Année 2014-2015

UNIVERSITÉ DE CERGY

U.F.R. Économie & Gestion

LICENCE d'ÉCONOMIE et FINANCE / LICENCE de GESTION

Seconde année - Semestre 3

MATH 201 : PROBABILITÉS

Enseignant responsable : J. Stéphan

Documents pour l'étudiant

Chapitre I : Dénombrement

1 Quelques notions sur les ensembles

1.1 Généralités

Définition 1. *1. Un ensemble non vide E est une collection d'objets appelés* ***éléments*** *de l'ensemble. Si x est un élément de l'ensemble E, on note $x \in E$, dans le cas contraire on note $x \notin E$.*

2. Il existe un ensemble dit vide, noté $\emptyset$, qui ne contient aucun élément.

3. Lorsqu'un ensemble non vide E possède un nombre fini d'éléments, on appelle ***cardinal*** *ce nombre d'éléments. Dans ce cas, on le note Card(E). On dit que E est un ensemble fini s'il est de cardinal fini ou s'il est vide (dans ce cas on pose Card$(E) = 0$).*

4. On dit qu'un ensemble non vide F est un ***sous-ensemble ou une partie*** *d'un ensemble E, si tout élément appartenant à F appartient également à E. On note $F \subset E$. Dans le cas contraire, on note $F \not\subset E$. Par convention, l'ensemble vide est un sous-ensemble de tout ensemble E.*

On a donc $F \subset E \Leftrightarrow F = \emptyset$ ou $\forall x \in F,\ x \in E$.

Remarques :

1. Un sous-ensemble F est inclus dans E si et seulement si tous les éléments de F appartiennent à E, mais il suffit qu'un élément de F n'appartienne pas à E pour que F ne soit pas inclus dans E.
2. F est dit strictement inclus dans E, si F est inclus dans E et s'il existe un élément de E n'appartenant pas à F. On note $F \subsetneq E$.
3. Deux ensembles non vides E et F sont égaux si et seulement si E est inclus dans F **et** F est inclus dans E.
$$E = F \iff E \subset F \text{ et } F \subset E$$

Notations : Il y a deux façons de noter un ensemble :

a) **En extension**, lorsqu'on cite tous ses éléments.
Par exemple $E = \{2; 3; 5; 7; 11; 13; 17; 19\}$ est l'ensemble des nombres premiers inférieurs à 20.

b) **En compréhension,** lorsque l'ensemble est défini par une propriété.
Par exemple $E = \{x \in \mathbb{N} \ / \ 1 \leq x^2 \leq 1000\}$ est l'ensemble des entiers dont le carré est compris dans l'intervalle $[1; 1000]$.

Cas particulier : si a et b sont deux nombres entiers, $[\![a; b]\!]$ désigne l'ensemble des entiers de l'intervalle $[a; b]$. Par exemple, $[\![1; 7]\!] = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

Exercice 1

1. Donner l'ensemble des multiples de 9 de l'intervalle $[\![1; 100]\!]$ en extension.
2. Définir l'ensemble des nombres impairs en compréhension.

1.2 Ensemble des parties de E

Définition 2. *Soit E un ensemble. On appelle ensemble des parties de E l'ensemble dont les éléments sont les sous-ensembles (i.e. les parties) de E. Ce nouvel ensemble est noté $\mathcal{P}(E)$.*

Remarques :

1. $\mathcal{P}(E)$ n'est jamais vide ... même si E l'est, car $\mathcal{P}(E)$ contient toujours l'ensemble vide !
2. Attention aux notations : si x est un élément de E, $\mathcal{P}(E)$ contient le sous-ensemble $\{x\}$: c'est une partie de E contenant un élément, on parle de singleton. On peut noter $x \in E$ ou $\{x\} \in \mathcal{P}(E)$ ou $\{x\} \subset E$.

Exercice 2 Exprimer $\mathcal{P}(E)$ si $E = \{a,\ b,\ c\}$.

1.2.1 Opérations sur $\mathcal{P}(E)$

Définition 3. *Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux parties d'un même ensemble E.*

1. ***L'union*** *(ou réunion) de $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$, notée $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ est le sous-ensemble de E contenant les éléments appartenant à $\mathcal{A}$ **ou** à $\mathcal{B}$.*
2. ***L'intersection*** *de de $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$, notée $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$ est le sous-ensemble de E contenant les éléments appartenant à $\mathcal{A}$ **et** à $\mathcal{B}$.*

Exercice 3 Définir $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ et $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$ lorsque :

1) $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$

2) $\mathcal{A}$ est l'ensemble des nombres entiers pairs et positifs et $\mathcal{B}$ est l'ensemble des multiples de 3 positifs.

Définition 4. *Soit $\mathcal{A}$ une partie d'un ensemble E. On appelle **complémentaire** de $\mathcal{A}$ le sous-ensemble de E formé des éléments E qui n'appartiennent pas à $\mathcal{A}$. On note $\overline{\mathcal{A}}$ le complémentaire de $\mathcal{A}$.*

Propriétés 1. *Pour toutes parties $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ de E*

1. $\emptyset$ *et* **E** :

a) $\emptyset \cap A = \emptyset$ *et* $\emptyset \cup A = A$

b) $E \cap A = A$ *et* $E \cup A = E$

2. Commutativité : $\mathcal{A} \cup \mathcal{B} = \mathcal{B} \cup \mathcal{A}$ *et* $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \mathcal{B} \cap \mathcal{A}$

3. Associativité :

a) $(\mathcal{A} \cup \mathcal{B}) \cup \mathcal{C} = \mathcal{A} \cup (\mathcal{B} \cup \mathcal{C})$

b) $(\mathcal{A} \cap \mathcal{B}) \cap \mathcal{C} = \mathcal{A} \cap (\mathcal{B} \cap \mathcal{C})$

4. Distributivité :

a) De l'union par rapport à l'intersection : $\mathcal{A} \cup (\mathcal{B} \cap \mathcal{C}) = (\mathcal{A} \cup \mathcal{B}) \cap (\mathcal{A} \cup \mathcal{C})$.

b) De l'intersection par rapport à l'union : $\mathcal{A} \cap (\mathcal{B} \cup \mathcal{C}) = (\mathcal{A} \cap \mathcal{B}) \cup (\mathcal{A} \cap \mathcal{C})$.

4. Passage au complémentaire - Lois de Morgan :
a) $\overline{\mathcal{A}\cup\mathcal{B}} = \overline{\mathcal{A}}\cap\overline{\mathcal{B}}$
b) $\overline{\mathcal{A}\cap\mathcal{B}} = \overline{\mathcal{A}}\cup\overline{\mathcal{B}}$

Illustration de la propriété 4 a)

$\mathcal{A}\cup\mathcal{B}$	$\mathcal{A}$	$\overline{\mathcal{A}}$
$\mathcal{B}$		
$\overline{\mathcal{B}}$		

$\overline{\mathcal{A}}\cap\overline{\mathcal{B}}$	$\mathcal{A}$	$\overline{\mathcal{A}}$
$\mathcal{B}$		
$\overline{\mathcal{B}}$		

Dans le premier tableau, les cases gris clair correspondent à $\mathcal{A}\cup\mathcal{B}$ et la case gris foncé à $\overline{\mathcal{A}\cup\mathcal{B}}$. Dans le second tableau, la case gris foncé correspond à $\overline{\mathcal{A}}\cap\overline{\mathcal{B}}$

Exercice 4 De la même façon illustrer la propriété 4 b. $\overline{\mathcal{A}\cap\mathcal{B}} = \overline{\mathcal{A}}\cup\overline{\mathcal{B}}$

Réponse :

$\mathcal{A}\cap\mathcal{B}$	$\mathcal{A}$	$\overline{\mathcal{A}}$
$\mathcal{B}$		
$\overline{\mathcal{B}}$		

$\overline{\mathcal{A}}\cup\overline{\mathcal{B}}$	A	$\overline{\mathcal{A}}$
$\mathcal{B}$		
$\overline{\mathcal{B}}$		

1.3 Produit cartésien

Définition 5. *Soient E et F deux ensembles non vides. Le* ***produit cartésien*** *de E par F, noté $E\times F$, est l'ensemble des* ***couples*** *d'éléments de E et F.*

$$E\times F = \{(x,y)/x\in E\, et\ y\in F\}.$$

Dans le cas où $F=E$, $E\times E$ se note E^2.

Définition 6. ***Généralisation*** *Soient $E_1,\ E_2,\ E_3,\ \ldots,\ E_n$, n ensembles non vides. L'ensemble des* ***n-uplets*** *$(x_1,x_2,x_3,\cdots,x_n)$ où $x_i\in E_i,\ i\in\{1,\ 2,\ 3,\ \cdots,n\}$, se note $E_1\times E_2\times E_3\times\cdots\times E_n$: c'est le produit cartésien des E_i, pour $i\in\{1,\ 2,\ 3,\ \cdots,n\}$ Ainsi, si $n\in N^*$, on note E^n le produit cartésien de n fois l'ensemble E.*

Exemple 1 $\mathbb{R}^2$ est l'ensemble des couples de réels, que l'on peut illustrer par le plan muni d'un repère.

2 Ensembles finis

Définition 7. *Une application définie sur un ensemble E, d'ensemble d'arrivé F est une **bijection ou est dite bijective** si tout élément de F possède exactement un antécédent dans E par f.*

Définition 8. *Un ensemble E est dit **fini** s'il est vide ou s'il existe un entier naturel n et une bijection de E sur $\{1,\ 2,\ ...\ ,\ n\}$*

Définition 9. ***Dénombrer** un ensemble fini non vide E, c'est déterminer le **cardinal** de E.*

Exercice 5 Combien y-a-t-il d'entiers dans l'ensemble $[\![17, 31]\!]$? De nombres impairs ?

2.1 Permutations

Exemple 2 On dispose d'une urne contenant 5 boules numérotées de 1 à 5 (i.e. que l'on peut différencier). On tire les 5 boules successivement et sans remise. Combien y-a-t-il de tirages possibles ?

Définition 10. *Soit n un entier naturel non nul. On définit l'entier **factorielle n**, noté $n!$ par $n! = 1 \times 2 \times 3 \times ... \times n$. Par <u>convention</u>, $0! = 1$, on verra plus loin que cette convention est très utile pour certains calculs.*

Propriétés 2.

1. *Pour tout entier naturel n non nul, $(n+1)! = n!\ \times (n+1)$.*
2. *Pour tout entier naturel n non nul, $n!$ est également le nombre de permutations d'un ensemble à n éléments. C'est également le nombre de bijections d'un ensemble E de cardinal n dans lui-même.*

Exercice 6 Combien y-a-t-il de façons d'ordonner 3 éléments A, B et C ?

2.2 p-listes

Définition 11. *Une **p-liste** d'un ensemble E de cardinal n est une suite **ordonnée** de p éléments de E. On parle également de **p-uplet** d'éléments de E. (ou encore d'un élément de $E^p = E \times E \times ... \times E$).*

Remarques :

1. L'ordre dans une p-liste est important, ainsi l'élément $(1;\ 2;\ 3)$ de $\mathbb{R}^3$ est différent de l'élément $(1;\ 3;\ 2)$.
2. Un même élément de E peut être répété dans une p-liste : $(1;\ 1;\ 2;\ 3)$ est un élément de de $\mathbb{R}^4$.

Théorème 1. *Si* Card $E = n$, *Le nombre de p-listes d'éléments de E est égal à n^p.*

2.3 Arrangements

Définition 12. *Un* ***arrangement*** *de p éléments de E est un p-uplet d'éléments* ***distincts*** *de E. (on parle aussi de p-liste d'éléments distincts de E ou de p-liste sans répétition)*

Théorème 2. *Si E est un ensemble de cardinal $n \geq 0$, le nombre d'arrangements de p éléments de E deux à deux distincts est noté A_n^p (avec $0 \leq p \leq n$) et est égal à*

$$A_n^p = n \times (n-1) \times (n-2) \times ... \times (n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!}$$

(p facteurs)

Remarque : On retrouve (lorsque $p = n$) le nombre de permutations de E : $\mathrm{A}_n^n = n\,!$

Exercice 7 Combien peut-on former de « codes secrets » qui sont composés de 4 chiffres **distincts** pris dans $[\![0, 9]\!]$?

