UNIVERSITÉ DE CERGY
U.F.R. Économie et Gestion

Licence d'Économie et Finance
L2 - S4

ALGÈBRE LINÉAIRE

Partiel Session 1 - Mai 2016 - 2h00

Les exercices sont indépendants et peuvent être traités dans l'ordre choisi par le candidat.
Il sera tenu compte du soin apporté à la rédaction.
CALCULATRICES INTERDITES
LES PORTABLES DOIVENT ÊTRE DÉBRANCHÉS ET RANGÉS.

Exercice 1 - 3 points

Résoudre le système suivant en fonction du paramètre réel m :

$$\begin{cases} x + y + mz = m \\ x + my - z = 1 \\ x + y - z = 1 \end{cases}$$

Exercice 2 - 3 points

On considère les trois vecteurs de $\mathbb{R}^4$ suivant : $u_1 = (1;-2;3;2)$, $u_2 = (0;-1;1;3)$, et $u_3 = (-2;1;-3;5)$

1. On note $\mathcal{F} = (u_1, u_2, u_3)$. $\mathcal{F}$ est-elle une famille libre ? Sinon en extraire une famille libre $\mathcal{F}'$ de cardinal maximal.
2. Compléter $\mathcal{F}'$ en une base de $\mathbb{R}^4$.

Exercice 3 - 6 points

Soit f l'application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par :

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ -y+z \\ x-y+2z \end{pmatrix}$$

1. Démontrer que f est une application linéaire.
2. Donner la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Donner le rang de $\mathcal{M}_f$
3. Déterminer Ker$f$ et Imf : vous en donnerez des équations caractéristiques ainsi qu'une base.
4. A-t-on Ker$f \oplus$ Im$f = \mathbb{R}^3$? Justifier.

Exercice 4 - 3 points

Soit φ l'application définie sur $\mathbb{R}_3[X]$ par $\varphi(P(X)) = (X+1)P'(X)$, où $P'(X)$ désigne le polynôme dérivé de $P(X)$.

Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$.

Donner la matrice de φ dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$.

Déterminer le noyau puis l'image de φ : on donnera une base de ces sous-espaces de $\mathbb{R}_3[X]$.

Exercice 5 - 5 points

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3 et $\mathcal{B} = \{e_1,\ e_2,\ e_3\}$ une base de E. Soit f l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 4 & 1 & -2 \\ 6 & 3 & -4 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer le rang de A.
2. Calculer le polynôme caractéristique de f, en déduire une condition nécessaire et suffisante pour que A soit diagonalisable.
3. Montrer que A est diagonalisable, puis déterminer une base de vecteurs propres de A. Donner la matrice de f dans cette base.

UNIVERSITÉ DE CERGY **Licence d'Économie et Finance**
U.F.R. Economie et Gestion **L2 - S4**

ALGÈBRE LINÉAIRE

Partiel Session 1 - Mai 2016 - Corrigé

Exercice 1 - 3 points

Résoudre le système suivant en fonction du paramètre réel m :

(0,5 pt) $\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & mz & = & m \\ x & + & my & - & z & = & 1 \\ x & + & y & - & z & = & 1 \end{array}\right.$

$$\iff \left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & mz & = & m \\ & & (m-1)y & - & (1+m)z & = & 1-m \; (L_2 \leftarrow L_2 - L_1) \\ & & & - & (1+m)z & = & 1-m \; (L_3 \leftarrow L_3 - L_1) \end{array}\right.$$

• **(0,5 pt)** Si $m=-1$: le système devient :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & - & z & = & -1 \\ & - & 2y & & & = & 2 \\ & & & & 0z & = & 2 \end{array}\right.$$

La dernière équation n'a pas de solution, donc $\mathcal{S} = \emptyset$

• **(1 pt)** Si $m=1$: le système devient :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & 1 \\ & & & & -2z & = & 0 \\ & & & & -2z & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{ccccc} x & + & y & = & 1 \\ & & z & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x \in \mathbb{R} \\ y = 1-x \\ z = 0 \end{array}\right.$$

