Université de Cergy-Pontoise   Année Universitaire 2013-2014
UFR Economie et Gestion

THEORIE DES JEUX

LICENCE ECONOMIE ET GESTION

Semestre 1

L3

Session de Décembre 2013

(Durée : 2H00)

Toutes les réponses devront être justifiées. Calculatrice programmable interdite.

Exercice 1 (6 points) On considère un bien produit par 2 entreprises. L' entreprise i ($i = 1, 2$) décide uniquement du niveau de sa production q_i. La prise de décisions est simultanée. Toute la production est vendue au même prix, qui est determiné par la fonction de demande inverse $P(Q)$ avec $Q = q_1 + q_2$. La fonction de demande inverse est égale à:

$$P(Q) = \begin{cases} 1 - Q, & \text{si } Q \leq 1; \\ 0, & \text{si } Q > 1. \end{cases}$$

Le profit pour l'entreprise i est égal à:

$$\Pi_i(q_1, q_2) = q_i P(Q) - C_i(q_i).$$

Les entreprises sont asymétriques. En effet, les coûts sont deux fois moins élevés pour l'entreprise 1 que pour l'entreprise 2. De manière formelle, le coût pour l'entreprise 1 de produire q_1 unités de bien est égal à $C_1(q_1) = q_1^2$, alors que celui de l'entreprise 2 est égal à $C_2(q_2) = q_2$.

Le coût pour l'entreprise i de produire q_i unités de bien est égal à $C_i(q_i) = q_i^2$.

1. Décrire le jeu: joueurs, actions, paiements. Ecrire le profit des entreprises en fonction de q_1 et de q_2.
2. Calculer les fonctions de meilleure réponse.
3. Calculer l' équilibre de Nash et le prix à l'équilibre.

Solution.
I) Description du jeu: joueurs, actions, paiements. (2points)

2 Joueurs: {Entreprise 1, Entreprise 2}.

Actions pour l'entreprise i ($i = 1, 2$) {Quantité $q_i \geq 0$}.

Paiements: Dans ce contexte, les paiements des entreprises sont équivalents à leurs profits.

Profit de l'entreprise 1.

Par définition, le profit de l'entreprise 1 est égal à Π_1 qui dépendre des quantités produites par les deux entreprises, q_1 et q_2. On a donc:

$$\Pi_1(q_1, q_2) = q_1 P(Q) - C(q_1).$$

La fonction de prix $P(Q)$ dépend de la valeur de Q. On a donc deux cas: si $Q \leq 1$ et $Q > 1$.

Cas 1. $Q \leq 1$

L'énoncé nous dit que si $Q \leq 1$, $P(Q) = 1 - Q$, ce qui nous mène à écrire:

$$\Pi_1(q_1, q_2) = q_1(1 - Q) - C(q_1).$$

Par définition, on a $Q = q_1 + q_2$, ce qui implique

$$\begin{aligned}
\Pi_1(q_1, q_2) &= q_1(1 - q_1 - q_2) - C(q_1) \\
&= q_1 - q_1^2 - q_1 q_2 - q_1^2 \\
&= (1 - q_2)q_1 - 2q_1^2
\end{aligned}$$

Cas 2. $Q > 1$

L'énoncé nous dit que si $Q > 1$, $P(Q) = 0$, ce qui nous mène à écrire:

$$\Pi_1(q_1, q_2) = q_1(0) - C(q_1) = -C(q_1) = -q_1^2.$$

Conclusion .

Le profit de l'entreprise 1 est égal à

$$\Pi_1(q_1, q_2) = \begin{cases} (1 - q_2)q_1 - 2q_1^2, & \text{si } Q \leq 1; \\ -q_1^2, & \text{si } Q > 1. \end{cases}$$

et pour la firme 2, on a
idem

II) Fonctions de meilleure réponse. (2points)

Meilleure réponse pour l'entreprise 1.

Par définition, la meilleure réponse pour l'entreprise 1 est la quantité qu'elle a intérêt à produire pour toute quantité q_2 produite par l'entreprise 2.

Cas 1. $Q \leq 1$

Dans la première partie, on a calculé que

$$\Pi_1(q_1, q_2) = (1 - q_2)q_1 - 2q_1^2.$$

L'entreprise 1 maximise son profit en choisissant son action q_1 (qu'elle peut modifier), laissant la quantité q_2 comme fixe (qu'elle ne peut pas modifier).

