UNIVERSITE DE CERGY PONTOISE
LICENCE D'ECONOMIE 2ème année
ANALYSE STATISTIQUE
Examen 1ère session 2014
durée : 2h
Enseignant responsable: ANDRIANASITERA

Exercice1(10pts)

Dans une population la distribution d'une variable statistique X est normale de moyenne m et d'écart type σ.

Pour un échantillon de taille n $(X_1, X_2, ..., X_n)$ on désigne respectivement par $\overline{X}_n$ et par S_n^2 la moyenne empirique et la variance empirique corrigée de l'échantillon.

Première partie

1) Donner l'expression de $\overline{X}_n$ et de S_n^2

2)Déterminer $E(\overline{X}_n)$ et $V(\overline{X}_n)$. Quelle est la loi de $\overline{X}_n$?

3) Déterminer $E(S^2_n)$. Quelle est la loi de $(n-1)\frac{S^2_n}{\sigma^2}$?

Deuxième partie

Un échantillon aléatoire de taille 30 a donné les résultats suivants :

$$\sum_{i=1}^{30} x_i = 210 \text{ et : } \sum_{i=1}^{30} x^2_i = 1590$$

1)Construire un intervalle de confiance à 95% pour m

2)Même questions pour σ^2

3)Au vu de ces résultats on veut tester les conjectures suivantes m=7et $\sigma = 2$.

a) Soit le test suivant :

$$\begin{cases} H_0 : m = 7 \\ H_1 : m > 7 \end{cases}$$

Déterminer la forme de la région critique en précisant la statistique utilisée
Déterminer cette région critique quand on fixe le risque de première espèce α égal à 5%.
Définir la règle de décision et conclure au vu de l'échantillon

b)mêmes questions pour le test qui suit :

$$\begin{cases} H_0 : \sigma = 2 \\ H_1 : \sigma \neq 2 \end{cases}$$

Exercice2(10pts)

On suppose que la loi de probabilité d'une variable aléatoire X est définie par la fonction de densité $f(x)$ dépendant d'un paramètre λ telle que :

$$f(x)=\begin{cases} e^{-\left(x-\frac{1}{\lambda}\right)} & x\geq\frac{1}{\lambda} \\ 0 & x<\frac{1}{\lambda} \end{cases} \quad avec \quad \lambda>0$$

1)Montrer que $f(x)$ est effectivement une densité de probabilité.

2) Montrer que la fonction génératrice des moments non centrés de X .

$$G_X(t)=E(e^{tX})=\frac{e^{\frac{t}{\lambda}}}{1-t} \quad \forall t\in[0;1[$$

3)Calculer le développement limité l'ordre 2 au voisinage de 0 de $G_X(t)$

4)Montrer que $E(X)=\frac{\lambda+1}{\lambda}$ et que $E(X^2)=\frac{1}{\lambda^2}+\frac{2}{\lambda}+2$.

En déduire $V(X)$

5) Soit maintenant un échantillon $(X_1,X_2,...,X_n)$ les X_i étant des variables aléatoires , toutes positives , indépendantes et suivant la même loi que celle de la variable X.

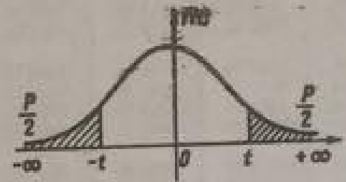
a) Calculer $E(\overline{X}_n)$

b)En déduire un estimateur T sans biais de $\frac{1}{\lambda}$

Cet estimateur T est-il convergent ?(Justifier votre réponse)

TABLE DE DISTRIBUTION DE T (LOI DE STUDENT)

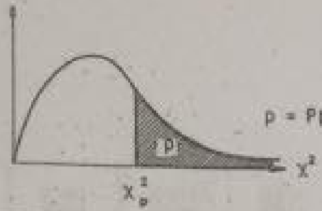
Valeurs de T ayant la probabilité P d'être dépassées en valeur absolue