2.4 Combinaisons

Exemple 3 On tire 3 boules **simultanément** d'une urne contenant 5 boules distinctes numérotées B_1, B_2, B_3, B_4 et B_5. Combien y-a-t-il de tirages différents possibles ?

Définition 13. *Soit E un ensemble fini à n éléments. On appelle* ***combinaison*** *de p éléments de E, toute* ***partie*** *à p éléments de E.*

Remarques :

1. Les éléments d'une combinaison étant distincts, on a donc $0 \leq p \leq n$.
2. L'ordre des éléments d'une combinaison n'a pas d'importance : ainsi $\{1; 2; 3\}$ et $\{3; 2; 1\}$ sont deux combinaisons identiques de 3 éléments pris parmi $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Théorème 3. *Le nombre de combinaisons de p éléments d'un ensemble E à n éléments est noté C_n^p ou $\binom{n}{p}$ (cette seconde notation étant actuellement la plus utilisée). On a $\binom{n}{p} = \frac{\mathrm{A}_n^p}{p\,!} = \frac{n\,!}{(n-p)!\;p!}$.*

Exercice 8

1. Calculer $\binom{12}{8}$
2. Combien y-a-t-il de tirages du loto (6 entiers de $[\![1, 49]\!]$) ?
3. On tire au hasard 5 cartes (= une « main ») d'un jeu de 32 cartes. Combien de mains contiennent 2 coeurs ?

Propriétés Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $p \in [\![0; n]\!]$.

1. $\binom{n}{n} = \binom{n}{0} = 1$.

2. $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$.

   Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $p \in [\![1, n]\!]$.

3. $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$.

4. $\binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p} = \binom{n}{p}$.

5. $\binom{n}{p} = \frac{n}{p}\binom{n-1}{p-1}$.

Théorème 4. ***Formule du Binôme de Newton***
Pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et tout $n \in \mathbb{N}$:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

Admis

Triangle de Pascal : La relation $\binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p} = \binom{n}{p}$ permet de calculer « de proche en proche » les $\binom{n}{p}$.

n \ p	0	1	2	3	4	5	$\cdots$
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
$\vdots$							

Table 1 – Triangle de Pascal

Remarque : On retrouve dans cette table les propriétés 1 (les extrémités de chaque lignes sont égales à 1), 2 (Symétrie sur chacune des lignes) et 3 (sur chaque ligne, le second et l'avant-dernier termes sont égaux à n)

Exercice 9 Compléter le triangle de Pascal afin d'obtenir les $\binom{8}{p}$.

Exercice 10 Développer $(2a-b)^5$.

Exercice 11 Montrer que $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = 2^n$

Théorème 5. *Si E est un ensemble de cardinal n, alors* $\mathrm{Card}\mathcal{P}(E) = 2^n$

Remarque : Ce calcul correspond à la somme des termes de la $n^{\text{ième}}$ ligne du triangle de Pascal.

UNIVERSITÉ DE CERGY **Année 2014-2015**

U.F.R. Économie & Gestion

Licence d'Économie et Finance / Licence de Gestion

MATH 201 : PROBABILITÉS

Chapitre II : Espaces probabilisés

1 Notions d'événements

1.1 Expérience aléatoire, univers associé

Définition 1. *Une* ***expérience aléatoire*** *est une expérience dont le résultat ne dépend que du hasard.*

Exemples 1

1. On lance une pièce de monnaie. Le résultat « PILE » ou « FACE » ne dépend que du hasard (du moins en théorie).
2. On lance un dé, l'apparition de l'une des six faces ne dépend que du hasard.
3. On tire cinq cartes (on parle de « main ») d'un jeu de 32 cartes ...

Définition 2. *On appelle* ***univers*** *associé à une expérience aléatoire, l'ensemble (noté Ω) de tous les résultats possibles. Les éléments de l'univers s'appellent les éventualités.*

Exercice 1

1. On lance une pièce de monnaie : définir l'univers Ω.
2. On lance un dé : définir l'univers Ω.
3. On tire simultanément cinq cartes d'un jeu de 32 cartes ... quel est le cardinal de l'univers ?

Remarque : Il est parfois délicat de déterminer l'univers associé à une expérience aléatoire : il faut s'attacher à obtenir l'univers permettant de décrire toutes les éventualités.

Exemple 2 Par exemple, si on lance trois fois de suite un dé, les éventualités sont des 3-listes d'éléments pris dans $\{1;2;3;4;5;6\}$. Ici $\mathrm{Card}(\Omega) = 6^3 = 216$. Si on lance cette fois trois dés identiques, on a deux choix possibles pour modéliser cette expérience : soit on tient compte de l'ordre de lancer des trois dés, soit on lance simultanément les trois dés. L'Univers associé n'est alors plus le même.

Définition 3. ***Un événement*** *lié à une expérience aléatoire $\mathcal{E}$ est* ***un sous-ensemble (ou une partie)*** *de son univers Ω.*

Un événement élémentaire *est un événement composé d'un seul élément.*

Définition 4. *Soit $\mathcal{T}$ l'ensemble des événements associés à une expérience aléatoire :*

1. *Soient A et B deux événements de $\mathcal{T}$. On dit que l'événement A* ***entraîne*** *l'événement B, si A est inclus dans B*
2. *Soient A et B deux événements de $\mathcal{T}$. On dit que les événements A et B sont* ***incompatibles*** *si $A \cap B = \emptyset$.*

Notations	Vocabulaire ensembliste	Vocabulaire probabiliste	Exemple : on lance un dé
$\emptyset$	Ensemble vide	événement impossible	« obtenir un nombre négatif »
Ω	ensemble total	événement certain	$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$
ω	élément de Ω	événement élémentaire	« obtenir la face 2 »
A	sous-ensemble de Ω	événement	« obtenir un nombre pair »
$B \subset A$	B est inclus dans A	B implique A	$A =$ « obtenir un nombre pair » $B =$ « obtenir un multiple de 4 »
$A \cup B$	Union de A et B	A **ou** B	$A =$ « obtenir un nombre pair » $B =$ « obtenir un multiple de 3 » $A \cup B = \{2,3,4,6\}$
$A \cap B$	Intersection de A et B	A **et** B	$A \cap B = \{6\}$
$\overline{A}$	Complémentaire de A	événement contraire de A	$\overline{A} =$ « obtenir un nombre impair »
$A \cap B = \emptyset$	A et B disjoints	A et B incompatibles	$A =$ « Obtenir un nombre pair » $B =$ « Obtenir un multiple de 5 »
$A \cap B = \emptyset$ $A \cup B = \Omega$	A et B complémentaires	A et B contraires	$A =$ « obtenir un nombre pair » $B =$ « obtenir un nombre impair »

On peut étendre ces définitions à un nombre fini d'événements :
Si $A_1,\ A_2, A_3, \cdots, A_n$ sont n événements d'un univers Ω :

$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \cdots \cap A_n$ est l'ensemble des ω qui appartiennent à chacun des A_i $(i \in [1;n])$. C'est l'événement « réalisation de chacun des A_i $(i \in [\![1,n]\!])$ ».

De même $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \cdots \cup A_n$ est l'ensemble des ω qui appartiennent à au moins l'un des A_i. C'est l'événement « réalisation d'au moins l'un des A_i $(i \in [\![1,n]\!])$ ».

Enfin , il sera parfois nécessaire d'étendre ces définitions à une réunion (ou une intersection) d'une suite **infinie dénombrable (i.e. indexée par $\mathbb{N}$)** d'événements : soit $(A_n)_{(n\in\mathbb{N})}$ une suite d'événements d'un même univers Ω.

$\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n = \{$ réalisation de tous les A_n, $n \in \mathbb{N}$ $\}$.

$\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n = \{$ réalisation de l'un au moins des A_n, $n \in \mathbb{N}$ $\}$.

Définition 5. *Un ensemble E est dit dénombrable (ou infini dénombrable) lorsque ses éléments peuvent être listés sans omission ni répétition dans une suite indexée (ou indicée) par les entiers de $\mathbb{N}$.*

Exemples 3

$\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$ sont dénombrables, mais également l'ensemble des couples $\{(i,j)/i \in \mathbb{N}$ et $j \in \mathbb{N}\} = \mathbb{N}^2$. Mais $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable (admis).

Définition 6. *On appelle **système complet d'événements** toute partition dénombrable de Ω formée d'éléments de $\mathcal{T}$ c-a-d tout ensemble dénombrable d'événements non-impossibles, deux à deux incompatibles et dont l'union dénombrable est l'événement certain.*

Propriétés 1. *L'union et l'intersection d'événements possèdent les propriétés suivantes : Soient A, B et C trois événements d'un univers Ω :*

1. *Associativité :* $A \cup \Big(B \cup C\Big) = \Big(A \cup B\Big) \cup C$
   (Respectivement : $A \cap \Big(B \cap C\Big) = \Big(A \cap B\Big) \cap C$*)*
2. *Commutativité :* $A \cup B = B \cup A$ *(Respectivement :* $A \cap B = B \cap A$*)*
3. *Distributivité :* $A \cap \Big(B \cup C\Big) = \Big(A \cap B\Big) \cup \Big(A \cap C\Big)$
   et $A \cup \Big(B \cap C\Big) = \Big(A \cup B\Big) \cap \Big(A \cup C\Big)$.
4. *Lois de Morgan : soit $(A_n)_{(n\in\mathbb{N})}$ une suite d'événements de Ω :*

$$\overline{\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overline{A_n} \quad \text{et} \quad \overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{A_n}$$

Exercice 2 Une urne contient deux boules blanches et une boule noire. On effectue des tirages successifs d'une boule dans cette urne que l'on remet après avoir noté la couleur, jusqu'à ce que l'on obtienne la boule noire.

On note : A l'événement : « On effectue un nombre fini de tirages »,
F_n l'événement : « le jeu s'arrête au $n^{\text{ième}}$ tirage » ($n \in \mathbb{N}^*$)
B_i : « on tire une boule blanche au $i^{\text{ième}}$ tirage » ($i \in \mathbb{N}^*$)
1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, exprimer l'événement F_n en fonction des événements B_i, $i \in [\![1,n]\!]$
2. Exprimer l'événement A en fonction des événements F_n, $n \in \mathbb{N}^*$.

1.2 Tribu, espace probabilisé

Définition 7. *Soit Ω un ensemble quelconque,* ***Une Tribu (notée $\mathcal{T}$) ou*** *$\sigma-$**algèbre** est un sous-ensemble de $\mathcal{P}(\Omega)$ vérifiant les propriétés suivantes :*

1. $\emptyset \in \mathcal{T}$
2. $\forall A \in \mathcal{T},\ \overline{A} \in \mathcal{T}$
3. *Pour toute suite (A_n) d'éléments de $\mathcal{T}$,* $\displaystyle\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n \in \mathcal{T}$. *(stabilité par union dénombrable)*

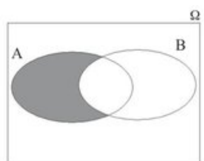
Exemple fondamental : L'ensemble des parties $\mathcal{P}(\Omega)$ est une tribu sur Ω.

Exemple 4 On considère l'univers $\Omega = \{a; b; c\}$. Une tribu de $\mathcal{P}(\Omega)$ est par exemple : $\mathcal{T} = \Big\{\emptyset; \Omega; \{a\}; \{b; c\}\Big\}$

Théorème 1. *Soit $\mathcal{T}$ une tribu sur Ω. on a :*

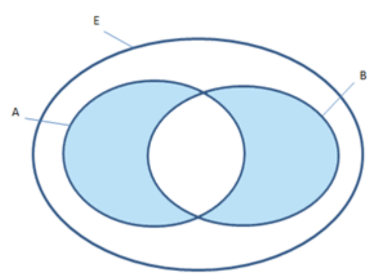
I. $\Omega \in \mathcal{T}$.

