UNIVERSITE DE CERGY PONTOISE
LICENCE D'ECONOMIE 2ème année
ANALYSE STATISTIQUE
Examen 2ère session 2013
durée : 2h
Enseignant responsable: ANDRIANASITERA

Exercice1(8pts)

Dans les années antérieures , la distribution des notes d'analyse statistique obtenues par les étudiants de la deuxième année est une distribution normale N(10 , 3).

1) Quelle devrait être alors la proportion d'étudiants qui ont obtenu une note comprise entre 8 et 12 avec cette distribution. ?

2)On a prélevé un échantillon de n notes $(X_1, X_2, ..., X_n)$à partir du listing des notes. On désigne par $\overline{X}_n$ la moyenne empirique de l'échantillon.
Déterminer $E(\overline{X}_n)$ et $V(\overline{X}_n)$. Quelle est la loi de $\overline{X}_n$?
Trouver la valeur minimale n pour que l'on ait au moins 97 chances sur 100 que la moyenne empirique soit comprise entre 9,5 et 10,5

3)Pour savoir si les paramètres de la distribution ont changé l'équipe pédagogique a effectué deux tests portant sur un échantillon aléatoire de 41 notes . Ce tirage a donné les résultats suivants :

$$\sum_{i=1}^{41} x_i = 377 \text{ et : } \sum_{i=1}^{41} (x_i - \overline{x})^2 = 420$$

a) Le premier test est le suivant :

$$\begin{cases} H_0 : m = 10 \\ H_1 : m = 9{,}5 \end{cases}$$

Déterminer la forme de la région critique en précisant la statistique utilisée
Déterminer cette région critique quand on fixe le risque de première espèce α à 5%.
b)mêmes questions pour le deuxième test suivant :

$$\begin{cases} H_0 : \sigma^2 = 9 \\ H_1 : \sigma^2 > 9 \end{cases}$$

Au vu de ces résultats quelle serait la conclusion prise par l'équipe pédagogique ?

Exercice2(7pts)

On suppose que la loi de probabilité d'une variable aléatoire X est définie par la fonction de densité $f(x)$ dépendant d'un paramètre θ telle que :

$$f(x)=\begin{cases} e^{-(x-\theta)} & x\geq\theta \\ 0 & x<\theta \end{cases} \quad avec \quad \theta>0$$

1)Montrer que $f(x)$ est effectivement une densité de probabilité.

.

2) Montrer que la fonction génératrice des moments non centrés de la variable X $G_X(t)=E(e^{Xt})$ est égale à $\dfrac{e^{\theta t}}{1-t}$ $\forall t\in[0,1[$

3)Montrer que $E(X)=\theta+1$ et que $E(X^2)=\theta^2+2\theta+2$.

En déduire $V(X)$

4) Soit maintenant un échantillon $(X_1,X_2,...,X_n)$ les X_i étant des variables aléatoires , toutes positives , indépendantes et suivant la même loi que celle de la variable X.

a) Calculer $E(\overline{X}_n)$

b) En déduire un estimateur T sans biais de θ

Cet estimateur T est est-il convergent ?(Justifier votre réponse)

Exercice3(5pts)

Un candidat à une élection municipale à fait effectuer un sondage sur 100 votants. Cet échantillon lui fournit 55 intentions de vote en sa faveur.

1-Soient X le nombre aléatoire d'intentions de vote favorables pour un échantillon de taille n quelconque et p la proportion d'intentions de vote en sa faveur.

a)Quelle est la loi exacte de la variable aléatoire X ?

b) Même question pour la variable aléatoire $F_n = X/n$

c) Montrer que F_n est un estimateur sans biais et convergent de la proportion p .

2)Quelle est la fourchette de pourcentage de voix qu'il obtiendra avec une confiance de 96%. ?

3)Quelle devrait être la taille de l'échantillon fournissant 55% d'intentions de vote en sa faveur pour que le candidat soit , avec un risque de 2.5% seulement, certain d'être élu ?