ν \ P	0,90	0,80	0,70	0,60	0,50	0,40	0,30	0,20	0,10	0,05	0,02	0,01	0,001
1	0,158	0,325	0,510	0,727	1,000	1,376	1,963	3,078	6,314	12,706	31,821	63,657	636,619
2	0,142	0,289	0,445	0,617	0,816	1,061	1,386	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925	31,598
3	0,137	0,277	0,424	0,584	0,765	0,978	1,250	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841	12,929
4	0,134	0,271	0,414	0,569	0,741	0,941	1,190	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604	8,610
5	0,132	0,267	0,408	0,559	0,727	0,920	1,156	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032	6,869
6	0,131	0,265	0,404	0,553	0,718	0,906	1,134	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707	5,959
7	0,130	0,263	0,402	0,549	0,711	0,896	1,119	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499	5,408
8	0,130	0,262	0,399	0,546	0,706	0,889	1,108	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355	5,041
9	0,129	0,261	0,398	0,543	0,703	0,883	1,100	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250	4,781
10	0,129	0,260	0,397	0,542	0,700	0,879	1,093	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169	4,587
11	0,129	0,260	0,396	0,540	0,697	0,876	1,088	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106	4,437
12	0,128	0,259	0,395	0,539	0,695	0,873	1,083	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055	4,318
13	0,128	0,259	0,394	0,538	0,694	0,870	1,079	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012	4,221
14	0,128	0,258	0,393	0,537	0,692	0,868	1,076	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977	4,140
15	0,128	0,258	0,393	0,536	0,691	0,866	1,074	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947	4,073
16	0,128	0,258	0,392	0,535	0,690	0,865	1,071	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921	4,015
17	0,128	0,257	0,392	0,534	0,689	0,863	1,069	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898	3,965
18	0,127	0,257	0,392	0,534	0,688	0,862	1,067	1,330	1,734	2,101	2,552	2,878	3,922
19	0,127	0,257	0,391	0,533	0,688	0,861	1,066	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861	3,883
20	0,127	0,257	0,391	0,533	0,687	0,860	1,064	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845	3,850
21	0,127	0,257	0,391	0,532	0,686	0,859	1,063	1,323	1,721	2,080	2,518	2,831	3,819
22	0,127	0,256	0,390	0,532	0,686	0,858	1,061	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819	3,792
23	0,127	0,256	0,390	0,532	0,685	0,858	1,060	1,319	1,714	2,069	2,500	2,807	3,767
24	0,127	0,256	0,390	0,531	0,685	0,857	1,059	1,318	1,711	2,064	2,492	2,797	3,745
25	0,127	0,256	0,390	0,531	0,684	0,856	1,058	1,316	1,708	2,060	2,485	2,787	3,725
26	0,127	0,256	0,390	0,531	0,684	0,856	1,058	1,315	1,706	2,056	2,479	2,779	3,707
27	0,137	0,256	0,389	0,531	0,684	0,855	1,057	1,314	1,703	2,052	2,473	2,771	3,690
28	0,127	0,256	0,389	0,530	0,683	0,855	1,056	1,313	1,701	2,048	2,467	2,763	3,674
29	0,127	0,256	0,389	0,530	0,683	0,854	1,055	1,311	1,699	2,045	2,462	2,756	3,659
30	0,127	0,256	0,389	0,530	0,683	0,854	1,055	1,310	1,697	2,042	2,457	2,750	3,646
40	0,126	0,255	0,388	0,529	0,681	0,851	1,050	1,303	1,684	2,021	2,423	2,704	3,551
80	0,126	0,254	0,387	0,527	0,679	0,848	1,046	1,296	1,671	2,000	2,390	2,660	3,460
120	0,126	0,254	0,386	0,526	0,677	0,845	1,041	1,289	1,658	1,980	2,358	2,617	3,373
∞	0,126	0,253	0,385	0,524	0,674	0,842	1,036	1,282	1,645	1,960	2,326	2,576	3,291