Donc $\mathcal{S} = \Big\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / \, y = 1-x \text{ et } z = 0 \Big\}$

• **(1 pt)** Si $m \neq 1$ et $m \neq -1$:

$$(S) \iff \left\{\begin{array}{ccc} x & = & m - y - mz \\ (m-1)y & = & 1-m+(1+m)z \\ z & = & -\dfrac{1-m}{1+m} \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x = \dfrac{2m}{1+m} \\ y = 0 \\ z = -\dfrac{1-m}{1+m} \end{array}\right.$$

Donc $\mathcal{S} = \Big\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / \, x = \dfrac{2m}{1+m} ; y = 0 \text{ et } z = -\dfrac{1-m}{1+m} \Big\}$

Exercice 2 - 3 points

On se donne les trois vecteurs de $\mathbb{R}^4$: $u_1 = (1;-2;3;2)$, $u_2 = (0;-1;1;3)$, et $u_3 = (-2;1;-3;5)$

1. • **1,5 point** Soit $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\alpha u_1 + \beta u_2 + \gamma u_3 = 0$. On a donc :

$$\left\{\begin{array}{ccccc} \alpha & & -2\gamma & = & 0 \\ -2\alpha & -\beta & +\gamma & = & 0 \\ 3\alpha & +\beta & -3\gamma & = & 0 \\ 2\alpha & +3\beta & +5\gamma & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{ccccc} \alpha & & -2\gamma & = & 0 \\ & -\beta & -3\gamma & = & 0 \\ & \beta & +3\gamma & = & 0 \\ & 3\beta & +9\gamma & = & 0 \end{array}\right. \iff \beta = -3\gamma \text{ et } \alpha = 2\gamma$$

$\mathcal{F}$ est donc une famille liée (par exemple : $2u_1 - 3u_2 + u_3 = 0$)

Soit $\mathcal{F}' = (u_1, u_2)$. Montrons que $\mathcal{F}'$ est libre. Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\alpha u_1 + \beta u_2 = 0$

On a donc : $\left\{\begin{array}{rrcl} \alpha & & = & 0 \\ -2\alpha & -\beta & = & 0 \\ 3\alpha & +\beta & = & 0 \\ 2\alpha & +3\beta & = & 0 \end{array}\right. \iff \alpha = \beta = 0$ et $\mathcal{F}'$ est libre

2. • **1,5 point** Notons $\mathcal{F}'' = (u_1, u_2, e_1, e_2)$ où $e_1 = (1; 0; 0; 0)$ et $e_2 = (0; 1; 0; 0)$
Montrons que $\mathcal{F}''$ est libre. Soit $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{R}^4$ tel que $\alpha u_1 + \beta u_2 + \gamma e_1 + \delta e_2 = 0$.

On a donc : $\left\{\begin{array}{rrrrcl} \alpha & & +\gamma & & = & 0 \\ -2\alpha & -\beta & & +\delta & = & 0 \\ 3\alpha & +\beta & & & = & 0 \\ 2\alpha & +3\beta & & & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rrrrcl} \alpha & & +\gamma & & = & 0 \\ & -\beta & +2\gamma & +\delta & = & 0 \\ & \beta & -3\gamma & & = & 0 \\ & 3\beta & -2\gamma & & = & 0 \end{array}\right.$

$\iff \left\{\begin{array}{rrrrcl} \alpha & & +\gamma & & = & 0 \\ & -\beta & +2\gamma & +\delta & = & 0 \\ & & -\gamma & +\delta & = & 0 \\ & & 4\gamma & +3\delta & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rrrrcl} \alpha & & +\gamma & & = & 0 \\ & -\beta & +2\gamma & +\delta & = & 0 \\ & & -\gamma & +\delta & = & 0 \\ & & & 7\delta & = & 0 \end{array}\right.$

$\iff \alpha = \beta = \gamma = \delta = 0$

Ainsi $\mathcal{F}''$ est libre. De plus $\text{Card}(\mathcal{F}'') = 4 = \text{Dim}\,\mathbb{R}^4$: $\mathcal{F}''$ est une base de $\mathbb{R}^4$.
Remarque : On pouvait également raisonner sur le déterminant formé par les vecteurs colonnes u_1, u_2, e_1 et e_2.