Le maximum du profit est atteint lorsque la dérivée par rapport à la quantité q_1 s'annule, c'est à dire:

$$\frac{\partial}{\partial q_1}\Pi_1(q_1, q_2) = 0.$$

Or,

$$\frac{\partial}{\partial q_1}\Pi_1(q_1, q_2) = (1 - q_2) - 4q_1$$

Ce qui implique

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial q_1}\Pi_1(q_1, q_2) = 0 &\Longleftrightarrow (1 - q_2) - 4q_1 = 0\\ &\Longleftrightarrow (1 - q_2) = 4q_1\\ &\Longleftrightarrow q_1 = \frac{1}{4}(1 - q_2)\end{aligned}$$

Pour toute quantité q_2 produite par l'entreprise 2, l'entreprise 1 a intérêt à produire $q_1 = \frac{1}{4}(1 - q_2)$, sous la contrainte $Q \leq 1 \Longleftrightarrow q_1 + q_2 \leq 1$.

Cas 2. Q **>1**

Dans la première partie, on a calculé que

$$\Pi_1(q_1, q_2) = -q_1^2.$$

ce qui implique que le maximum du profit est atteint pour $q_i = 0$, sous la contrainte $Q > 1 \Longleftrightarrow q_1 + q_2 > 1$.

Conclusion

La meilleure réponse pour l'entreprise 1 est égale à

$$m_1(q_2) = \begin{cases} \frac{1}{4}(1 - q_2), & \text{si } q_2 \leq 1 - q_1; \\ 0, & \text{si } q_2 > 1 - q_1. \end{cases}$$

et pour la firme 2, on a
Idem pour 2

III) L'équilibre du jeu. (2 points)

A l'équilibre, tous les joueurs sont en meilleure réponse par rapport aux actions des autres joueurs:

$$\begin{cases} q_1 = m_1(q_2) \quad et \\ q_2 = m_2(q_1). \end{cases}$$

Or,

$$q_1 = m_1(q_2) \Longleftrightarrow q_1 = \frac{1}{4}(1 - q_2).\ (A)$$

et

$$q_2 = m_2(q_1) \iff q_2 = \frac{1}{4}(1 - q_1).\ (B)$$

On a donc deux équations avec deux inconnues. En remplaçant l'expression de q_1 dans l'équation (A) dans l'équation (B), on obtient

et donc la solution est $q_2 = \frac{3}{15}$ et $q_1 = \frac{3}{15}$.

Conclusion

L'équilibre du jeu est donc $(q_1 = 3/15, q_2 = 3/15)$.

La quantité totale produite est de $Q = q_1 + q_2 = 6/15 = 2/5$.

Le prix d'équilibre est égal à $P(Q) = 1 - 2/5 = 3/5$.

Exercice 2 (4 points) Considérez le jeu représenté par la matrice de gain suivante :

	G	H
E	x, x	$-5, 2$
F	$2, -5$	y, y

1) Quelles conditions doit-on poser sur x et y pour que (E, G) soit un équilibre de Nash et le seul?

2) Quelles conditions doit-on poser sur x et y pour que (F, H) soit un équilibre de Nash non pareto optimal?

3) Quelles conditions doit-on poser sur x et y pour qu'il n'y ait pas d'équilibre de Nash en stratégies pures?

4) Soit $x = 0$ et $y = 3$. On suppose que le jeu est répété 3 fois. Déterminez l'équilibre de Nash parfait en sous-jeux en expliquant votre démarche.

Solution.

1)x>2 et y<-5

2) x>y et y>-5

3) si x<2 pour que EG ne soit pas un equilibre

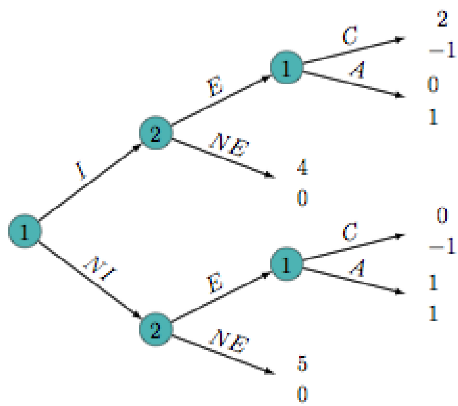
Si y<-5 pour que HF ne soit pas un equilibre

Mais selon ces deux conditions on a deux EN. Donc pas possible.