TABLE de la LOI du χ^2

ν et p donnés → recherche de χ^2_p tel que $P(\chi^2 > \chi^2_p) = p$



$p = P(\chi^2 > \chi^2_p)$

Degrees of Freedom ν \ Pb p	.995	.990	.975	.950	.900	.750	.500	.250	.100	.050	.025	.010	.005
1	$392704 \cdot 10^{-10}$	$157088 \cdot 10^{-9}$	$982069 \cdot 10^{-9}$	$393214 \cdot 10^{-8}$	.0157908	.1015308	.454937	1.32330	2.70554	3.84146	5.02389	6.63490	7.87944
2	.0100251	.0201007	.0506356	.102587	.210720	.575364	1.38629	2.77259	4.60517	5.99147	7.37776	9.21034	10.5966
3	.0717212	.114832	.215795	.351846	.584375	1.212534	2.36597	4.10835	6.25139	7.81473	9.34840	11.3449	12.8381
4	.206990	.297110	.484419	.710721	1.063623	1.92255	3.35670	5.38527	7.77944	9.48773	11.1433	13.2767	14.8602
5	.411740	.554300	.831211	1.145476	1.61031	2.67460	4.35146	6.62568	9.23635	11.0705	12.8325	15.0863	16.7496
6	.675727	.872085	1.237347	1.63539	2.20413	3.45460	5.34812	7.84080	10.6446	12.5916	14.4494	16.8119	18.5476
7	.989265	1.239043	1.68987	2.16735	2.83311	4.25485	6.34581	9.03715	12.0170	14.0671	16.0128	18.4753	20.2777
8	1.344419	1.646482	2.17973	2.73264	3.48954	5.07064	7.34412	10.2188	13.3616	15.5073	17.5346	20.0902	21.9550
9	1.734926	2.087912	2.70039	3.32511	4.16816	5.89883	8.34283	11.3887	14.6837	16.9190	19.0228	21.6660	23.5893
10	2.15585	2.55821	3.24697	3.94030	4.86518	6.73720	9.34182	12.5489	15.9871	18.3070	20.4831	23.2093	25.1882
11	2.60321	3.05347	3.81575	4.57481	5.57779	7.58412	10.3410	13.7007	17.2750	19.6751	21.9200	24.7250	26.7569
12	3.07382	3.57056	4.40379	5.22603	6.30380	8.43842	11.3403	14.8454	18.5494	21.0261	23.3367	26.2170	28.2995
13	3.56503	4.10691	5.00874	5.89186	7.04150	9.29906	12.3398	15.9839	19.8119	22.3621	24.7356	27.6883	29.8194
14	4.07468	4.66043	5.62872	6.57063	7.78953	10.1653	13.3393	17.1170	21.0642	23.6848	26.1190	29.1413	31.3193
15	4.60094	5.22935	6.26214	7.26094	8.54675	11.0365	14.3389	18.2451	22.3072	24.9958	27.4884	30.5779	32.8013
16	5.14224	5.81221	6.90766	7.96164	9.31223	11.9122	15.3385	19.3688	23.5418	26.2962	28.8454	31.9999	34.2672
17	5.69724	6.40776	7.56418	8.67176	10.0852	12.7919	16.3381	20.4887	24.7690	27.5871	30.1910	33.4087	35.7185