II. *Pour toute suite $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{T}$,* $\displaystyle\bigcap_{n=\ 0}^{+\infty} B_n \in \mathcal{T}$. *(stabilité par intersection dénombrable)*



III. $\forall A \in \mathcal{T}, \forall B \in \mathcal{T}, A \cap \overline{B} \in \mathcal{T}$.

IV. $\forall A \in \mathcal{T}, \forall B \in \mathcal{T}, A\Delta B = (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A}) \in \mathcal{T}$. *(Différence symétrique)*



Définition 8. *Un* ***espace probabilisable*** *associé à une expérience aléatoire $\mathcal{E}$ est la donnée du couple $(\Omega, \mathcal{T})$ ou Ω est l'univers associé à $\mathcal{E}$ et $\mathcal{T}$ une tribu des événements liés à $\mathcal{E}$.*

Remarque : On peut montrer (mais on l'admettra ici) que si Ω est fini ou infini dénombrable et si les événements élémentaires ω_i sont dans la tribu $\mathcal{T}$, alors $\mathcal{T} = \mathcal{P}(\Omega)$. On suppose que cette situation sera toujours le cas dans les exemples et exercices traités (sauf aux chapitres 5 et 6).

Exercice 3 On lance une pièce de monnaie trois fois de suite. On note F_i l'événement « on obtient FACE au $i^{\text{ième}}$ lancer », pour $i \in \{1, 2, 3\}$. Décrire à l'aide des F_i et des connecteurs les événements suivants :

1. $A =$ « On obtient au moins une fois FACE ».
2. $B =$ « On obtient au moins deux fois PILE ».
3. $C =$ « On obtient FACE exactement deux fois ».
4. $D =$ « On obtient PILE au cours d'au moins un des deux premiers lancers ».

Exercice 4 On lance deux dés (un rouge et un vert), pour $(i, j) \in [\![1, 6]\!]^2$, on note $A_i =$ « Le chiffre i apparaît sur la face du dé rouge » et $B_j =$ « Le chiffre j apparaît sur la face du dé vert ».

1. Décrire l'événement X : « La somme des points obtenus est égale à 10 ».
2. Décrire l'événement Y : « la somme des points obtenus est supérieure strictement à 3 ».

Définition 9. *Soit Ω un ensemble et $\mathcal{T}$ une tribu d'événements sur Ω .*

On appelle ***probabilité*** *définie sur l'espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{T})$ toute application P de $\mathcal{T}$ dans $[0, 1]$ vérifiant les deux axiomes :*

1) $\mathrm{P}(\Omega) = 1$

2) Pour toute suite $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ d'événements de $\mathcal{T}$ deux à deux incompatibles (ou disjoints) : $\mathrm{P}\Big(\bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j\Big) = \sum_{j=0}^{+\infty} \mathrm{P}(A_j)$. *(Axiome de σ-additivité).*

Le triplet $(\Omega, \mathcal{T}, \mathrm{P})$ s'appelle ***espace probabilisé****.*

Remarque : On a en effet besoin de cette propriété de $\sigma-$additivité, car on peut être amené dans certains exercices à répéter un nombres de fois indéfini une expérience aléatoire (voir exemple du « temps d'attente du premier succès »)

Théorème 2. *Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mathrm{P})$ un espace probabilisé : Pour tous A et B de $\mathcal{T}$:*

I. $\mathrm{P}(\emptyset) = 0$.

II. Additivité :

  (a) Si $A \cap B = \emptyset$, $\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B)$.

  (b) Soient $(A_i)_{1\leq i\leq n}$ une famille d'éléments de $\mathcal{T}$ deux à deux disjoints : $\mathrm{P}\Big(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\Big) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{P}(A_i)$

III. $\mathrm{P}(\overline{A}) = 1 - \mathrm{P}(A)$.

IV. $\mathrm{P}(A \cap \overline{B}) = \mathrm{P}(A) - \mathrm{P}(A \cap B)$.

  En particulier, si $\mathbf{B} \subset \mathbf{A}$ *alors* $\mathrm{P}(A \cap \overline{B}) = \mathrm{P}(A) - \mathrm{P}(B)$.

V. Si $B \subset A$ alors $\mathrm{P}(B) \leq \mathrm{P}(A)$.

VI. $\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A \cap B)$.

Théorème 3. ***Formule du crible (ou de Poincaré)***
Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathrm{P})$ *un espace probabilisé. Pour toute famille* $(A_i)_{1\leq i\leq 3}$ *d'événements, on a :*

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A_1\cup A_2\cup A_3) &= \mathrm{P}(A_1)+\mathrm{P}(A_2)+\mathrm{P}(A_3)\\ &\quad -\mathrm{P}(A_1\cap A_2)-\mathrm{P}(A_1\cap A_3)-\mathrm{P}(A_2\cap A_3)\\ &\quad +\mathrm{P}(A_1\cap A_2\cap A_3)\end{aligned}$$

Preuve :
Le cas $n = 2$ est la propriété VI) précédente :

$$\mathrm{P}(A_1\cup A_2)=\mathrm{P}(A_1)+\mathrm{P}(A_2)-\mathrm{P}(A_1\cap A_2)$$

Pour le cas $n = 3$, on a :
$\mathrm{P}(A_1\cup A_2\cup A_3)=\mathrm{P}((A_1\cup A_2)\cup A_3)=\mathrm{P}(A_1\cup A_2)+\mathrm{P}(A_3)-\mathrm{P}((A_1\cup A_2)\cap A_3)$
Avec $\mathrm{P}(A_1\cup A_2)=\mathrm{P}(A_1)+\mathrm{P}(A_2)-\mathrm{P}(A_1\cap A_2)$
et $\mathrm{P}((A_1\cup A_2)\cap A_3)=\mathrm{P}((A_1\cap A_3)\cup(A_2\cap A_3))$
$=\mathrm{P}(A_1\cap A_3)+\mathrm{P}(A_2\cap A_3)-\mathrm{P}((A_1\cap A_3)\cap(A_2\cap A_3))$.
Or $(A_1\cap A_3)\cap(A_2\cap A_3)=A_1\cap A_2\cap A_3$ d'où :
$\mathrm{P}(A_1\cup A_2\cup A_3)=\mathrm{P}(A_1)+\mathrm{P}(A_2)+\mathrm{P}(A_3)-\mathrm{P}(A_1\cap A_2)-\mathrm{P}(A_1\cap A_3)-\mathrm{P}(A_2\cap A_3)+\mathrm{P}(A_1\cap A_2\cap A_3)$
■

- Il existe une formule générale pour $n \in \mathbb{N}^*$

Théorème 4. *Soit* P *une probabilité sur* $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$*.*

1. *Si* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est un système complet d'événements, on a* $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}}\mathrm{P}(A_n)=1$*.*
2. *Si* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite croissante d'événements (i.e.* $\forall n\in\mathbb{N}, A_n\subset A_{n+1}$*), on a* $\displaystyle\mathrm{P}\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}A_n\Big)=\lim_{n\to+\infty}\mathrm{P}(A_n)$*.*
3. *Si* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite décroissante d'événements (i.e.* $\forall n\in\mathbb{N}, A_{n+1}\subset A_n$*), on a* $\displaystyle\mathrm{P}\Big(\bigcap_{n\in\mathbb{N}}A_n\Big)=\lim_{n\to+\infty}\mathrm{P}(A_n)$*.*

Exercice 5 On lance indéfiniment une pièce de monnaie « bien équilibrée ». On note A l'événement « on n'obtient que des PILES » et pour tout entier n non nul, A_n l'événement « on obtient PILE à chacun des n premiers lancers ». Justifier que $\mathrm{P}(A)=0$.

Définition 10. *Soit* $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathrm{P})$ *un espace probabilisé.*

1. *On dit qu'un événement A est* ***quasi-impossible ou négligeable*** *(respectivement* ***quasi-certain****) si* $\mathrm{P}(A)=0$ *(resp. si* $\mathrm{P}(A)=1$*)*
2. *On appelle* ***système quasi-complet d'événements*** *tout ensemble dénombrable d'événements deux à deux incompatibles dont la réunion est un événement quasi-certain.*

Suite de l'exercice 2 : Une urne contient deux boules blanches et une boule noire. On effectue des tirages successifs d'une boule dans cette urne que l'on remet après avoir noté la couleur, jusqu'à ce que l'on obtienne la boule noire.

On note : A l'événement : « On effectue un nombre fini de tirages »,

F_n l'événement : « le jeu s'arrête au $n^{\text{ième}}$ tirage » $(n \in \mathbb{N}^*)$

Déterminer $\mathrm{P}(A)$.

2 Équiprobabilité

Définition 11. *Dans le cas d'un espace probabilisable fini, on dit qu'il y a* ***équiprobabilité*** *lorsque les probabilités de tous les événements élémentaires sont égales. On parle aussi de probabilité uniforme.*

Théorème 5. *S'il y a équiprobabilité, pour tout événement A, on a :*

$$\mathrm{P}(A) = \frac{Card(A)}{Card(\Omega)}$$

On parle aussi du quotient : $\dfrac{\textit{nombre de cas favorables}}{\textit{nombre de cas possibles}}$.

Exercices 6

1. On lance un dé « bien équilibré » : $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Soit A l'événement « on obtient un nombre pair ». Calculer $\mathrm{P}(A)$
2. On lance deux dés simultanément : $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^2$. Soit A l'événement « la somme des faces est égale à 6 ». Calculer $\mathrm{P}(A)$
3. On tire 5 cartes d'un jeu de 32 cartes ; Quelle est la probabilité de tirer exactement 3 « coeurs » ?
4. On effectue n lancers d'un dé cubique bien équilibré. Calculer la probabilité des événements A_n et B_n définis par :

   A_n : « On obtient 6 pour la première fois au $n^{\text{ième}}$ lancer ».

   B_n : « On n'obtient aucun 6 lors des n lancers ».
5. On permute au hasard les n tomes d'une encyclopédie. Quelle est la probabilité que les tomes 1 et 2 se retrouvent côte à côte dans cet ordre ?

3 Probabilités Conditionnelles

3.1 Généralités

Définition 12. *Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathrm{P})$ un espace probabilisé, B un événement de probabilité non nulle (B non (quasi-)impossible). On appelle* ***probabilité conditionnée par*** B**,** *l'application notée P_B de $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ dans $\mathbb{R}^+$ définie par :*

$$\forall A \in \mathcal{P}(\Omega), \mathrm{P}_B(A) = \frac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(B)}$$

On dit que $\mathrm{P}_B(A)$ est la probabilité de A sachant B. (i.e. sachant que B est réalisé)

Remarque : La notation $\mathrm{P}_B(A)$ se note aussi $\mathrm{P}(A/B)$.

Théorème 6. *L'application P_B est une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$.*

Exercice 7 On considère une famille de deux enfants. Il existe donc 4 fratries possibles $\{(F,F);(F,G);(G,F);(G,G)\}$ (couples sous la forme (aîné, cadet)) que l'on suppose équiprobables.

1. Quelle est la probabilité que les deux enfants soient des garçons sachant que l'aîné est un garçon ?
2. Quelle est la probabilité que les deux enfants soient des garçons sachant qu'il y a au moins un garçon ?

Exercice 8 Une urne contient 6 boules : 3 blanches et 3 noires indiscernables au toucher. On tire au hasard simultanément 3 boules (on suppose les tirages équiprobables). Quelle est la probabilité que les trois boules soient blanches sachant qu'au moins deux d'entre elles le sont ?