4) Jouer HF a tous les coups.

Exercice 3 (5 points)

Soit le jeu à deux joueurs suivant :



1) Représentez ce jeu sous forme normale.
2) Déterminez tous les équilibres de Nash en stratégie pures de ce jeu.
3) Déterminez les sous-jeux du jeu. Rappelez la définition d'un sous-jeux.
4) Donnez la définition d'un équilibre de Nash parfait en sous-jeux.
5) Déterminez le (ou les) équilibre(s) en sous-jeux parfait(s) en expliquant votre démarche.

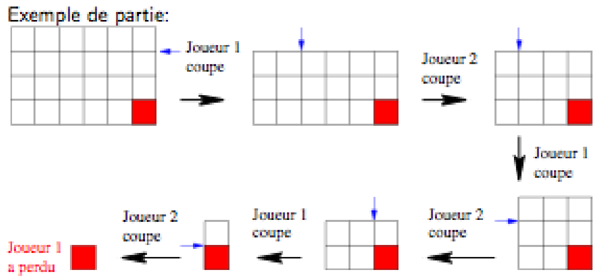
Solution:

$1\backslash 2$	(E,E)	(E,NE)	(NE,E)	(NE,NE)
(I,C,C)	$(2,-1)$	$(2,-1)$	$(4,0)$	$(4,0)$
(I,C,A)	$(2,-1)$	$(2,-1)$	$(4,0)$	$(4,0)$
(I,A,C)	$(0,1)$	$(0,1)$	$(4,0)$	$(4,0)$
(I,A,A)	$(0,1)$	$(0,1)$	$(4,0)$	$(4,0)$
(NI,C,C)	$(0,-1)$	$(5,0)$	$(0,-1)$	$(5,0)$
(NI,C,A)	$(1,1)$	$(5,0)$	$(1,1)$	$(5,0)$
(NI,A,C)	$(0,-1)$	$(5,0)$	$(0,-1)$	$(5,0)$
(NI,A,A)	$(1,1)$	$(5,0)$	$(1,1)$	$(5,0)$

1)
2) En :
3) 5
4) equilibre de nash qui elimene les menaces non credibles.
5)

Exercice 4 (2 points... qui demandent un peu d'astuce)

Considèrons deux joueur, le Joueur 1 et le joueur 2 qui doivent se partager une plaquette de chocolat. Chaque joueur à son tour coupe une partie de la tablette suivant une coupe verticale ou horizontale. Le jeu est séquentielle. Le joueur 1 coupe la tablette en premier, puis le joueur 2, ... Celui qui se voit forcé de manger le carreau de chocolat en bas à droite de la tablette (carreau qui est empoisonné) a perdu.



Supposons que la plaquette de chocolat soit de forme carré au départ. Vous qui avez suivi assidûment le cours de théorie des jeux, vous avez la reflexion suivante : "Il est injuste ce jeu, c'est toujours le même joueur qui gagne." Montrez alors quel joueur gagne et quelle stratégie le gagnant emploie.

Solution:
Stratégie gagnante: toujours couper de manière à ce que la plaquette de chocolat restante soit carrée. Si la plaquette est carrée au départ, le Joueur 2 gagne.

Question de cours (3 points)
1) Donnez un exemple d'un jeu simple à quatre joueur avec un joueur ayant un "Droit de véto".
2) Quelle est la valeur de Shapley de chaque joueur dans un jeu simple à trois joueurs, avec un des joueurs qui est dictateur.
3) Donnez la définition de l'axiome de Symétrie.

Solution:
1) Une coalition est gagnante ssi elle comprend au moins 2 membres, dont le joueur 2

$$\begin{cases} v(1) = v(2) = v(3) = v(13) = 0 \\ v(12) = v(23) = v(123) = 1 \end{cases}$$

2)Dictateur (joueur 2) :
EFF + NUL $\Rightarrow \varphi_1(N,v) = \varphi_3(N,v) = 0$ et $= \varphi_3(N,v) = 1$
3)**Axiome 2.** Symétrie (SYM).
Si i et j sont symétriques (substituts), i.e.,$v(S \bigcup \{i\}) = v(S \bigcup \{j\})\ \forall S \setminus i,j$
alors $\varphi_i(N,v) = \varphi_j(N,v)$