18	6.26481	7.01491	8.23075	9.39046	10.8649	13.6753	17.3379	21.6049	25.9894	28.8693	31.5264	34.8053	37.1564
19	6.84398	7.63273	8.90655	10.1170	11.6509	14.5620	18.3376	22.7178	27.2036	30.1435	32.8523	36.1908	38.5822
20	7.43386	8.26040	9.59083	10.8508	12.4426	15.4518	19.3374	23.8277	28.4120	31.4104	34.1696	37.5662	39.9968
21	8.03366	8.89720	10.28293	115913	13.2396	16.3444	20.3372	24.9348	29.6151	32.6705	35.4789	38.9321	41.4010
22	8.64272	9.54249	10.9823	12.3380	14.0415	17.2396	21.3370	26.0393	30.8133	33.9244	36.7807	40.2894	42.7956
23	9.26042	10.19567	11.6885	13.0905	14.8479	18.1373	22.3369	27.1413	32.0069	35.1725	38.0757	41.6384	44.1813
24	9.88623	10.8564	12.4011	13.8484	15.6587	19.0372	23.3367	28.2412	33.1963	36.4151	39.3641	42.9798	45.5585
25	10.5197	11.5240	13.1197	14.6114	16.4734	19.9393	24.3366	29.3389	34.3816	37.6525	40.6465	44.3141	46.9278
26	11.1603	12.1981	13.8439	15.3791	17.2919	20.8434	25.3364	30.4345	35.5631	38.8852	41.9232	45.6417	48.2899
27	11.8076	12.8786	14.5733	16.1513	18.1138	21.7494	26.3363	31.5284	36.7412	40.1133	43.1944	46.9630	49.6449
28	12.4613	13.5648	15.3079	16.9279	18.9392	22.6572	27.3363	32.6205	37.9159	41.3372	44.4607	48.2782	50.9933
29	13.1211	14.2565	16.0471	17.7083	19.7677	23.5666	28.3362	33.7109	39.0875	42.5569	45.7222	49.5879	52.3356
30	13.7867	14.9535	16.7908	18.4926	20.5992	24.4776	29.3360	34.7998	40.2560	43.7729	46.9792	50.8922	53.6720
40	20.7065	22.1643	24.4331	26.5093	29.0505	33.6603	39.3354	45.6160	51.8050	55.7585	59.3417	63.6907	66.7659
50	27.9907	29.7067	32.3574	34.7642	37.6886	42.9421	49.3349	56.3336	63.1671	67.5048	71.4202	76.1539	79.4900
60	35.5346	37.4848	40.4817	43.1879	46.4589	52.2938	59.3347	66.9814	74.3970	79.0819	83.2976	88.3794	91.9517
70	43.2752	45.4418	48.7576	51.7393	55.3290	61.6983	69.3344	77.5766	85.5271	90.5312	95.0231	100.425	104.215
80	51.1720	53.5400	57.1532	60.3915	64.2778	71.1445	79.3343	88.1303	96.5782	101.879	106.629	112.329	116.321
90	59.1963	61.7541	65.6466	69.1260	73.2912	80.6247	89.3342	98.6499	107.565	113.145	118.136	124.116	128.299
100	67.3276	70.0648	74.2219	77.9295	82.3581	90.1332	99.3341	109.141	118.498	124.342	129.561	135.807	140.169