3.2 Propriétés

Théorème 7. ***Formule des probabilités conditionnelles***
Soient A et B deux événements de $\mathcal{P}(\Omega)$, avec $\mathrm{P}(B) \neq 0$.

$$\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(B) \times \mathrm{P}_B(A)$$

Théorème 8. ***Formule des probabilités composées***
Soient n événements ($n \geq 2$) $A_1, A_2, \cdots, A_n$ tels que $\mathrm{P}\Big(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\Big) \neq 0$, alors :

$$\mathrm{P}\Big(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\Big) = \mathrm{P}(A_1) \times \mathrm{P}_{A_1}(A_2) \times \mathrm{P}_{(A_1 \cap A_2)}(A_3) \times \cdots \times \mathrm{P}_{(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1})}(A_n)$$

Exercice 9 Une urne contient 3 boules blanches et 5 boules noires indiscernables au toucher. On tire successivement et sans remise deux boules au hasard. Quelle est la probabilité qu'elles soient de la même couleur ?

Théorème 9. ***Formule des probabilités totales***

Soit $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ un système complet d'événements non (quasi-)impossibles et B un événement quelconque. Alors $\mathrm{P}(B) = \sum\limits_{k\in\mathbb{N}} \mathrm{P}(A_k) \times \mathrm{P}_{A_k}(B)$

Exercice 10

Sur sa console de jeux, Alphonse engage une partie où il doit affronter en duel l'un des trois monstres appelés ALK, BUK et COR. Ces trois monstres sont de forces inégales et les probabilités qu'Alphonse l'emporte contre Alk, Buk et Cor sont respectivement égales à $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{3}$. De plus le choix du monstre n'appartient pas à Alphonse et celui-ci observe que dans 50% des cas il affronte Alk, alors qu'il affronte Buk aussi souvent que Cor.

On note A l'événement « Alphonse affronte Alk », B : « Alphonse affronte Buk » et C : « Alphonse affronte Cor ». Déterminer la probabilité qu'Alphonse gagne sa partie.

Théorème 10. ***Formule des causes***

Soient A et B deux événements de probabilités non nulles. On a :

$$\mathrm{P}_A(B) = \frac{\mathrm{P}(B)}{\mathrm{P}(A)} \times \mathrm{P}_B(A)$$

Théorème 11. ***Formule de Bayes***

Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un système complet d'événements de probabilités non nulles, et B un événement de probabilité non nulle.

Pour tout $n_0 \in \mathbb{N}$, on a :

$$\mathrm{P}_B(A_{n_0}) = \frac{\mathrm{P}(A_{n_0}) \times \mathrm{P}_{A_{n_0}}(B)}{\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{P}(A_n) \times \mathrm{P}_{A_n}(B)}$$

En particulier, si A et B sont deux événements de probabilités non nulles :

$$\mathrm{P}_B(A) = \frac{\mathrm{P}(A) \times \mathrm{P}_A(B)}{\mathrm{P}(A) \times \mathrm{P}_A(B) + \mathrm{P}(\overline{A}) \times \mathrm{P}_{\overline{A}}(B)}$$

Exercice 11 Un lot de 100 dés contient 25 dés truqués tels que la probabilité d'apparition de 6 soit $\frac{1}{2}$. On prend un dé au hasard, on le lance et un « 6 » apparaît. Quelle est la probabilité que le dé soit truqué ?

Exercice 12 Retour sur le jeu vidéo d'Alphonse.

Alphonse a gagné. Quelle est la probabilité qu'il ait combattu Alk ?

4 Indépendance

Définition 13. *Soit* $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathrm{P})$ *un espace probabilisé. On dit que deux événements* A *et* B *sont* ***indépendants pour la probabilité*** P *si*

$$\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A) \times \mathrm{P}(B)$$

Remarques : Si A est de probabilité non nulle, dire que A et B sont indépendants équivaut à $\mathrm{P}_A(B) = \mathrm{P}(B)$ (La probabilité de B reste la même, que A soit ou non réalisé)

Si $\mathrm{P}(A) = 0$, alors A est indépendant de tout événement B, puisque $\mathrm{P}(\emptyset) = 0$.

Exercice 13

A leur entrée à l'université, les étudiants doivent choisir une option parmi trois proposées (notées A, B et C). La répartition de ces options est donnée dans le tableau ci dessous :

	A	B	C	Total
Filles	0,12	0,13	0,27	
Garçons	0,16	0,12	0,20	
Total				1

On note F l'événement : « L'étudiant est une fille » .

Les événements F et A sont-ils indépendants ? Même question avec les événements $\overline{F}$ et B.

Théorème 12. *Soient* A *et* B *deux événements indépendants selon la probabilité* P*. Alors,* A *et* $\overline{B}$*,* $\overline{A}$ *et* B*, et* $\overline{A}$ *et* $\overline{B}$ *sont indépendants.*

4.1 indépendance de n événements

Définition 14. *Soient* $A_1, A_2, \cdots, A_n$*,* n *événements d'un même espace probabilisé* $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathrm{P})$.

• *On dit que* $A_1, A_2, \cdots, A_n$ *sont* ***deux à deux indépendants pour la probabilité P*** *si pour tout couple* (i, j) *de* $[\![1, n]\!]^2$ *tels que* $i \neq j$*,*

$$\mathrm{P}(A_i \cap A_j) = \mathrm{P}(A_i) \times \mathrm{P}(A_j)$$

• *On dit que* $A_1, A_2, \cdots, A_n$ *sont* ***mutuellement indépendants pour la probabilité P*** *si pour tout tout ensemble* I *d'indices choisis dans* $[\![1, n]\!]$*,*

$$\mathrm{P}\Big(\bigcap_{i \in I} A_i\Big) = \prod_{i \in I} \mathrm{P}(A_i)$$

Remarques :

1. Des événements mutuellement indépendants sont deux à deux indépendants, mais la réciproque est fausse (voir exercice ci-dessous)
2. Pour vérifier que n événements sont mutuellement indépendants, on doit faire un très grand nombre de vérifications d'égalités ... Combien ?

Exercice 14 On lance deux dés bien équilibrés et on appelle A l'événement : « le résultat du premier dé est pair » et B l'événement : « Le résultat du second dé est pair » et C l'événement : « la somme des deux résultats est paire ».

1. Montrer que A, B et C sont deux à deux indépendants.
2. Montrer que A, B et C ne sont pas mutuellement indépendants.

Exercice 15 Extrait du test d'octobre 2012

1. Une urne contient 10 boules numérotées de 1 à 10. On tire une boule au hasard (hypothèse d'équiprobabilité) et on considère les événements :

   $A =$ « On tire une boule portant un nombre pair »

   $B =$ « On tire une boule portant un nombre multiple de 3 »

   Calculer $\mathrm{P}(A)$ et $\mathrm{P}(B)$. Les événements A et B sont-ils incompatibles ? indépendants ?
2. Reprendre les questions précédentes avec une urne contenant 12 boules numérotées de 1 à 12.

Théorème 13. *Il existe un résultat similaire au théorème précédent pour n événements* $A_1, A_2, \cdots, A_n$ *mutuellement indépendants.*

Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, posons $B_i = A_i$ ou $\overline{A_i}$, *alors les événements* $B_1, B_2, \cdots, B_n$ *sont mutuellement indépendants.*

UNIVERSITÉ DE CERGY **Année 2014-2015**

U.F.R. Économie & Gestion

Licence d'Économie et Finance / Licence de Gestion

MATH 201 : PROBABILITÉS

Chapitre III : Variables aléatoires

1 Sommes

Définition 1. *Soit* $(x_i)_{i\in I}$ *une famille de nombres réels, indexés par un ensemble d'indices* I *quelconque. On appelle* ***support*** *de cette famille le sous-ensemble des indices de* I *pour lesquels* $x_i \neq 0$.

1.1 Sommes finies

Définition 2. *On suppose que le support* J *de cette famille* $(x_i)_{i\in I}$ *est fini. On pose :*

1. *Si* $J = \emptyset$, $\sum\limits_{i\in I} x_i = \sum\limits_{i\in\emptyset} x_i = 0$ *par convention.*
2. *Si* $J \neq \emptyset$, $\sum\limits_{i\in I} x_i = \sum\limits_{i\in J} x_i$.

Remarque : Lorsque le support est fini, l'ordre dans lequel on somme n'a pas d'importance, de plus on peut regrouper les termes et faire des sommes partielles sans modifier le résultat.

Théorème 1.
1. $\forall q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $\sum\limits_{k=0}^{n} q^k = \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$.
2. $\forall n \in \mathbb{N}$, $\sum\limits_{k=0}^{n} k = \dfrac{n(n+1)}{2}$; $\sum\limits_{k=0}^{n} k^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$; $\sum\limits_{k=0}^{n} k^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$.
3. *Formule du binôme de Newton :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = (a+b)^n$$

Théorème 2. *Le symbole Σ possède des propriétés algébriques suivantes :*

1. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(x_i + y_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{i=1}^{n} y_i$
2. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(ax_i + b) = a\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) + \sum_{i=1}^{n} b = a\sum_{i=1}^{n} x_i + n.b$

Exercice 1

1. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{10} 3k^2 - 5k + 1$.
2. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^k$

1.2 Famille à support dénombrable

Définition 3. *Soit $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une famille de nombres réels indexée par $\mathbb{N}$.*

1. *On dit que la série de terme général x_i est convergente si la suite $\displaystyle\left(\sum_{i=0}^{n} x_i\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.*

   Dans ce cas, sa limite s'appelle la somme de la série, si S est cette somme : $\displaystyle S = \lim_{n\to+\infty}\sum_{i=0}^{n} x_i$,

   et on note indifféremment : $\displaystyle S = \sum_{i=0}^{+\infty} x_i = \sum_{i\in\mathbb{N}} x_i = \sum_{i\geq 0} x_i$.
2. *On dit que la série de terme général x_i est absolument convergente si la série de terme général $|x_i|$ est convergente.*

Remarques :

1. Si les termes de la série sont positifs (à partir d'un certain rang) il y a équivalence des deux notions
2. Toute série absolument convergente est convergente, mais la réciproque est fausse. Par exemple la série de terme général $\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}, n > 0$ est convergente (sa somme est égale à $\ln 2$) mais elle n'est pas absolument convergente.
3. Une série convergente mais non absolument convergente (on dit aussi semi-convergente) peut poser des problèmes : en effet (théorème de Riemann) si on permute les termes d'une série semi-convergente, on peut obtenir une somme différente !

Exemples 1

1. Considérons la série de terme général $\dfrac{1}{n^\alpha}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

   Si $\alpha > 1$ cette série est convergente, et si $0 < \alpha \leq 1$ cette série est divergente. (Admis)

2. **Les séries géométriques.** On appelle série géométrique toute série de terme général ax^n, où $a \neq 0$ et x sont des nombres réels donnés (x s'appelle la raison de la série). La série de terme général ax^n converge si et seulement si $|x| < 1$.
   Et dans ce cas $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} ax^n = \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=0}^{N} ax^n = \lim_{N\to+\infty} a\left(\frac{1-x^{N+1}}{1-x}\right) = \frac{a}{1-x}$.

Exercice 2 Calculer la somme de la série de terme général $\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$, $n \in \mathbb{N}$.

2 Généralités

Exemple 2

On lance trois fois de suite une pièce « bien équilibrée ». L'univers Ω associé à cette expérience aléatoire est l'ensemble des 3-listes d'éléments pris dans $\{P, F\}$. Ainsi, $\mathrm{Card}(\Omega) = 2^3 = 8$. On suppose que les tirages dans $\{P, F\}$ sont équiprobables. Pour chaque expérience on associe le nombre X de « F » qui apparaissent. X est donc une application de l'univers Ω dans l'ensemble $\{0, 1, 2, 3\}$. On peut réunir les valeurs de X dans un tableau :

Valeurs x_i de X	0	1	2	3
Événements élémentaires associés				
Probabilités p_i				

Définition 4. *Soit* $(\Omega, \mathcal{T}, \mathrm{P})$ *un espace probabilisé. On appelle* ***variable aléatoire réelle (V.A.R.)*** *définie sur cet espace toute application* X *de* Ω *dans* $\mathbb{R}$ *(telle que pour tout intervalle* J *de* $\mathbb{R}$ *l'ensemble* $\{\omega \in \Omega / X(\omega) \in J\}$ *noté* $(X \in J)$*, est un événement.)*

Remarque : Si $\mathcal{T} = \mathcal{P}(\Omega)$, toute application de Ω dans $\mathbb{R}$ est alors une V.A.R. : ce sera le cas pour tous les exemples et exercices de ce chapitre.