Exercice 3 - 6 points

Soit f l'application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par :

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ -y+z \\ x-y+2z \end{pmatrix}$$

1. • **1 point** Soient $u = (x, y, z)$ et $v = (x', y', z')$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.
On a $\lambda.u + v = \begin{pmatrix} \lambda x + x' \\ \lambda y + y' \\ \lambda z + z' \end{pmatrix}$

On a alors $f(\lambda u + u') = \begin{pmatrix} (\lambda x + x') + (\lambda y + y') \\ -(\lambda y + y') + (\lambda z + z') \\ \lambda.x + x' - (\lambda y + y') + 2(\lambda z + z') \end{pmatrix} = \cdots$

$= \lambda \begin{pmatrix} x+y \\ -y+z \\ x-y+2z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x'+y' \\ -y'+z' \\ x'-y'+2z' \end{pmatrix} = \lambda f(u) + f(v)$

f est donc une application linéaire.

2. • **1,5 point** $\mathcal{M}_f = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

$\det\mathcal{M}_f = 0$ donc $\text{rang} f < 3$. On peut facilement extraire une matrice de format $2 * 2$ de déterminant non nul, par exemple $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Donc $\text{rang} f = 2$

3. • **3 points** D'après ce qui précède, Dim Ker$f = 1$ et Dim Im$f = 2$

   • **(1 point)** Pour Ker$f$: Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

$$u \in \text{Ker}f \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rrrcl} x & +y & & = & 0 \\ & -y & +z & = & 0 \\ x & -y & +2z & = & 0 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rrrcl} x & +y & & = & 0 \\ & -y & +z & = & 0 \\ & -2y & +2z & = & 0 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x \in R \\ y = -x \\ z = -x \end{array}\right.$$

   Ainsi, Kerf$f = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / \, y = z = -x \right\} = Vect\{(1; -1; -1)\}$

   • **(2 points)** Pour Imf : on sait que Imf est engendré par les images des vecteurs d'une base de $\mathbb{R}^3$: donc par exemple $\mathcal{G} = \{u_1 = (1; 0; 1), u_2 = (1; -1; -1), u_3 = (0; 1; 2)\}$ est une famille génératrice de Imf. On sait d'après les calculs sur le rang de $\mathcal{M}_f$ que cette famille est liée et que $\mathcal{B} = \{u_1, u_2\}$ est libre. C'est donc une base de Imf.
   Soit $(x', y', z') \in \mathbb{R}^3$

$$u \in \text{Im}f \Longleftrightarrow \exists (u, y, z) \in \mathbb{R}^3 / \, f(u) = u' \Longleftrightarrow \exists (u, y, z) \in \mathbb{R}^3 / \left\{\begin{array}{rrrcl} x & +y & & = & x' \\ & -y & +z & = & y' \\ x & -y & +2z & = & z' \end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow \exists (u, y, z) \in \mathbb{R}^3 / \left\{\begin{array}{rrrcc} x & +y & & = & x' \\ & -y & +z & = & y' \\ & -2y & +2z & = & z' - x' \end{array}\right.$$

   Ce système a (au moins) une solution si et seulement si $(z' - x') = 2y' \Longleftrightarrow x' + 2y' - z' = 0$
   Ainsi, Im$f = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / \, x + 2y - z = 0 \right\}$

4. • **0,5 point** On remarque que Ker $f = Vect\{(1; -1; -1)\}$ et $(1; -1; -1) \in$Imf. Ainsi Ker$f$ et Imf ne sont pas en somme directe.

Exercice 4 - 3 points

Soit φ l'application définie sur $\mathbb{R}_3[X]$ par $\varphi(P(X)) = (X + 1)P'(X)$.

• **(0,5 point)** Soit $P(X) \in \mathbb{R}_3[X]$, alors $P'(X) \in \mathbb{R}_2[X]$ et $\varphi(P(X)) = (X + 1)P'(X) \in \mathbb{R}_3[X]$.