[a] The probability shown at the head of the column is the area in the right-hand tail. Example: With 4 degrees of freedom, a χ^2 value larger than 7.78 has a .1 probability.

Source. This table is abridged from E. S. Pearson and H. O. Hartley, *Biometrika Tables for Statisticians*, Vol. I (1954), pp. 130–131, with kind permission of the Syndics of the Cambridge University Press, publishers for the Biometrika Society.

Corrigé du Partiel 2014 session1

Exercice1

Première partie

1)

$$\overline{X}_n = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} \quad et \quad S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}_n\right)^2}{n-1}$$

2)

$$E\left(\overline{X}\right) = E\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}\right) = \frac{\sum_{i=1}^{n} E(X_i)}{n} = \frac{nm}{n} = m$$

$$V\left(\overline{X}\right) = V\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}\right) = \frac{\sum_{i=1}^{n} V(X_i)}{n^2} = n\frac{\sigma^2}{n^2} = \frac{\sigma^2}{n}$$

et $\overline{X}_n$ étant une combinaison linéaire de variables aléatoires normales suit une loi normale $N\left(m, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$

3)

$E\left(S^2\right) = \sigma^2$ car S^2 est un estimateur sans biais de σ^2 et $(n-1)\frac{S^2_n}{\sigma^2}$ suit une loi de chi deux à n-1 degrés de liberté

On peut encore justifier $E\left(S^2\right) = \sigma^2$ de deux façons :

a) Calcul direct de $E(S^2)$

$$\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}_n\right)^2 = \sum_{i=1}^{n}\left(X_i^2 - 2X_i\overline{X}_n + \overline{X}_n^2\right) = \sum_{i=1}^{n} X_i^2 - 2\overline{X}_n\sum_{i=1}^{n} X_i + \sum_{i=1}^{n}\overline{X}_n^2$$

$$= \sum_{i=1}^{n} X_i^2 - 2\overline{X}_n n\overline{X} + n\overline{X}_n^2 = \sum_{i=1}^{n} X_i^2 - n\overline{X}_n^2 \quad car \sum_{i=1}^{n} X_i = n\overline{X}$$

$$\Rightarrow E\left[\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}_n\right)^2\right] = E\left[\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - n\overline{X}_n^2\right] = \sum_{i=1}^{n} E\left(X_i^2\right) - nE\left(\overline{X}_n^2\right)$$

$$E(X_i^2) = V(X_i^2) - (EX_i)^2 = \sigma^2 - m^2$$

$$E\left(\overline{X}_n^{\,2}\right)=V(\overline{X}_n^{\,2})-\left(E\left(\overline{X}_n\right)\right)^2=\frac{\sigma^2}{n}-m^2$$

Il vient : $E\left[\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}_n\right)^2\right]=n(\sigma^2-m^2)-n(\frac{\sigma^2}{n}-m^2)=(n-1)\sigma^2$

Par suite $E(S^2)=E\left[\sum_{i=1}^{n}\frac{\left(X_i-\overline{X}_n\right)^2}{n-1}\right]=\frac{1}{n-1}E\left[\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}_n\right)^2\right]=\frac{(n-1)\sigma^2}{n-1}=\sigma^2$

b)On sait que $(n-1)\frac{S^2}{\sigma^2}$ suit une loi de chi deux à n-1 degrés de liberté

donc $E\left[(n-1)\frac{S^2}{\sigma^2}\right]=n-1\Rightarrow\frac{n-1}{\sigma^2}E(S^2)=n-1\Rightarrow E(S^2)=\sigma^2$

<u>Deuxième partie</u>

1)

Pour construire un intervalle de confiance pour m on utilise la variable $\dfrac{\overline{X}_n-m}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$ qui

suit une loi de Student à n-1 degrés de liberté car σ n'est pas connu

Etant donné un seuil α, on lit dans la table de Student la valeur de t_α, telle que

P$\left[\left|\dfrac{\overline{X}_n-m}{\frac{S}{\sqrt{n}}}\right|<t_\alpha\right]=1-\alpha$ ce qui s'écrit $P[\overline{X}_n-t_\alpha\frac{S}{\sqrt{n}}<m<\overline{X}_n+t_\alpha\frac{S}{\sqrt{n}}]=1-\alpha$

d'où l'intervalle de confiance : $IC(m)=[\overline{x}-t_\alpha\frac{s}{\sqrt{n}}\quad,\quad\overline{x}+t_\alpha\frac{s}{\sqrt{n}}]$

Ici 1-α=95% donc p=α=0.05 et par suite t_α=2,045 pour n-1=29

$$\overline{x}=\frac{\sum_{i=1}^{30}x_i}{30}=7 \text{ et } s^2=\frac{\left(\sum_{i=1}^{30}x_i^2\right)-30\left(\overline{x}\right)^2}{29}=\frac{1590-30.49}{29}=\frac{120}{29}=4{,}138$$

$$soit\ s\approx 2.034$$

Ce qui donne comme intervalle de confiance :

$IC(m)$=[7-0.76 ,7+0.76]=[6.24 , 7.76]