Notations : Soient X une application de Ω dans $\mathbb{R}$ et a et b deux nombres réels ($a < b$). On note les événements :

- $(X = a) = \{\omega \in \Omega / X(\omega) = a\}$
- $(X \leq a) = \{\omega \in \Omega / X(\omega) \leq a\}$
- $(a < X < b) = \{\omega \in \Omega / a < X(\omega) < b\}$ etc $\cdots$
- $X(\Omega) = \{X(\omega) / \omega \in \Omega\}$

Exercice 3 Dans l'exemple 3 ci-dessus, déterminer $X(\Omega)$, $(X = 1)$ et $(X \leq 2)$.

Définition 5. *Une* ***variable aléatoire réelle discrète (V.A.R.D.)*** *définie sur* $(\Omega, \mathcal{T}, \mathrm{P})$ *est une V.A.R. telle que :*

1. $X(\Omega)$ *est un ensemble* ***au plus dénombrable***

(2. Pour tout $x \in X(\Omega), \{\omega \in \Omega / X(\omega) = x\} = (X = x) \in \mathcal{T}$*.)*

Remarque : Si I est fini, $X(\Omega)$ est un ensemble fini et on dit que X est une **V.A.R. discrète finie**.

Exemple 3

1. On lance un dé à 6 faces : $\Omega = [\![1;6]\!]$. À chaque face on associe le chiffre (= nombre entier) qui y est inscrit.
2. On tire une carte d'un jeu de 32 cartes Ω est l'ensemble des 32 cartes. À chaque carte ω, on associe le réel $X(\omega)$ défini par :

$$X(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \text{ est un roi} \\ 2 & \text{si } \omega \text{ est une dame} \\ 3 & \text{si } \omega \text{ est un valet} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Théorème 3. *Soit X et Y deux V.A.R.D. définies sur $(\Omega, \mathcal{T}, \mathrm{P})$ et λ un nombre réel.*
Alors $X+Y$, λX, XY, $Max(X,Y)$, $min(X,Y)$ sont des V.A.R. discrètes définies sur $(\Omega, \mathcal{T}, \mathrm{P})$.

Admis ■

Exercice 4

On lance un dé à 6 faces et on appelle X la *V.A.* qui associe à la face son numéro et on appelle Y la *V.A.* qui associe à la face 6 si le numéro est pair et 1 si le numéro est impair : compléter le tableau suivant

ω	1	2	3	4	5	6
$X(\omega)$						
$Y(\omega)$						
$X+Y$						
$\min(X,Y)$						
$\mathrm{Max}(X,Y)$						

3 Loi de probabilité - Fonction de répartition

Dans ce paragraphe, $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathrm{P})$ désigne un espace probabilisé, où la tribu $\mathcal{T}$ est $\mathcal{P}(\Omega)$. X est une *V.A.R.* discrète définie sur Ω.

3.1 Loi de probabilité d'une V.A.R. discrète

Définition 6. *On appelle* ***loi de probabilité*** *de la V.A.R.D. X (ou plus simplement* ***loi de*** *X) l'ensemble des couples* (x_i, p_i) *où*

$$\begin{cases} x_i \in X(\Omega) \\ p_i = P(X = x_i) \end{cases}$$

En pratique, pour déterminer la loi de X on détermine les valeurs x_i prises par X et leurs probabilités. Si $I = [\![1, n]\!]$, on présente souvent les résultats dans un tableau.

Exercice 5 Retour sur l'exemple 3.2

On tire une carte d'un jeu de 32 cartes. Ω est l'ensemble des 32 cartes. À chaque carte on associe le réel $X(\omega)$ défini par :

$$X(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \text{ est un roi} \\ 2 & \text{si } \omega \text{ est une dame} \\ 3 & \text{si } \omega \text{ est un valet} \\ 0 & \text{ sinon} \end{cases}$$

Les tirages sont supposés équiprobables : compléter le tableau :

i				
p_i				

Théorème 4. *Soit* $\{(x_i, p_i)/i \in I\}$ *une partie de* $\mathbb{R}^2$ *telle que* I *soit fini ou dénombrable et telle que les* x_i *soient deux à deux distincts.* $\{(x_i, p_i)/i \in I\}$ *est* ***une loi de probabilité*** *d'une V.A.R. discrète si et seulement si :*

$$\begin{cases} p_i \geq 0 \text{ pour tout } \ i \in I \\ \displaystyle\sum_{i \in I} p_i = 1 \end{cases}$$

Exercice 6

Justifier que l'ensemble $\left\{\left(5^k, \dfrac{4}{5^{k+1}}\right) \ / \ k \in \mathbb{N}\right\}$ définit la loi de probabilité d'une *V.A.R.D. X*.

3.2 Fonction de répartition d'une V.A.R. discrète

Définition 7. *Soient* $(\Omega, \mathcal{T}, \mathrm{P})$ *un espace probabilisé et* X *une V.A.R. discrète sur* $(\Omega, \mathcal{T}, \mathrm{P})$*. On appelle* ***fonction de répartition*** *de* X *l'application :*

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto F(x) = P(X \leq x) \end{aligned}$$

Exercice 7 Déterminer la fonction de répartition de la V.A. de l'exercice 5, puis donner sa courbe représentative.

Théorème 5. *Soit* X *une V.A.R.D. de fonction de répartition* F *:*

1. $\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) \in [0, 1]$.
2. F *est croissante sur* $\mathbb{R}$.
3. $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$ *et* $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$.
4. $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2 (a \leq b),\ \mathrm{P}(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$.

Théorème 6. *Soit* X *une V.A.R.D sur un espace probabilisé* $(\Omega, \mathcal{T}, \mathrm{P})$ *. On pose* $X(\Omega) = \{x_n / n \in \mathbb{N}\}$ *de telle sorte que pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$*, on ait* $x_{n-1} < x_n$*, alors pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$ *:* $\mathrm{P}(X = x_n) = F(x_n) - F(x_{n-1})$ *et* $\mathrm{P}(X = x_0) = F(x_0)$*. Si* X *est finie, on convient de poser* $\mathrm{P}(X = x_n) = F(x_n) - F(x_{n-1}) = 1 - 1 = 0$ *si* $x_n \notin X(\Omega)$

Exercice 8

On lance un dé tétraédrique très mal équilibré dont les 4 faces sont numérotées de 1 à 4 : soit X la V.A. qui prend la valeur du numéro qui sort. La fonction de répartition F de X est donnée par :

$$\begin{cases} F(x) = 0 & \text{si} \quad x < 1 \\ F(x) = 0,4 & \text{si} \quad 1 \leq x < 2 \\ F(x) = 0,75 & \text{si} \quad 2 \leq x < 3 \\ F(x) = 0,85 & \text{si} \quad 3 \leq x < 4 \\ F(x) = 1 & \text{si} \quad x \geq 4 \end{cases}$$

Déterminer la loi de probabilité de X.

3.3 Espérance et Variance d'une V.A.R. discrète

Dans ce paragraphe, X est une V.A.R. discrète sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathrm{P})$. On notera $X(\Omega) = \{x_0, x_1, \cdots, x_n, \cdots\}$ et $p_k = \mathrm{P}(X = x_k)$ (avec $p_k = 0$ à partir d'un certain rang si $X(\Omega)$ est fini).

Définition 8. *On dit que X possède une **espérance** si la série $\sum_{k \geq 0} x_k \mathrm{P}(X = x_k)$ est absolument convergente. On appelle alors espérance de X la somme de cette série, et on note*

$$E(X) = \sum_{k \geq 0} x_k \mathrm{P}(X = x_k)$$

Remarques :

1. La convergence absolue est nécessaire, pour pouvoir définir l'espérance de X car, dans le cas contraire, la somme de la série n'est pas constante si on permute les termes.
2. Dans le cas où Ω est fini, la série est *de facto* absolument convergente et X possède toujours une espérance.
3. L'espérance de X (lorsqu'elle existe) est la moyenne des valeurs prises par X, pondérées de leurs probabilités.

Exemple 4

On admet que la série de terme général $\frac{1}{n^2}, n \in \mathbb{N}^*$, est (absolument) convergente de somme $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. On peut donc définir une loi de probabilité sur $\Omega = \mathbb{N}^*$ par : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathrm{P}(n) = \frac{6}{\pi^2 \times n^2}$. La V.A.R. discrète X définie sur Ω par $X(n) = \{n\}$ ne possède pas d'espérance car $\sum_{n \geq 1} n \times \frac{6}{\pi^2 \times n^2} = \sum_{n \geq 1} \frac{6}{\pi^2 \times n}$ est une série divergente (voir exemple 2a)

Définition 9. *On dit que X possède une **variance** si la série $\sum_{k=0}^{+\infty} (x_k - E(X))^2 \mathrm{P}(X = x_k)$ est convergente. On note $V(X)$ la somme de cette série.*

*Si X possède une variance, on appelle **écart-type** de X le réel : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.*

Remarques :

1. Si X ne possède pas d'espérance, X ne peut posséder de variance.
2. Si X possède une variance, alors celle ci est positive et donc X possède un écart-type.

Théorème 7. *Soit X une V.A.R. discrète telle que X^2 possède une espérance. Alors X possède une variance et*

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

Exercice 9

On dispose d'un dé truqué dont les probabilités d'apparition des 6 faces sont données ci-dessous :

x_k	1	2	3	4	5	6
$\mathrm{P}(X = x_k)$	$\dfrac{3}{24}$	$\dfrac{2}{24}$	$\dfrac{2}{24}$	$\dfrac{3}{24}$	$\dfrac{7}{24}$	$\dfrac{7}{24}$

Déterminer $E(X)$ puis $V(X)$

4 Lois discrètes usuelles

4.1 Loi uniforme

Définition 10. *On dit qu'une V.A.R. X suit la loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$ $(n \geq 1)$ (on note $X \hookrightarrow \mathcal{U}_{([\![1,n]\!])}$) si la loi de probabilité associée est équiprobable, i.e.*

$$\forall k \in [\![1, n]\!], \mathrm{P}(X = k) = \frac{1}{n}$$

Théorème 8. *Si X suit la loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$, alors $E(X) = \dfrac{n+1}{2}$ et $V(X) = \dfrac{n^2-1}{12}$*

Exercice 10

On tire une carte d'un jeu de 52 cartes. On suppose les tirages équiprobables. Quelles est la probabilité d'obtenir :

1. un as ?
2. un « coeur » ?
3. un nombre compris dans $[\![7; 10]\!]$?

4.2 Loi de Bernoulli

Définition 11. *Soit $p \in [0, 1]$. On dit que la V.A.R. X suit* ***la loi de Bernoulli de paramètre*** *p (on note $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$), lorsque X prend les seules valeurs 1 (« succès ») et 0 (« échec ») avec les probabilités $\mathrm{P}(X = 1) = p$ et $\mathrm{P}(X = 0) = 1 - p = q$.*

Situation : On considère une épreuve aléatoire et un seul événement A de cette épreuve, qui est réalisé avec la probabilité p.

Soit X la *V.A.R.* définie par : $\begin{cases} X = 1 & \text{si } A \text{ est réalisé} \\ X = 0 & \text{si } A \text{ n'est pas réalisé} \end{cases}$.

On dit que X est la variable indicatrice de l'événement A ; elle est notée $\mathbb{1}_A$, et $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$.