• **(0,5 point)** Soient $P(X)$ et $Q(X)$ deux polynômes de $\mathbb{R}_3[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda.P(X) + Q(X)) &= (X + 1)(\lambda.P(X) + Q(X))' = (X + 1)\left(\lambda.P'(X) + Q'(X)\right) \\ &= \lambda.(X + 1)P'(X) + (X + 1)Q'(X) = \lambda.\varphi(P(X)) + \varphi(Q(X)) \end{aligned}$$

: donc φ est une application linéaire de $\mathbb{R}_3[X]$ dans lui-même, c'est un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$.

• **(1 point)** La matrice de φ dans la base canonique $\left\{1, X, X^2, X^3\right\}$ est obtenue en calculant les images des « vecteurs » de la base canonique : $\varphi(1) = 0$, $\varphi(X) = X + 1$, $\varphi(X^2) = 2X^2 + 2X$ et $\varphi(X^3) = 3X^3 + 3X^2$. On a donc :

$$M_\varphi = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

• **(0,5 point)** Le rang de M_φ est clairement 3 et Ker$\varphi = \mathbb{R} = vect(1)$

• **(0,5 point)** $\text{Dim}\,\text{Im}\varphi = \text{Dim}\,\mathbb{R}_3[X] - 1 = 3$. De plus Im$\varphi$ est engendrée par les images des vecteurs d'une base, donc Im$\varphi = vect\left(X + 1, X^2 + X, X^3 + X^2\right)$

Exercice 5 - 5,5 points

1. • **0,5 point** On a : $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 4 & 1 & -2 \\ 6 & 3 & -4 \end{vmatrix} = 0$, donc $\mathrm{rg}A \leq 2$. De plus, $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -3$ donc $\mathrm{rg}A = 2$

2. • **2 points**

   • **(1 pt)** Le polynôme caractéristique de f est

   $$P(x) = \begin{vmatrix} 1-x & 1 & -1 \\ 4 & 1-x & -2 \\ 6 & 3 & -4-x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-x & 1 & 0 \\ 4 & 1-x & -1-x \\ 6 & 3 & -1-x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-x & 1 & 0 \\ -2 & -2-x & 0 \\ 6 & 3 & -1-x \end{vmatrix}$$
   $$= (-1-x)((1-x)(-2-x)+2) = -(1+x)(x^2+x) = -x(x+1)^2$$

   A possède deux valeurs propres : $\lambda_1 = 0$ d'ordre de multiplicité 1 et $\lambda_2 = -1$ d'ordre de multiplicité 2.

   • **(1 pt)** : $P(X)$ étant scindé dans $\mathbb{R}[X]$, A est donc diagonalisable si et seulement si le sous-espace propre associé à la valeur propre $\lambda_2 = -1$ est de dimension 2

3. • **3 points**

   • **(1 pt)** Pour $\lambda_1 = 0$: le sous espace propre associé à $\lambda_1 = 0$ est $\mathrm{Ker}f$:
   On sait que Dim $\mathrm{Ker}f = 3 - 2 = 1$. De plus, soit $X = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

   $$X \in Kerf \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{cccc} x & +y & -z & = 0 \\ 4x & +y & -2z & = 0 \\ 6x & +3y & -4z & = 0 \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{cccc} x & +y & -z & = 0 \\ & -3y & +2z & = 0 \\ & -3y & +2z & = 0 \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} z \in \mathbb{R} \\ x = \dfrac{1}{3}z \\ y = \dfrac{2}{3}z \end{array} \right.$$

   Donc $\mathrm{Ker}f = vect \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

   • **(1 pt)** Pour $\lambda_2 = -1$: soit $E_{-1} = Ker(A + I_3)$.

   $A + I_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & -2 \\ 6 & 3 & -3 \end{pmatrix}$: cette matrice est de rang 1 car $c_1 = 2c_2 = -2c_3$

   $E_{-1} = vect \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$.

   (0,5 pt) $\mathrm{Dim}E_{-1} = 2$ donc f est diagonalisable dans la base $\mathcal{B}' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$

   (0,5 pt) De plus, $Mat_{\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$