2) On sait que $29\dfrac{S^2}{\sigma^2}$ suit une loi de chi deux à 29 degrés de liberté

Etant donné α, on lit dans la table les deux valeurs k_1 et k_2 telles que

$$P\left(\chi_{29}^2 > k_2\right) = \frac{\alpha}{2} \quad \text{et } P\left(\chi_{29}^2 < k_1\right) = \frac{\alpha}{2} \quad \text{d'où } P\left[k_1 < \left(\frac{29S^2}{\sigma^2}\right) < k_2\right] = 1-\alpha$$

ce qui s'écrit encore :

$$P\left[\frac{29S^2}{k_2} < \sigma^2 < \frac{29S^2}{k_1}\right] = 1-\alpha$$ d'où l'intervalle de confiance pour σ^2

$$IC(\sigma^2) = \left[\frac{29s^2}{k_2} \ , \ \frac{29s^2}{k_1}\right] = \left[\frac{120}{k_2} \ , \ \frac{120}{k_1}\right]$$

Ici α=0.05 donc $P\left(\chi_{29}^2 > k_2\right) = \dfrac{\alpha}{2} = 0{,}025 \Rightarrow k_2 = 45{,}72$ et

$P\left(\chi_{29}^2 > k_1\right) = 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 0.975 \Rightarrow k_1 = 16{,}0471$ ce qui donne comme intervalle à 95% pour σ^2 $\quad IC(\sigma^2) = \quad [2{,}62 \ , \ 7{,}47]$

3)

a) C'est un test qui porte sur la moyenne d'une variable suivant une loi normale $N(m,\sigma)$ donc on va s'appuyer sur la statistique $Z = \overline{X}_n = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ qui est un estimateur sans biais de m.

la région critique peut être définie par la statistique $\overline{X}_n$ qui suit la la loi normale N $\left(7, \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ sous l'hypothèse H_0 mais comme σ est inconnu, on utilise la variable

$$T_0 = \frac{\overline{X}_n - 7}{\dfrac{S_n}{\sqrt{n}}}$$ qui sous l'hypothèse H_0 suit une loi de Student à n-1 ddl.

La région critique est de la forme : $\overline{x}_n \geq k$ et k est tel que

$$\alpha = P(\overline{X}_n \geq k / H_0) = P(T_0 \geq t_\alpha / T_0 \sim St_{29})$$

On trouve dans une table de Student la valeur t_α et on en déduit :

$k = m_0 + t_\alpha \dfrac{s}{\sqrt{n}}$ et la région critique (R) est définie par $\overline{x}_n \geq m_0 + t_\alpha \dfrac{s}{\sqrt{n}}$

Pour $\alpha = 5\%$ on trouve dans une table de Student à 29 ddl la valeur $t_\alpha = 1{,}699$

car $p = 2\alpha = 10\%$ et on en déduit :

$$k = m_0 + t_\alpha \frac{s}{\sqrt{n}} = 7 + 1{,}699 \frac{2{,}034}{\sqrt{30}} \approx 7{,}630$$

et la région critique (R) est définie par $\overline{x}_n \geq 7{,}630$

D'où la règle de décision suivante : Si $\overline{x} \geq 7{,}630$ on rejette *l'hypothèse* $m = 7$

Décision : $\overline{x} = 7 \notin (R)$ *donc on accepte l'hypothèse* $m = 7$

b) $\begin{cases} H_0 : \sigma = 2 \\ H_1 : \sigma \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} H_0 : \sigma^2 = 4 \\ H_1 : \sigma \neq 4 \end{cases}$

Le test portant sur la variance on peut s'appuyer sur la statistique

$$Z = \sum_{i=1}^{n} \left(X_i - \overline{X}\right)^2$$

et on sait de plus que $\dfrac{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2}{\sigma^2}$ suit une loi de X^2 à n-1 ddl (ici 29ddl)

