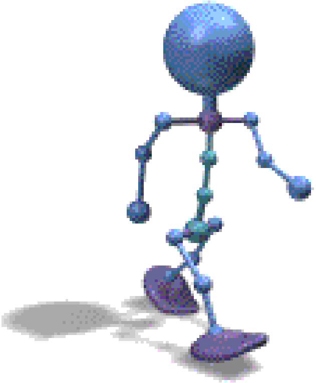
Lundi, 05 Octobre 2015

Optimisation – Licence 3 EF & DU – 2015/2016

Planche de TD N° 1



--- 11H00 → 12H30

Présentions, organisation des activités

Responsable de TD :	**NGANMENI Zéphirin** Etudiant en fin de thèse, UCP nganmeni@gmail.com
Horaire de TD :	Lundi, 11H00 – 12H30
Nombre de Séances :	10 Séances Du 28/09/2015 au 07/12/2015
Proportion CC– Examen :	A définir…
Dates des compositions :	A définir…

Exercice 2

$$\text{Soit } f(x,y) = \frac{(xy)^{1/2}}{(1-x^2)(1-y^2)}$$

1. Déterminer le domaine de définition D_f de f.
2. Représenter le domaine de définition D_f de f.
3. D_f est-il un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}^2$?
4. D_f est-il un sous-ensemble fermé de $\mathbb{R}^2$?

Solution exercice 2

$$f(x,y)=\frac{(xy)^{1/2}}{(1-x^2)(1-y^2)}$$

Déterminons le domaine de définition D_f de f.

Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $(x,y)\ \in D_f \Leftrightarrow \begin{cases}(1-x^2)(1-y^2)\neq 0 & et\\ xy\geq 0\end{cases}$

$(1-x^2)(1-y^2)=0\quad 1-x^2=0\ ou\ 1-y^2=0$

$\Leftrightarrow\ x=1\ ou\ x=-1\ ou\ y=1\ ou\ y=-1$

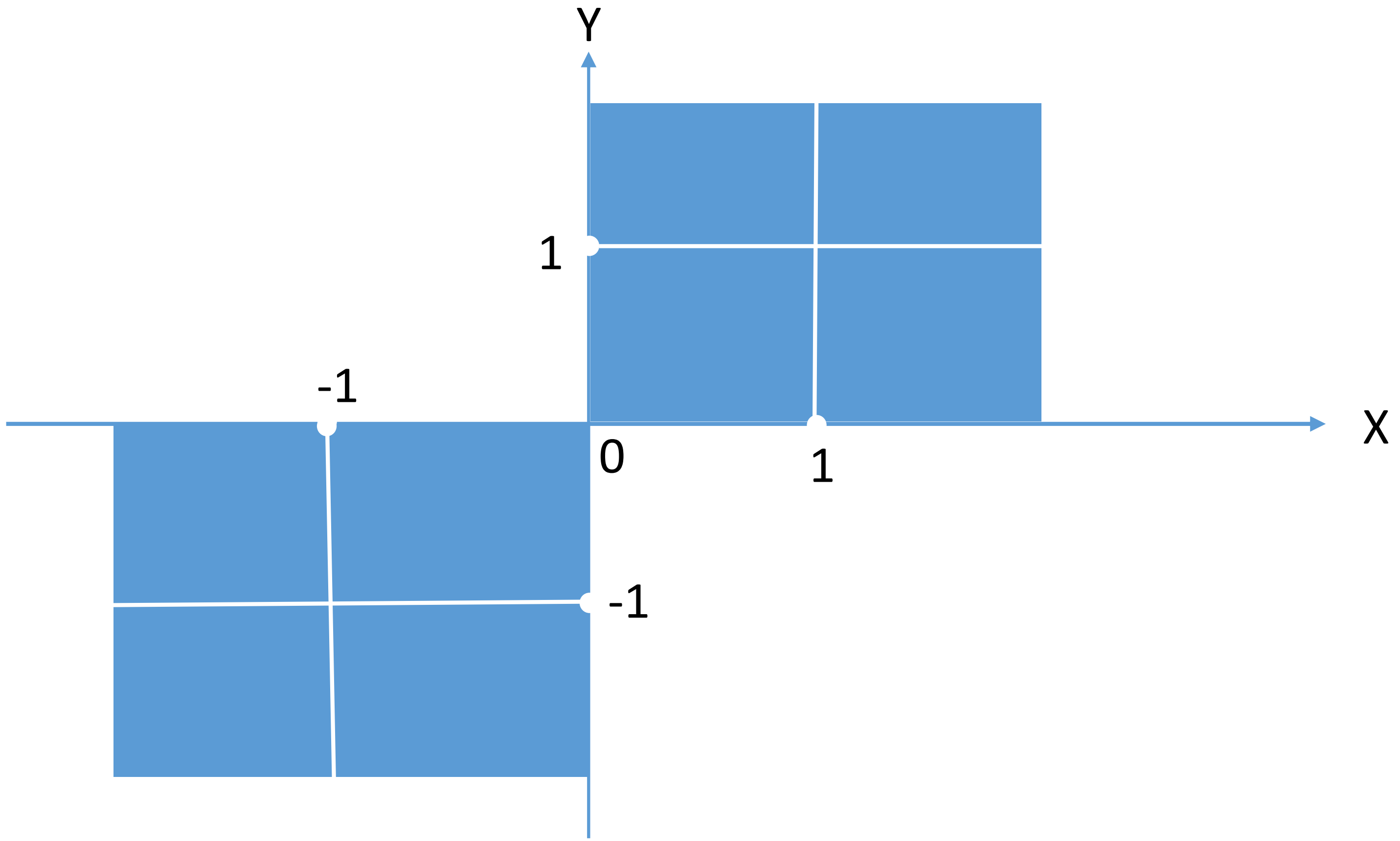
$xy\geq 0\ \Leftrightarrow x\geq 0\ et\ y\geq 0\ ou\ x\leq 0\ et\ y\leq 0$

