A_4^2 = 12$ et Card $I = A_5^2 = 20$

   De même que pour la question 1, $\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(P) + \mathrm{P}(I) = \dfrac{12}{72} + \dfrac{20}{72} = \cdots = \dfrac{4}{9}$
3. On tire successivement et avec remise les deux boules. L'univers Ω_3 est l'ensemble des 2−listes d'éléments pris dans $[\![1;9]\!]$ et Card$\Omega_3 = 9^2 = 81$.

   P est l'ensemble des 2-listes d'éléments pris dans $\{2;4;6;8\}$ et $\overline{P}$ est l'ensemble des 2-listes d'éléments pris dans $\{1;3;5;7\}$. Donc Card $P = 4^2 = 16$ et Card $I = 5^2 = 25$

   De même que pour la question 1, $\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(P) + \mathrm{P}(I) = \dfrac{16}{81} + \dfrac{25}{81} = \dfrac{41}{81}$