Théorème 9. *Si X suit la loi de Bernoulli de paramètre p : $E(X) = p$ et $V(X) = p(1 - p) = pq$.*

Exercice 11

On lance un dé cubique à six faces mal équilibré tel que : $\mathrm{P}(1) = \mathrm{P}(3) = \mathrm{P}(5) = \dfrac{1}{4}$ et $\mathrm{P}(2) = \mathrm{P}(4) = \mathrm{P}(6) = \dfrac{1}{12}$. Soit A l'événement : « On tire un nombre impair ». Déterminer la loi de probabilité de la *V.A.R.* $X = \mathbb{1}_A$.

4.3 Loi Binomiale

Situation :

• On lance une pièce « truquée » et on considère l'événement A « on obtient PILE ». Soit $p = \mathrm{P}(A)$.

• On effectue n fois ($n \geq 1$) ce lancer dans des conditions identiques (p reste constant et les lancers sont mutuellement indépendants)

• Soit X la *V.A.R.* qui dénombre les réalisations de A au cours des n épreuves. (i.e. le nombre de « succès »). On cherche à définir la loi de probabilité de X.

- X prend donc les valeurs $0, 1, 2, \cdots, n$.
- Soit $i \in [\![1, n]\!]$, A_i l'événement « A est réalisé au cours de la $i^{\text{ième}}$ épreuve ».
- Soit $k \in [\![0, n]\!]$: l'événement $(X = k)$ est la réunion des événements $B = \bigcap\limits_{i=1}^{n} B_i$ où $B_i = A_i$ pour k indices i, et $B_i = \overline{A_i}$ pour les $(n-k)$ autres indices i.
- $\mathrm{P}(B) = \mathrm{P}\left(\bigcap\limits_{i=1}^{n} B_i\right) = \prod\limits_{i=1}^{n} \mathrm{P}(B_i)$. (du fait de l'ind. mut. des lancers)
- De plus, pour tout $i \in [\![1, n]\!], \mathrm{P}(A_i) = p$ et $\mathrm{P}(\overline{A_i}) = 1 - p$;
- Donc $\mathrm{P}(B) = \mathrm{P}\left(\bigcap\limits_{i=1}^{n} B_i\right) = p^k(1-p)^{n-k}$.
- Enfin, Il y a $\dbinom{n}{k}$ événements B (c'est le nombre de façons d'obtenir k « succès » parmi n épreuves).
- Tous ces événements B sont deux à deux disjoints, donc la probabilité

$$\mathrm{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Définition 12. *Soit $p \in [0, 1]$. On dit qu'une V.A.R. suit* ***la loi binomiale de paramètres** n **et** p, lorsque X prend les valeurs $0, 1, 2, \cdots, n$ avec les probabilités $\mathrm{P}(X = k) = \dbinom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$. On note $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$.*

Remarques :

1. On doit vérifier que l'on a bien défini ainsi une loi de probabilité.
2. La loi de Bernoulli est parfois notée $\mathcal{B}(1, p)$ car elle est identique à la loi Binomiale de paramètres 1 et p.

Théorème 10. *Soit X une V.A.R. discrète qui suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$; alors $E(x) = np$ et $V(X) = np(1-p)$*

Théorème 11. *Soient $X_1, X_2, \cdots, X_n$, n V.A.R. de Bernoulli mutuellement indépendantes de même paramètre p et $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$. Alors X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$.*

Admis pour l'instant - voir chapitre 4

Exercice 12

Une banque propose un placement A. Ce produit A a été choisi par 15% de sa clientèle. On effectue un sondage auprès de 10 clients. On note X la *V.A.R.* qui dénombre les clients de l'échantillon qui ont choisi le produit A.

1. Préciser la loi de probabilité de X et donner ses paramètres.
2. Déterminer la probabilité (à 10^{-2} près) qu'au moins deux clients de l'échantillon aient choisi le produit A.
3. Déterminer la probabilité (à 10^{-2} près) que moins de 5 clients de l'échantillon aient choisi le produit A sachant qu'au moins deux d'entre eux l'ont choisi.

n	k \ p	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,5
10	0	59874	34868	19687	10737	05631	02825	01346	00605	00253	00098
	1	31512 *91386*	38742 *73610*	34743 *54430*	26844 *37581*	18771 *24403*	12106 *14931*	07249 *08595*	04031 *04636*	02072 *02326*	00977 *01074*
	2	07463 *98850*	19371 *92981*	27590 *82020*	30199 *67780*	28157 *52559*	23347 *38278*	17565 *26161*	12093 *16729*	07630 *09956*	04395 *05469*
	3	01048 *99897*	05740 *98720*	12983 *95003*	20133 *87913*	25028 *77588*	26683 *64961*	25222 *51383*	21499 *38228*	16648 *26604*	11719 *17188*
	4	00096 *99994*	01116 *99837*	04010 *99013*	08808 *96721*	14600 *92187*	20012 *84973*	23767 *75150*	25082 *63310*	23837 *50440*	20508 *37695*
	5	00006 *1*	00149 *99985*	00849 *99862*	02642 *99363*	05840 *98207*	10292 *95265*	15357 *90507*	20066 *83376*	23403 *73844*	24609 *62305*
	6	ϵ *1*	00014 *99999*	00125 *99987*	00551 *99914*	01622 *99649*	03676 *98941*	06891 *97398*	11148 *94524*	15957 *89801*	20508 *82813*
	7	ϵ *1*	00001 *1*	00013 *99999*	00079 *99992*	00309 *99958*	00900 *99841*	02120 *99518*	04247 *98771*	07460 *97261*	11719 *94531*
	8	ϵ *1*	ϵ *1*	00001 *1*	00007 *1*	00039 *99997*	00145 *99986*	00428 *99946*	01062 *99832*	02289 *99550*	04395 *98926*
	9	ϵ *1*	ϵ *1*	ϵ *1*	ϵ *1*	00003 *1*	00014 *99999*	00051 *99997*	00157 *99990*	00416 *99966*	00977 *99902*
	10	ϵ	ϵ	ϵ	ϵ	ϵ	00001	00003	00010	00034	00098

4.4 Loi Hypergéométrique

Situation :

• Une urne contient N boules, dont M rouges (dites « objets de type 1 ») et $N-M$ bleues (« objets de type 2 »).

• On effectue n tirages ($0 \leq n \leq N$) **sans remise** dans l'urne.

• Soit X la *V.A.R.* qui dénombre les boules rouges obtenues. On cherche à définir la loi de X.

• On choisit pour univers Ω l'ensemble des combinaisons de n boules prises parmi les N, donc $\text{Card}(\Omega) = \binom{N}{n}$. Toutes ces combinaisons sont supposées équiprobables.

• X peut prendre la valeur k si et seulement si :

$$\left\{ \begin{array}{c} 0 \leq k \leq M \\ 0 \leq n-k \leq N-M \end{array} \right. \quad \text{i.e.} \quad \left\{ \begin{array}{c} 0 \leq k \leq M \\ n-N+M \leq k \leq n \end{array} \right.$$

Les valeurs prises par X sont donc les entiers :

$$k \in [\![Max(0, n-N+M), min(M,n)]\!]$$

(Par ex., si l'urne contient $N = 8$ boules dont $M = 5$ rouges, si on effectue $n = 4$ tirages, alors $k \in ??$)

• Recherche des résultats favorables à $(X = k)$:

Pour obtenir un élément ω de $(X = k)$, il faut choisir k éléments parmi les M boules rouges, puis $(n-k)$ éléments parmi les $(N-M)$ boules bleues. Il y a $\binom{M}{k}$ façons de choisir les k boules rouges, puis pour chacune d'entre elles, $\binom{N-M}{n-k}$ façons de choisir les $(n-k)$ boules bleues. Donc $\text{Card}(X = k) = \binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}$ et $\text{P}(X = k) = \frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$.

Exercice 13 On tire simultanément (sans remise) 5 cartes d'un jeu de 32 cartes. Quelle est la probabilité d'obtenir 3 coeurs ?

Définition 13. *Soient N, M et n trois entiers tels que $0 \leq n, M \leq N$. On dit qu'une V.A.R. suit la loi hypergéométrique de paramètres N, M, n (noté $X \hookrightarrow \mathcal{H}(N, M, n)$) si pour tout entier $k \in I = [\![Max(0, n-N+M), min(M,n)]\!]$,*

$$\text{P}(X = k) = \frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

Remarques :

1. Parfois, en posant $p = \frac{M}{N}$, et $q = 1-p$, on parle de loi hypergéométrique de paramètres N, n et p. Dans ce cas, $\text{P}(X = k) = \frac{\binom{Np}{k}\binom{Nq}{n-k}}{\binom{N}{n}}$.

2. En admettant que le coefficient du binôme $\binom{n}{p}$ est nul lorsque $p < 0$ ou lorsque $p > n$, on peut éviter d'avoir à connaître précisément $X(\Omega)$: en effet le calcul de $\mathrm{P}(X = k)$ reste alors valable pour des valeurs k extérieures à l'intervalle $I = X(\Omega)$.
3. On vérifie que l'on définit bien ainsi une loi de probabilité.

Théorème 12. ***Égalité de Vandermonde***

$$\forall (n, m) \in \mathbb{N}^2, \forall r \in [\![0; n+m]\!] \qquad \binom{n+m}{r} = \sum_{k=0}^{r} \binom{n}{k}\binom{m}{r-k}$$

Théorème 13. *Si la V.A.R. X suit la loi hypergéométrique $\mathcal{H}(N, M, n)$, alors*

$$E(X) = n \times \frac{M}{N} = np$$

Remarque : La variance d'une loi Hypergéométrique $\mathcal{H}(N, M, n)$ est $V(X) = np(1-p)\dfrac{N-n}{N-1}$

4.5 Loi Géométrique

Situation :

• On réitère (de façon indéfinie) des épreuves identiques et mutuellement indépendantes avec même probabilité de succès $p \in]0, 1[$.

• Soit X la V.A. qui compte le nombre d'épreuves effectuées jusqu'au **premier succès**. Si l'on n'obtient jamais de succès, on notera par convention $X = +\infty$.

• On dit que X est **le temps d'attente du premier succès**. On cherche à définir la loi de X.

• X prend toutes les valeurs de $[\![1; +\infty]\!]$

• On note A_i l'événement : « succès à la $i^{\text{ième}}$ épreuve ».

• Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, l'événement $(X = k)$ signifie qu'il y a eu échec aux $(k-1)$ premières épreuves et succès à la $k^{\text{ième}}$ épreuve ; donc $(X = k) = \left(\bigcap_{i=1}^{k-1} \overline{A_i}\right) \cap A_k$.

• Les épreuves étant mutuellement indépendantes :

$$\mathrm{P}(X = k) = \left(\prod_{i=1}^{k-1} \mathrm{P}(\overline{A_i})\right) \times \mathrm{P}(A_k) = (1-p)^{k-1} p$$

Remarques :

1. On peut donc considérer que X est une *V.A.R.* discrète dont l'ensemble des valeurs possibles est $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$.
2. On définit bien une loi de probabilité.

Définition 14. *Soit $p \in]0,1[$. On dit qu'une variable aléatoire X suit la loi géométrique de paramètre p (on note $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$) lorsque X prend ses valeurs dans $\mathbb{N}^*$ et :*

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \mathrm{P}(X = k) = p.(1-p)^{k-1}$$

Théorème 14. *Si X est une V.A.R. suit la loi géométrique de paramètre p, on a :*

$$E(X) = \frac{1}{p} \text{ et } V(X) = \frac{1-p}{p^2}$$

Théorème 15. *Soit X une V.A. qui suit la loi géométrique $\mathcal{G}(p)$. Alors la fonction de répartition de X est définie par :*

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ 1 - q^n & \text{si } x \geq 1 \text{ et } E(x) = n \end{cases}$$

où $E(x)$ est la partie entière de x.

Exercice 14

On lance 2 dés bien équilibrés simultanément, on reprend et relance le ou les dés pour lesquels n'apparaît pas un « 1 », et ce jusqu'à ce que l'on obtienne deux « 1 ». Soit X le nombre de lancers nécessaires. Soit $n \in \mathbb{N}^*$: calculer $\mathrm{P}(X \leq n)$ et $\mathrm{P}(X = n)$. Combien de lancers sont nécessaires en moyenne pour obtenir deux « 1 » ?