$$\boxed{D_f=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: x\neq 1, x\neq -1, y\neq 1, y\neq -1\ et\ xy\geq 0\}}$$

Solution exercice 2

$$\boxed{D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x \neq 1, x \neq -1, y \neq 1, y \neq -1 \; et \; xy \geq 0\}}$$

Représentation de D_f



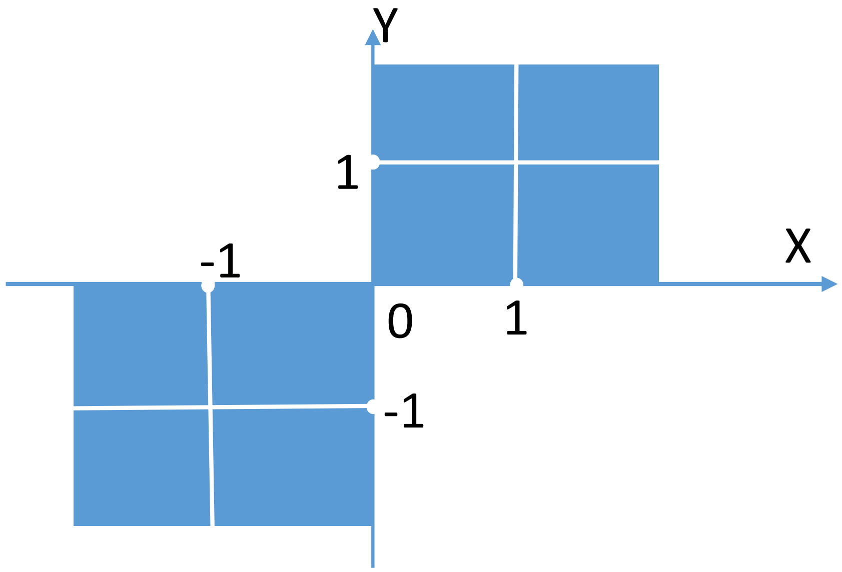
Solution exercice 2

D_f est-il un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}^2$

Rappel du cours

$A \subseteq \mathbb{R}^n$ est un ouvert si et seulement si $\forall X \in A, \exists r > 0 : \mathcal{B}_O^{d_2}(X, R) \subseteq A$

$A \subseteq \mathbb{R}^n$ est un fermé si et seulement si A^C est un ouvert



D_f n'est pas un ouvert car pour $O \in D_f, \nexists r > 0 :$

$$\mathcal{B}_O^{d_2}(O, r) \subseteq D_f$$

D_f^C n'est pas un ouvert car pour $X(1,1) \in D_f^C, \nexists r > 0 :$

$$\mathcal{B}_O^{d_2}(X, r) \subseteq D_f^C$$

Donc D_f n'est ni un ouvert, ni un fermé.

