**UNIVERSITÉ DE CERGY** **Année 2016-2017**

**LICENCE d'ÉCONOMIE FINANCE et GESTION**

**Première année - Semestre 1**

# DIV 101 - Soutien en Mathématiques

# Livret d'exercices VI - Limites - Etude globale d'une fonction

## Exercice I

Déterminer les limites suivantes :

| | | |
|---|---|---|
| $a)\quad \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-1}{x}$ | $b)\quad \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{3x^2}{7}$ | $c)\quad \lim\limits_{x\to+\infty} 5x-1$ |
| $d)\quad \lim\limits_{x\to-1} 2x^2-3x$ | $e)\quad \lim\limits_{x\to2} \ln(x^2-x-1)$ | $f)\quad \lim\limits_{x\to1} \dfrac{3x^2-5}{-x^3+4x+1}$ |
| $g)\quad \lim\limits_{x\to2} \sqrt{x^2+5x+2}$ | $h)\quad \lim\limits_{x\to+\infty} 5-\dfrac{1}{x}+\dfrac{3}{x^2}$ | $i)\quad \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x^2-5}{-x^3+4x+1}$ |
| $j)\quad \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-x^3+5x^2+3x+6}{3x^2+1}$ | $k)\quad \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-x+1}{x^2+9}$ | $l)\quad \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-x^2+x-4}{7x+4}$ |
| $m)\quad \lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} 3x+1-\dfrac{2}{x}$ | $n)\quad \lim\limits_{x\to2} \dfrac{x^2-x-2}{x^2-4}$ | $o)\quad \lim\limits_{x\to+\infty} (-4-x)\times\sqrt{x}$ |
| $p)\quad \lim\limits_{\substack{x\to3\\x>3}} \dfrac{2}{x-3}$ | $q)\quad \lim\limits_{\substack{x\to2\\x<2}} \dfrac{1}{3x-6}$ | $r)\quad \lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}} \dfrac{2x^2-3x+5}{x-1}$ |
| $s)\quad \lim\limits_{\substack{x\to3\\x>3}} \dfrac{x^2+7}{x-3}$ | $t)\quad \lim\limits_{\substack{x\to-5\\x<-5}} \dfrac{x+1}{x^2+5x}$ | $u)\quad \lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}} \dfrac{2x+1}{x^2-4x+3}$ |
| $v)\quad \lim\limits_{\substack{x\to-3\\x<-3}} \sqrt{\dfrac{2x-1}{x+3}}$ | $w)\quad \lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{\frac{1}{x^2}}$ | $x)\quad \lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x^2+4}$ |
| $y)\quad \lim\limits_{x\to-\infty} xe^{-x}$ | $z)\quad \lim\limits_{x\to+\infty} e^x-(x^2+1)$ | $zz)\quad \lim\limits_{x\to+\infty} \ln(3x)-x$ |

## Exercice II

Étudier les variations des fonctions suivantes (limites aux bords du domaine de définition demandées)

$f_1\ :\ f_1(x)=\dfrac{3x+2}{x-1}$ sur $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$ $\qquad f_2\ :\ f_2(x)=x^{1/4}(1-4x)^{3/4}$ sur $D=\left]0;\dfrac{1}{4}\right[$

## Exercice III

On considère la fonction $f$ définie par : $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 1}{x + 1}$

1. Déterminer l'ensemble de définition de $f$ noté $\mathcal{D}_f$.
2. Effectuer la division euclidienne de $P(X) = X^2 - X - 1$ par $Q(X) = X + 1$. En déduire les réels $a$, $b$ et $c$ tels que $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x+1}$ pour tout $x \in \mathcal{D}_f$.
3. Déterminer les limites de $f$ aux bords de son ensemble de définition.
4. Déterminer la fonction dérivée de $f$ notée $f'$, puis donner le tableau des variations de $f$ sur $\mathcal{D}_f$.
5. Déterminer les asymptotes de $\mathcal{C}_f$.

## Exercice IV
## Extrait du Partiel de Janvier 2014

On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = xe^x - e^x + 1$$

1. Déterminer la limite de $f$ en $-\infty$ : en déduire que $\mathcal{C}_f$ possède une asymptote horizontale $\Delta$ au voisinage de $-\infty$.
2. Déterminer la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à son asymptote $\Delta$
3. Déterminer la limite de $f$ en $+\infty$.
4. Montrer que la dérivée de $f$ est définie sur $\mathbb{R}$ par $f'(x) = xe^x$. En déduire les variations de $f$.
5. Déterminer une équation de chacune des tangentes à $\mathcal{C}_f$ aux points $M$ et $N$ d'abscisses respectives 0 et 1.

## Exercice V
## D'après le Partiel de Juin 2012

Soit $f$ la fonction définie par $f(x) = \dfrac{2}{x} + \ln(x^2)$

1. Donner l'ensemble de définition de $f$, noté $\mathcal{D}_f$.
2. Déterminer la limite de $f$ en $-\infty$.
   Déterminer la limite de $f$ en $+\infty$.
3. Déterminer la limite de $f$ en $0^-$.
4. Montrer que pour tout $x > 0$, $f(x) = \dfrac{2 + 2x\ln x}{x}$. En déduire la limite de $f$ en $0^+$
5. Démontrer que pour tout $x$ de $\mathcal{D}_f$, $f'(x) = \dfrac{2(x-1)}{x^2}$.
6. En déduire les variations de $f$ sur son ensemble de définition.
7. Donner l'équation de la tangente à la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de $f$ au point $A$ d'abscisse 1.
8. Montrer que l'équation $(E)\ :\ f(x) = 0$ possède une unique solution réelle $\alpha$