On est en présence d'un test bilatéral donc la région critique est définie par :

$$(R) : \left\{\sum_{i=1}^{30} (x_i - \overline{x})^2 \geq 4.K_2\right\} \cup \left\{\sum_{i=1}^{30} (x_i - \overline{x})^2 \leq 4.K_1\right\}$$

avec $P\left(\chi^2_{29} \leq K_1\right) = 0.025 \Leftrightarrow P\left(\chi^2_{29} \geq K_1\right) = 0.975 \Rightarrow K_1 = 16.0471$

$P\left(\chi_{29}{}^2 \geq K_2\right) = 0.025 \Rightarrow K_2 = 45.722$

Ce qui donne $(R) : \left\{\sum_{i=1}^{30} (x_i - \overline{x})^2 \geq 182.888\right\} \cup \left\{\sum_{i=1}^{30} (x_i - \overline{x})^2 \leq 64.1884\right\}$

Ce qui donne la région d'acceptation $(A) :]64.1884 \quad ,182.888 \quad [$

D'où la règle de décision suivante : Si $\sum_{i=1}^{30} (x_i - \overline{x})^2 \in A$ on accepte *l'hypothèse* $\sigma = 2$

Décision :

$$\sum_{i=1}^{30} \left(x_i - \overline{x}\right)^2 = 120 \quad \in (A) \text{ donc on accepte l'hypothèse } \sigma = 2$$

Exercice 2

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\left(x - \frac{1}{\lambda}\right)} & x \geq \frac{1}{\lambda} \quad \lambda > 0 \\ 0 & x < \frac{1}{\lambda} \end{cases}$$

1) f étant continue $f(x)$ est une ddp si $f \geq 0\ \forall x \in \mathbb{R}$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$

$$e^{-(x-\frac{1}{\lambda})} > 0\ \forall x \geq \frac{1}{\lambda} \text{ et } f(x) = 0\ \forall x < \frac{1}{\lambda} \text{ donc } f \geq 0\ \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x-\frac{1}{\lambda})}dx = \int_{\frac{1}{\lambda}}^{+\infty} e^{-(x-\frac{1}{\lambda})}dx = e^{\frac{1}{\lambda}} \int_{\frac{1}{\lambda}}^{+\infty} e^{-x}dx = e^{\frac{1}{\lambda}} \lim_{u \to +\infty} \left[-e^{-x}\right]_{\frac{1}{\lambda}}^{u}$$

$$= e^{\frac{1}{\lambda}} \lim_{u \to +\infty} \left[-e^{-u} + e^{-\frac{1}{\lambda}}\right] = e^{\frac{1}{\lambda}} e^{-\frac{1}{\lambda}} = 1 \text{ car } \lim_{u \to +\infty} e^{-u} = 0 \text{ par suite } f(x) \text{ est une ddp.}$$

2)

$$G_X(t) = E(e^{Xt}) = \int_{0}^{+\infty} e^{xt} e^{-(x-\frac{1}{\lambda})}dx = e^{\frac{1}{\lambda}} \int_{\frac{1}{\lambda}}^{+\infty} e^{-x(1-t)}dx = \frac{e^{\frac{1}{\lambda}}}{1-t} \lim_{u \to +\infty} \left[-e^{-x(1-t)}\right]_{\frac{1}{\lambda}}^{u}$$

$$= \frac{e^{\frac{1}{\lambda}}}{1-t} \lim_{u \to +\infty} \left[-e^{-u(1-t)} + e^{-\frac{1}{\lambda}(1-t)}\right] = \frac{e^{\frac{1}{\lambda}} e^{-\frac{1}{\lambda}(1-t)}}{1-t} = \frac{e^{\frac{1}{\lambda}t}}{1-t} \quad \text{pour} \quad 0 \leq t < 1$$

3) On sait qu'au voisinage de 0 :

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2) \text{ et } \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + o(x^2)$$