Exercice 3

Soit $f(x,y) = \dfrac{\sqrt{x}\sqrt{-y}e^{xy}}{(x-y)(y-x)(1-x^2-y^2)}$

1. Déterminer le domaine de définition D_f de f.

2. Représenter le domaine de définition D_f de f.

3. D_f est-il un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}^2$?

4. D_f est-il un sous-ensemble fermé de $\mathbb{R}^2$?

Solution exercice 3

Soit $f(x,y) = \dfrac{\sqrt{x}\sqrt{-y}e^{xy}}{(x-y)(y-x)(1-x^2-y^2)}$

Déterminer le domaine de définition D_f de f.

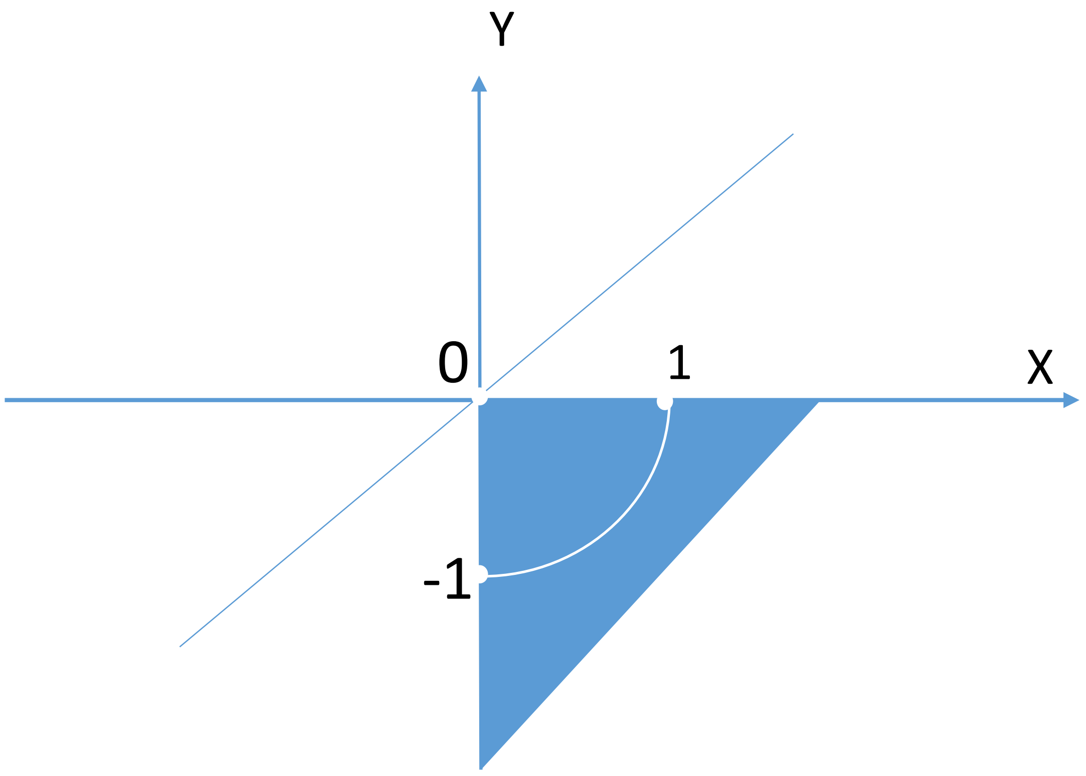
Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $(x,y) \in D_f \Leftrightarrow \begin{cases} (x-y)(y-x)(1-x^2-y^2) \neq 0 \\ x \geq 0 \\ -y \geq 0 \end{cases}$

$$\boxed{D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x \geq 0, y \leq 0, x \neq y \ \ et\ x^2 + y^2 \neq 1\}}$$