Exercice 15

Reprendre l'exercice précédent avec **3** dés.

Réponse : $E(X) \simeq 10,56$

4.6 Loi de Poisson

Définition 15. *On dit que la V.A.R. discrète X suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ si $X(\Omega) = \mathbb{N}$, et*

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{P}(X = k) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$$

On note $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$

Remarque : On a bien défini ainsi une loi de probabilité

Théorème 16. *Si X suit la loi de poisson de paramètre λ, on a $E(X) = \lambda$ et $V(X) = \lambda$*

Exercice 16 Un central téléphonique reçoit en moyenne 60 appels par heure ; On suppose que le nombre d'appels pendant un intervalle de temps quelconque suit une loi de Poisson, calculer la probabilité que le central téléphonique reçoive exactement 4 appels dans un intervalle de temps de 2 minutes.

UNIVERSITÉ DE CERGY **Année 2014-2015**

U.F.R. Économie & Gestion

Licence d'Économie et Finance / Licence de Gestion

MATH 201 : PROBABILITÉS

Chapitre IV : Couples de Variables aléatoires discrètes

1 Généralités

Définition 1. *Soit* $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathrm{P})$ *un espace probabilisé et* $\vec{C}$ *une application de* Ω *dans* $\mathbb{R}^2$

On note :
$$\begin{array}{rccl} \vec{C}: & \Omega & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & \omega & \longmapsto & (X(\omega), Y(\omega)) \end{array}$$

où X *et* Y *sont deux V.A. définies sur* $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathrm{P})$.

On dit que $\vec{C} = (X, Y)$ *est un couple de V.A. discrètes, ou plus simplement couple aléatoire discret, lorsque les V.A.* X *et* Y *sont discrètes.*

Exemple 1

On lance un dé. X est le numéro qui sort et Y vérifie $Y(\Omega) = \{0; 1\}$ où $Y = 0$ si le numéro est pair et $Y = 1$ si le numéro est impair.

Notations : Soit $\vec{C} = (X, Y)$ un couple aléatoire discret. On note, dans le cas fini :

1. $X(\Omega) = \{x_1, \cdots, x_n\}$ et $Y(\Omega) = \{y_1, \cdots, y_m\}$
2. $\mathrm{p}_{ij} = \mathrm{P}(\vec{C} = (x_i, y_j)) = \mathrm{P}((X = x_i) \cap (Y = y_j))$ pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, m]\!]$
3. $\mathrm{p}_{i\bullet} = \mathrm{P}(X = x_i)$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$
4. $\mathrm{p}_{\bullet j} = \mathrm{P}(Y = y_j)$ pour tout $j \in [\![1, m]\!]$

2 Loi conjointe, lois marginales

Définition 2. *Soit* $\vec{C} = (X, Y)$ *un couple aléatoire discret.*

L'application $\begin{array}{rccl} \mathrm{p} : & X(\Omega) \times Y(\Omega) & \longrightarrow & [0, 1] \\ & (x_i, y_j) & \longmapsto & \mathrm{p}_{ij} \end{array}$ *s'appelle la* ***loi conjointe*** *du couple* $\vec{C}$.

L'application $\mathrm{p}_{\bullet} : \begin{array}{ccc} X(\Omega) & \longrightarrow & [0,1] \\ x_i & \longmapsto & \mathrm{p}_{i\bullet} \end{array}$ *s'appelle la* ***première loi marginale*** *du couple* $\vec{C}$.
(C'est en fait la loi de X*)*

L'application $\mathrm{p}_{\bullet} : \begin{array}{ccc} Y(\Omega) & \longrightarrow & [0,1] \\ y_j & \longmapsto & \mathrm{p}_{\bullet j} \end{array}$ *s'appelle la* ***seconde loi marginale*** *du couple* $\vec{C}$.
(C'est en fait la loi de Y*)*

Remarque : Nous verrons que la loi conjointe d'un couple aléatoire $\vec{C}$ détermine complètement les lois marginales de $\vec{C}$, mais que la réciproque est fausse.

$X \backslash Y$	y_1	y_2	$\cdots$	y_j	$\cdots$	y_m	Loi de X
x_1	p_{11}	p_{12}	$\cdots$	p_{1j}	$\cdots$	p_{1m}	$\mathrm{p}_{1\bullet}$
x_2	p_{21}	p_{22}	$\cdots$	p_{2j}	$\cdots$	p_{2m}	$\mathrm{p}_{2\bullet}$
$\vdots$				$\vdots$			$\vdots$
x_i	p_{i1}	p_{i2}	$\cdots$	p_{ij}	$\cdots$	p_{im}	$\mathrm{p}_{i\bullet}$
$\vdots$				$\vdots$			$\vdots$
x_n	p_{n1}	p_{n2}	$\cdots$	p_{nj}	$\cdots$	p_{nm}	$\mathrm{p}_{n\bullet}$
Loi de Y	$\mathrm{p}_{\bullet 1}$	$\mathrm{p}_{\bullet 2}$	$\cdots$	$\mathrm{p}_{\bullet j}$	$\cdots$	$\mathrm{p}_{\bullet m}$	1

Théorème 1. *Soit* $\vec{C} = (X,Y)$ *un couple aléatoire discret. Avec les notations précédentes, on a :*

1. $\forall i \in [\![1,n]\!],\ \mathrm{p}_{i\bullet} = \sum_{j=1}^{m} \mathrm{p}_{ij}$. *2.* $\forall j \in [\![1,m]\!],\ \mathrm{p}_{\bullet j} = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{p}_{ij}$.

Remarque :

On a bien évidemment : $\sum_{i\in[\![1,n]\!]} \mathrm{p}_{i\bullet} = 1$ et $\sum_{j\in[\![1,m]\!]} \mathrm{p}_{\bullet j} = 1$ puisque les $\mathrm{p}_{i\bullet}$ (respectivement les $\mathrm{p}_{\bullet j}$) représentent la loi de X (resp. de Y).

Enfin, $\sum_{i\in[\![1,n]\!]} \sum_{j\in[\![1,m]\!]} \mathrm{p}_{ij} = \sum_{j\in[\![1,m]\!]} \sum_{i\in[\![1,n]\!]} \mathrm{p}_{ij} = \sum_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,m]\!]} \mathrm{p}_{ij} = 1$

Exercice 1

On lance un dé non truqué (hypothèse d'équiprobabilité). On considère les variables aléatoires X et Y définies sur $\{1;2;3;4;5;6\}$ par :

X prend la valeur 0 si le résultat est pair, et la valeur 1 sinon.

Y prend la valeur 0 si le résultat est 2 ou 4, et la valeur 1 sinon.

Donner les lois marginales et la loi conjointe dans un tableau.

Exercice 2

Une urne contient 3 boules blanches et 4 boules noires. On tire successivement deux boules de cette urne. On considère les V.A.R. X et Y définies par : X prend la valeur 1 si la première boule tirée est blanche et 0 sinon. Y prend la valeur 1 si la seconde boule tirée est blanche, et 0 sinon. Donner la table de la loi conjointe de (X, Y) dans le cas où les tirages se font avec remise, puis dans le cas où les tirages se font sans remise.

3 Lois conditionnelles

Définition 3. *Soit $\vec{C} = (X, Y)$ un couple aléatoire discret défini sur un espace probabilisé.*

*Pour tout indice j tel que $\mathrm{P}(Y = y_j) \neq 0$, on appelle **loi conditionnelle** de X sachant $Y = y_j$, l'application définie sur $X(\Omega)$, à valeurs dans $[0, 1]$ par :*

$$x_i \longmapsto \mathrm{P}_{(Y=y_j)}(X = x_i) = \frac{\mathrm{p}_{ij}}{\mathrm{p}_{\bullet j}}$$

*Pour tout indice i tel que $\mathrm{P}(X = x_i) \neq 0$, on appelle **loi conditionnelle** de Y sachant $X = x_i$, l'application définie sur $Y(\Omega)$, à valeurs dans $[0, 1]$ par :*

$$y_j \longmapsto \mathrm{P}_{(X=x_i)}(Y = y_j) = \frac{\mathrm{p}_{ij}}{\mathrm{p}_{i\bullet}}$$

Exercice 3

On considère deux V.A.R. X et Y discrètes sur un univers Ω telles que $X(\Omega) = Y(\Omega) = \{0; 1; 2\}$. Déterminer toutes les lois conditionnelles.

X \ Y	0	1	2	Loi de X
0	$0,1$	$0,2$	$0,3$	$0,6$
1	0	$0,1$	$0,2$	$0,3$
2	0	0	$0,1$	$0,1$
Loi de Y	$0,1$	$0,3$	$0,6$	1

4 Indépendance de V.A.R.

Définition 4. *Soit $\vec{C} = (X, Y)$ un couple aléatoire discret défini sur un espace probabilisé quelconque. On dit que les V.A.R.D. X et Y sont **indépendantes** si et seulement si*

$$\forall (i, j) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, m]\!], \mathrm{P}\Big((X = x_i) \cap (Y = y_j)\Big) = \mathrm{P}(X = x_i) \cdot (Y = y_j)$$

ou encore, avec les notations du paragraphe précédent :

$$\forall (i, j) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, m]\!], \mathrm{p}_{ij} = \mathrm{p}_{i\bullet} \cdot \mathrm{p}_{\bullet j}$$

Exercice 4

On lance un dé non truqué (hypothèse d'équiprobabilité). On considère les V.A. X et Y définies sur $[\![1;6]\!]$ par :

X prend la valeur 1 si le résultat est pair, et la valeur -1 sinon.

Y prend la valeur 2 si le résultat est 2 ou 5, et la valeur 1 sinon.

Donner le tableau de la loi conjointe et des lois marginales.

Combien y-a-t-il d'égalités à vérifier pour justifier que les V.A.R.D. X et Y dont indépendantes ?

Définition 5. *On peut généraliser cette notion à d V.A.R. discrètes définies sur le même espace probabilisé : elles sont dites* ***mutuellement indépendantes*** *si et seulement si :*

$$\forall \alpha_1 \in X_1(\Omega), \cdots, \forall \alpha_d \in X_d(\Omega),$$
$$\mathrm{P}\Big((X_1 = \alpha_1) \cap \cdots \cap (X_d = \alpha_d)\Big) = \mathrm{P}(X_1 = \alpha_1) \times \cdots \times \mathrm{P}(X_d = \alpha_d)$$

5 Somme de deux V.A.R. discrètes

5.1 Définitions - Exemples

Exercice 5

On lance un dé non truqué (hypothèse d'équiprobabilité). Soient X et Y les V.A.R discrètes définies par :

X est le chiffre obtenu et Y prend la valeur 3 si le résultat est un multiple de 3 et 1 sinon.

1. Donner la loi conjointe du couple (X, Y), et les lois marginales
2. Donner la loi de la V.A.R. $Z = X + Y$

Remarque : Lorsque pour une valeur $z \in Z(\Omega)$, on veut calculer $\mathrm{P}(Z = z)$, il faut considérer l'ensemble $\mathrm{I}_z = \{(i, j) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, m]\!] / x_i + y_j = z\}$. Cet ensemble décrit toutes les façons d'obtenir z en sommant $X + Y$. I_z étant une partie de $[\![1, n]\!] \times [\![1, m]\!]$ donc de $\mathbb{N}^2$, elle est dénombrable, et en utilisant la σ-additivité de P, on a :

$$\mathrm{P}(Z = z) = \mathrm{P}(X + Y = z) = \mathrm{P}\Big(\bigcup_{(i,j)\in \mathrm{I}_z} \Big((X = x_i) \cap (Y = y_j)\Big)\Big) = \sum_{(i,j)\in \mathrm{I}_z} \mathrm{p}_{ij}$$

Théorème 2. *Soient X et Y deux V.A.R. discrètes* ***indépendantes*** *à valeurs dans $\mathbb{N}$ (ou une partie de $\mathbb{N}$). La loi de $Z = X + Y$ est obtenue en faisant le produit de convolution de la loi de X par la loi de Y, i.e.*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \mathrm{P}(Z = n) = \sum_{p+q=n} \mathrm{P}(X = p) \times \mathrm{P}(Y = q) = \sum_{p=0}^{n} \mathrm{P}(X = p) \times \mathrm{P}(Y = n - p)$$

Exercice 6

On considère deux variables aléatoires X et Y de loi de Bernoulli de paramètres $\dfrac{1}{2}$ et $\dfrac{2}{3}$.