Donc $e^{\frac{t}{\lambda}} = 1 + \frac{t}{\lambda} + \frac{t^2}{2\lambda^2} + o(t^2)$ et $\frac{1}{1-t} = 1 + t + t^2 + o(t^2)$

Par suite $\left(1 + \frac{t}{\lambda} + \frac{t^2}{2\lambda^2}\right)(1 + t + t^2) = 1 + (1 + \frac{1}{\lambda})t + (\frac{1}{2\lambda^2} + \frac{1}{\lambda} + 1)t^2 + o(t^2)$

donc $\frac{e^{\frac{1}{\lambda}t}}{1-t} = 1 + (1 + \frac{1}{\lambda})t + (\frac{1}{2\lambda^2} + \frac{1}{\lambda} + 1)t^2 + o(t^2)$

4)

Première méthode :

D'après le cours $G_X(t) = 1 + E(X)t + \frac{E(X^2)}{2}t + o(t^2)$ donc par identification on obtient : $E(X) = (1 + \frac{1}{\lambda})$ et $\frac{E(X^2)}{2} = \frac{1}{2\lambda^2} + \frac{1}{\lambda} + 1 \Rightarrow E(X^2) = 2 + \frac{2}{\lambda} + \frac{1}{\lambda^2}$

<u>**Deuxième méthode**</u> :

$E(X) = G'(0) \quad E(X^2) = G''(0)$

$$G_X(t)'=\left(\frac{e^{\frac{1}{\lambda}t}}{1-t}\right)'=\frac{e^{\frac{1}{\lambda}t}\left[\frac{1}{\lambda}(1-t)+1\right]}{(1-t)^2}=\frac{e^{\frac{1}{\lambda}t}}{(1-t)^2}+\frac{e^{\frac{1}{\lambda}t}\left[\frac{1}{\lambda}\right]}{(1-t)}$$

$$\Rightarrow E(X)=G_X(0)'=\frac{1}{\lambda}+1$$

$$G_X(t)''=\left(\frac{e^{\frac{1}{\lambda}t}}{(1-t)^2}+\frac{e^{\frac{1}{\lambda}t}\left[\frac{1}{\lambda}\right]}{(1-t)}\right)'=\frac{e^{\frac{1}{\lambda}t}\left[\frac{1}{\lambda}(1-t)^2+2(1-t)\right]}{(1-t)^4}+\frac{e^{\frac{1}{\lambda}t}\left[\frac{1}{\lambda}^2(1-t)+\frac{1}{\lambda}\right]}{(1-t)^2}$$

$$\Rightarrow E(X^2)=G_X(0)''=\frac{1}{\lambda}^2+2\frac{1}{\lambda}+2$$

$$donc\ V(X)=E(X^2)-E(X)^2=\frac{1}{\lambda^2}+2\frac{1}{\lambda}+2-\left(\frac{1}{\lambda}+1\right)^2$$

$$=\frac{1}{\lambda^2}+2\frac{1}{\lambda}+2-\frac{1}{\lambda^2}-2\frac{1}{\lambda}-1=1$$

5) a) $E(\overline{X}_n)=E\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i}{n}\right)=\frac{\sum_{i=1}^{n}E(X_i)}{n}=\frac{n(\frac{1}{\lambda}+1)}{n}=\frac{1}{\lambda}+1$

b)D'après ce résultat on en déduit que $E(\overline{X}_n)-1=E(\overline{X}_n-1)=\frac{1}{\lambda}$ et que par suite

l'estimateur sans biais de $\frac{1}{\lambda}$ est $T=\overline{X}_n-1$

$$V(T)=V(\overline{X}_n-1)=V(\overline{X}_n)=V\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i}{n}\right)=\frac{\sum_{i=1}^{n}V(X_i)}{n^2}=\frac{n}{n^2}=\frac{1}{n}\Rightarrow\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0$$

Test un estimateur sans biais et $\lim_{n\to+\infty}V(T)=0$ donc il est convergent