Solution exercice 3

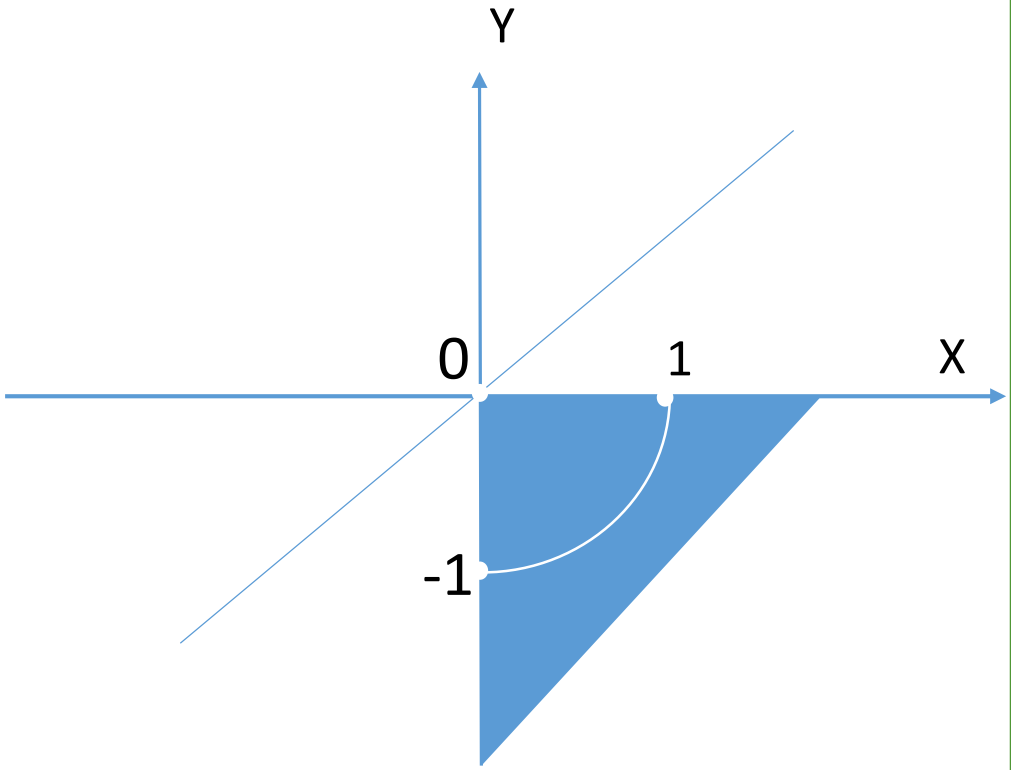
$$D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x \geq 0, y \leq 0, x \neq y\ \ et\ x^2 + y^2 \neq 1\}$$

Représentation graphique du domaine



Solution exercice 3

D_f est-il un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}^2$



D_f n'est pas un ouvert car pour $X\left(\frac{1}{2},0\right) \in D_f, \nexists r > 0$:

$$\mathcal{B}_O^{d_2}(X,r) \subseteq D_f$$

D_f^C n'est pas un ouvert car pour $O(0,0) \in D_f^C, \nexists r > 0$:

$$\mathcal{B}_O^{d_2}(O,r) \subseteq D_f^C$$

Donc D_f n'est ni un ouvert, ni un fermé.

Exercice 4

Soit $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 1}\ln(x^3 - y)$

1. Déterminer le domaine de définition D_f de f.

2. Représenter le domaine de définition D_f de f.

3. D_f est-il un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}^2$?

4. D_f est-il un sous-ensemble fermé de $\mathbb{R}^2$?

Solution exercice 4

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 1}\,\ln(x^3 - y)$$

Déterminer le domaine de définition D_f de f.

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $(x, y) \in D_f \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 - 1 \geq 0 \\ x^3 - y > 0 \end{cases}$

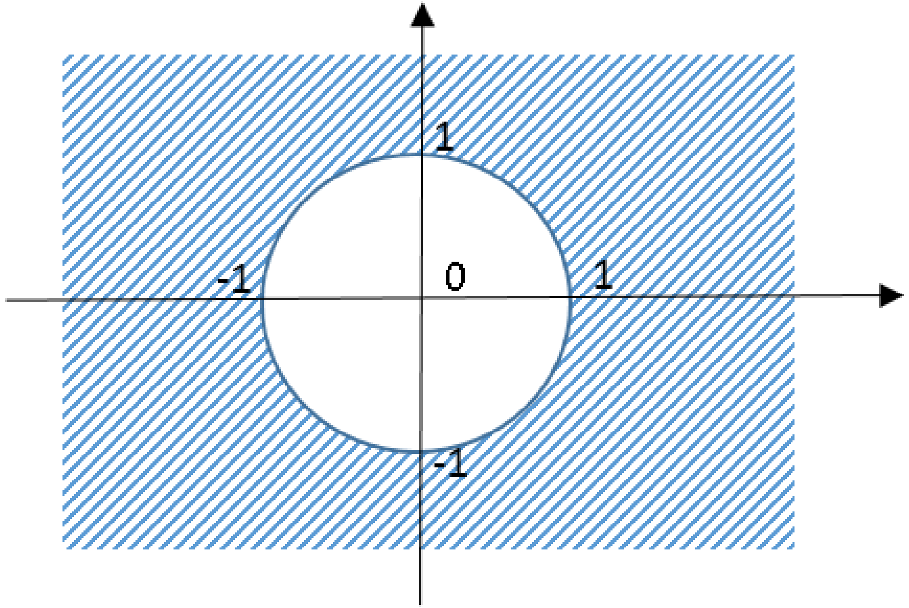
$$\boxed{D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \geq 1 \; et \; y < x^3\}}$$

Solution exercice 4

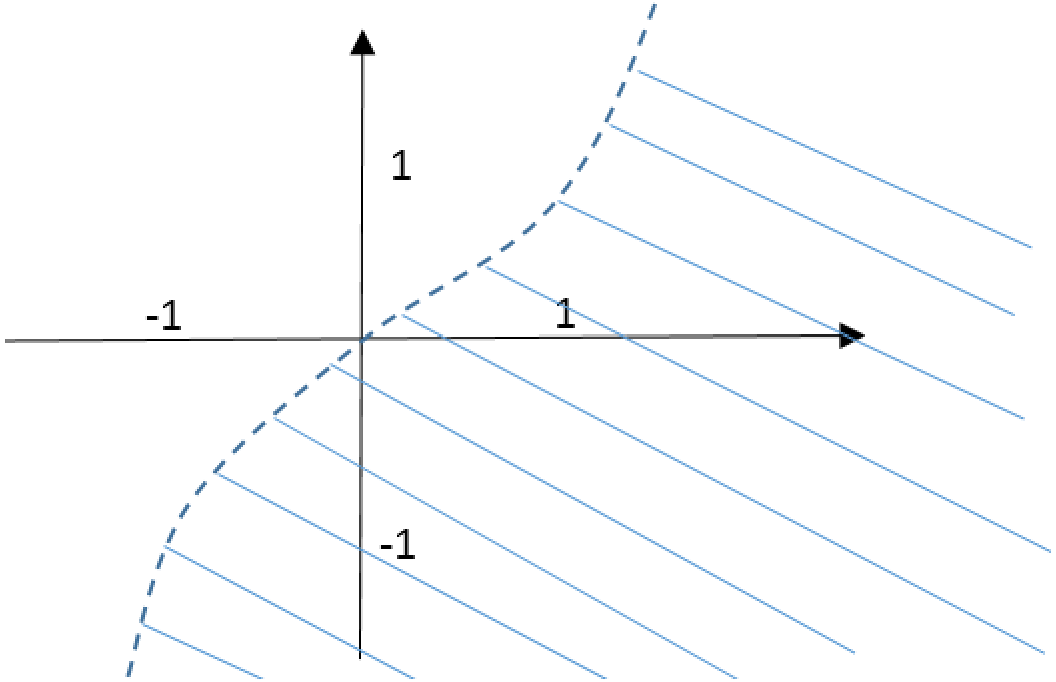
$$\boxed{D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ x^2 + y^2 \geq 1 \ et\ y < x^3\}}$$

Représenter le domaine de définition D_f de f

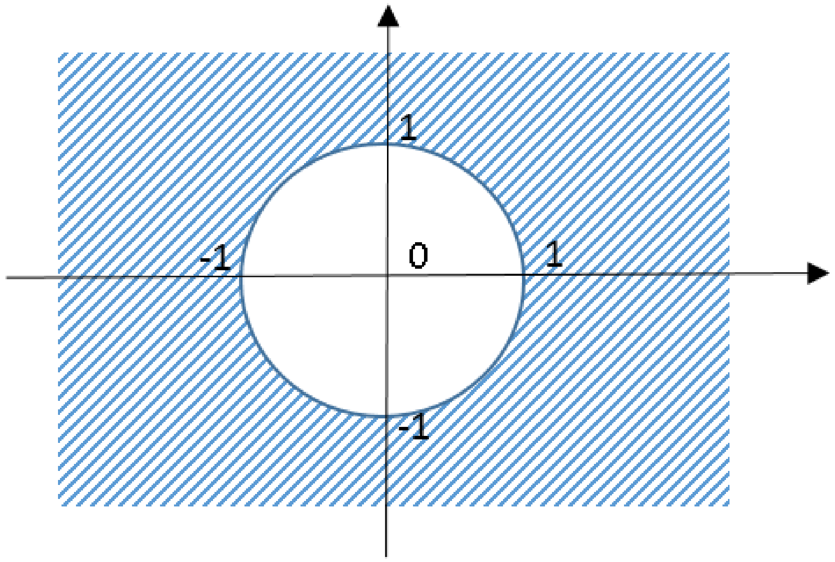
$$x^2 + y^2 \geq 1$$

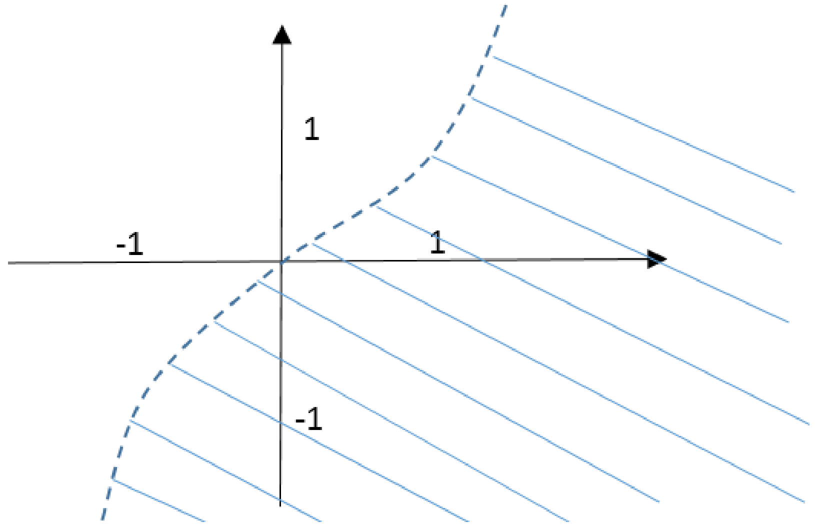


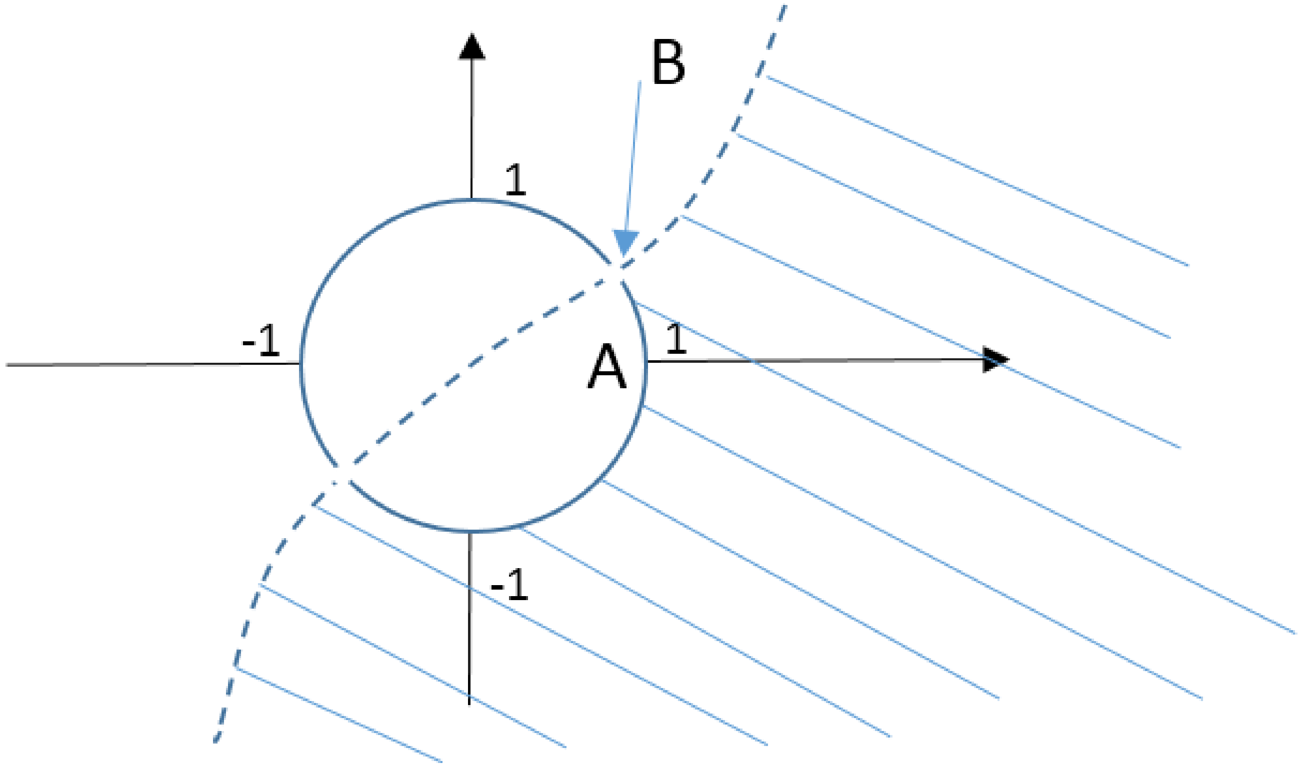
$$y < x^3; \quad (f(x) = x^3)$$



Solution exercice 4

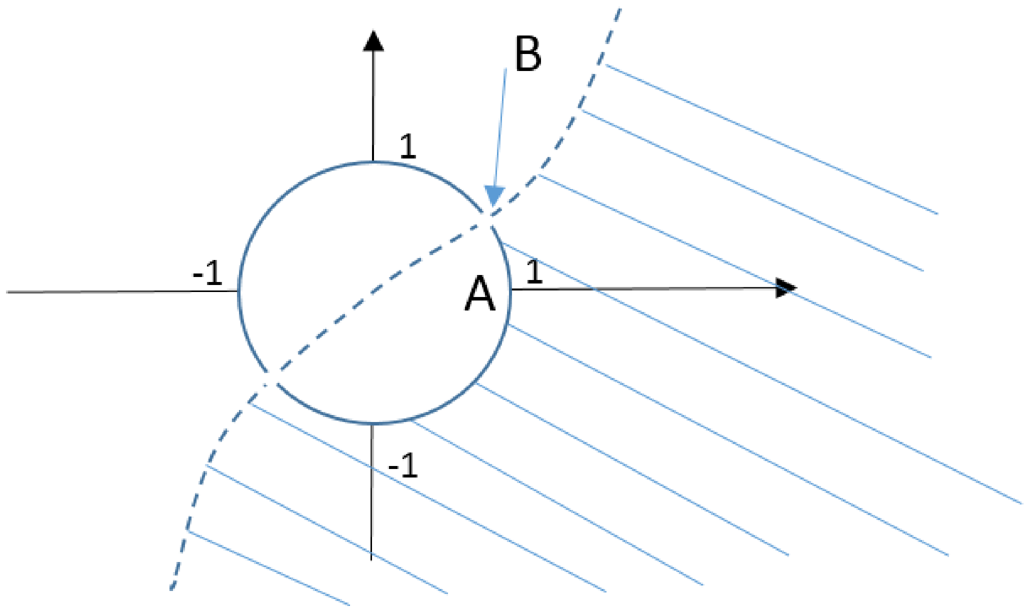






Solution exercice 4

D_f est-il un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}^2$



D_f n'est pas un ouvert car pour $A(1,0) \in D_f, \nexists r > 0$:

$$\mathcal{B}_O^{d_2}(A,r) \subseteq D_f$$

D_f^C n'est pas un ouvert car pour $B \in D_f^C, \nexists r > 0$:

$$\mathcal{B}_O^{d_2}(O,r) \subseteq D_f^C$$

Donc D_f n'est ni un ouvert, ni un fermé.

Fin

Merci Pour Votre Attention