On suppose de plus que $P(\{X = 0\} \cap \{Y = 0\}) = \dfrac{1}{6}$.

1. Déterminer la loi du couple (X, Y). Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
2. On pose $U = X + Y$ et $V = X \cdot Y$. Déterminer la loi du couple (U, V), ainsi que les lois des variables aléatoires U et V. Les variables aléatoires U et V sont-elles indépendantes ?

Exercice 7 Sur $\Omega = \{-1; 0; 1\}$, on considère un couple (X, Y) de V.A. tel que, pour tout $(i; j) \in \Omega^2$,

$$P(\{X = i\} \cap \{Y = j\}) = \begin{cases} \frac{1}{9} & \text{si } i = j, \\ \frac{1}{12} & \text{si } i = 0 \text{ ou } j = 0 \text{ et } i \neq j, \\ \frac{1}{6} & \text{si } i = -j \text{ et } i \neq j. \end{cases}$$

1. Représenter ces données dans une table. Déterminer les lois marginales de X et Y.
2. Déterminer l'espérance de X, puis celle de Y.
3. Les V.A. X et Y sont-elles indépendantes ?
4. Déterminer la loi de probabilité de la variable $Z = X + Y$.

Exercice 8 La loi d'un couple (X, Y) de V.A. est donnée par le tableau suivant :

X \ Y	-2	-1	0	1	2	Loi de X
0	0	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{3}$
1	0	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{24}$	0	$\frac{1}{6}$
2	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	0	0	$\frac{1}{2}$
Loi de Y	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{24}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{12}$	1

1. Calculer $\mathrm{E}(X)$ et $\mathrm{E}\,(Y)$.
2. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?
3. On pose $Z = X + Y$. Donner le tableau de la loi de probabilité du couple (X, Z). Les V.A. X et Z sont-elles indépendantes ?

5.2 Quelques cas particuliers

5.2.1 Loi binomiale

Théorème 3. *Soient $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{B}(n', p)$ (le paramètre p doit être le même !) deux V.A.* ***indépendantes*** *: alors $X + Y \hookrightarrow \mathcal{B}(n + n', p)$*

Exemple 2

Considérons n V.A.R. **mutuellement indépendantes** qui suivent toutes la même loi de Bernouilli (ou loi Binomiale $\mathcal{B}(1, p)$). Alors $Z = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$.

5.2.2 Loi de Poisson

Théorème 4. *Soient $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\mu)$ deux V.A.* ***indépendantes*** *qui suivent des lois de Poisson ; alors $X + Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda + \mu)$*

5.3 Espérance

Théorème 5. *Soient X et Y deux V.A.R.D. définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathrm{P})$. On suppose que X et Y possèdent chacune une espérance. Alors*

1. *$X + Y$ possède une espérance et $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$.*
2. *Pour tous réels a et b, $W = aX + b$ possède une espérance et $E(W) = a.E(X) + b$.*

5.4 Variance et covariance

Théorème 6. *Soit X une V.A.R.D. définie sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathrm{P})$. On suppose que X possède une variance. Alors $Y = aX + b$ (où $(a, b) \in \mathbb{R}^2$) possède une variance et $V(Y) = a^2 V(X)$.*

Définition 6. *Soient X et Y deux V.A.R.D. définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathrm{P})$. On suppose que X et Y possèdent chacune une variance. On appelle* ***covariance*** *de X et Y, notée cov (X, Y), l'espérance du produit des V.A.R. centrées associées à X et à Y, i.e.*

$$cov\ (X, Y) = E[(X - E(X))(Y - E(Y))]$$

Théorème 7. *Avec les notations ci-dessus, on a : cov $(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$*

Théorème 8. *Soient X et Y deux V.A.R.D. définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathrm{P})$. On suppose que X et Y possèdent chacune une variance. Alors la V.A.R.D. $Z = X + Y$ possède également une variance et $V(X + Y) = V(X) + V(Y) + 2cov\ (X, Y)$*

5.5 Corrélation linéaire

Définition 7. *Soient X et Y deux V.A.R. discrètes sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathrm{P})$. On suppose que X et Y possèdent chacune une variance* ***non nulle****.*
On appelle ***coefficient de corrélation linéaire*** *de X et Y le nombre réel noté $\rho_{X,Y}$ défini par :*

$$\rho_{X,Y} = \frac{cov\ (X, Y)}{\sigma(X).\sigma(Y)}$$

où $\sigma(X)$ (respectivement $\sigma(Y)$) est l'écart-type de X (respectivement de Y) et $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

Remarque : Il existe une inégalité (dite de Cauchy-Schwarz) en analyse qui s'écrit :

$$\left|\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right| \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)^{1/2}$$

Cette inégalité s'applique ici : $|\text{cov }(X, Y)| \leqslant \sigma(X).\sigma(Y)$ et par conséquent : $\left|\rho_{X,Y}\right| \leq 1$

Théorème 9. *Soient X et Y deux V.A.R. discrètes sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathrm{P})$. On suppose que X et Y possèdent chacune une variance* ***non nulle****. On a l'implication*

$$X \textit{ et } Y \textit{ indépendantes } \Rightarrow cov \ (X, Y) = 0$$

$$X \textit{ et } Y \textit{ indépendantes } \Rightarrow V(X+Y) = V(X) + V(Y)$$

Remarque : Ces deux implications ne possèdent pas de réciproque !

Exercice 9

La loi d'un couple de V.A.R. discrètes (X, Y) est donné par le tableau ci-dessous : ($X(\Omega) = \{1; 2\}$ et $Y(\Omega) = \{1; 2; 3\}$).

$X \backslash Y$	1	2	3	Loi de X
1	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
2	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
Loi de Y	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1

Calculer cov (X, Y). X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 10 Une urne contient 31 jetons numérotés de 1 à 31. On tire avec remise 11 jetons et on appelle S la somme des numéros obtenus. Définir $S(\Omega)$ puis calculer son espérance et sa variance.

Exercice 11 X_1 et X_2 sont deux V.A.R. qui suivent des lois de Bernouilli de paramètres respectifs p_1 et p_2. Montrer que si X_1 et X_2 sont non corrélées (i.e. $\rho(X_1, X_2) = 0$) alors elles sont indépendantes.

Exercice 12 Soient X et Y deux V.A.R.D. sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathrm{P})$ telles qu'il existe deux réels $a \neq 0$ et b tels que $Y = aX + b$.

Déterminer $\rho_{X,Y}$ (on suppose que X possède une variance).

Exercice 13

Un dé équilibré est lancé n fois. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de chiffres pairs obtenus et Y la variable aléatoire égale au nombre de 1 obtenus.

1. Pour $n = 2$, explicitez la loi conjointe de X et Y. Calculez $\mathrm{cov}(X; Y)$.
2. Dans le cas général, calculez $\mathrm{V}(X)$, $\mathrm{V}(Y)$, $\mathrm{V}(X+Y)$ et en déduire $\mathrm{cov}(X; Y)$.
   Indication pour $\mathrm{V}(X+Y)$: quelle est la loi de $X + Y$?

UNIVERSITÉ DE CERGY **Année 2014-2015**

U.F.R. Économie & Gestion

Licence d'Économie & Finance / Licence de Gestion

MATH 201 : PROBABILITÉS

Chapitre V : Rappels et compléments sur l'intégration

1 Aire sous une courbe - Intégrale d'une fonction positive

Définition 1. *Soit f une fonction* ***positive*** *sur un intervalle $[a,b]$ ($a<b$). On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal du plan $(O;\vec{i},\vec{j})$.*

On appelle ***intégrale de la fonction*** *f de a à b (ou entre a et b), la mesure (en unités d'aire) de l'aire de la partie du plan limitée par l'axe (Ox), la courbe $\mathcal{C}_f$ et les droites d'équations $x=a$ et $x=b$, lorsque cette aire est finie.*

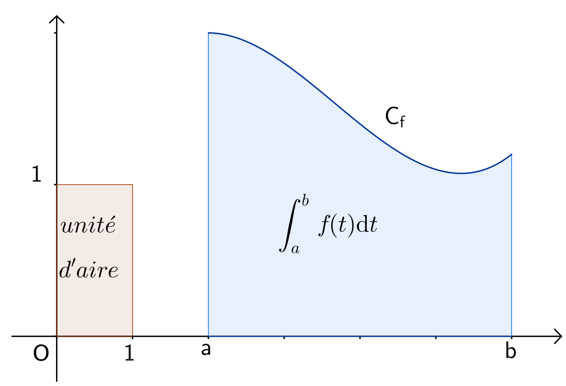


Figure 1 – Intégrale de f de a à b

L'intégrale de f entre a et b se note $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$.
Si l'intégrale de f entre a et b existe, on dit que f ***est intégrable sur*** *$[a,b]$.*

Remarques :

1. On dit que a et b sont les bornes de l'intégrale.

2. La variable « t » est dite muette : en effet on peut la remplacer par toute autre lettre (qui n'est pas déjà utilisée)
$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(u)\mathrm{d}u$$
3. L'unité d'aire est l'aire du rectangle de côtés 1 unité sur (Ox) et (Oy). Parfois on notera « u.a. » après la valeur de l'intégrale.
4. Il n'est pas nécessaire que la fonction f soit continue sur $[a, b]$, mais on verra que c'est une condition suffisante pour que l'intégrale de f sur $[a; b]$ soit définie.

Exemples 1 On suppose le plan muni d'un repère orthogonal.

1. Soit f la fonction constante égale à 5 sur $[-2; 7]$. Calculer $\int_{-2}^{7} f(t)\mathrm{d}t$.
2. Soit f la fonction affine définie par $f(x) = -x + 5$. Calculer $\int_0^3 f(t)\mathrm{d}t$.
3. Déterminer la valeur de l'intégrale de la fonction f sur $[-2; 3]$ dont la courbe en escalier est représentée ci-dessous :

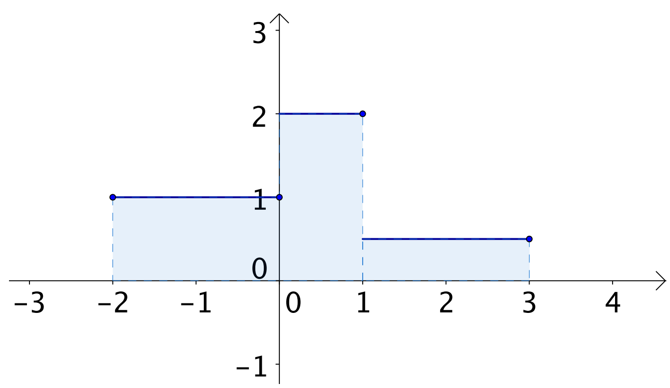


FIGURE 2 – Exemple 1

Dorénavant les fonctions considérées seront continues, même si cela n'est pas expressément précisé

Définition 2. *Soit f une fonction définie, positive et intégrable sur $[a, b]$ $(a < b)$. On définit l'intégrale de f de b à a par* $\int_b^a f(t)\mathrm{d}t = -\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$.

Propriété 1. *Dans ce qui suit, $[a, b]$ est un intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$, où $a < b$, et f et g deux fonctions définies positives et intégrables sur $[a, b]$.*

1. ***Relation de Chasles :***
   Pour tout $c \in [a, b]$, $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\mathrm{d}t$

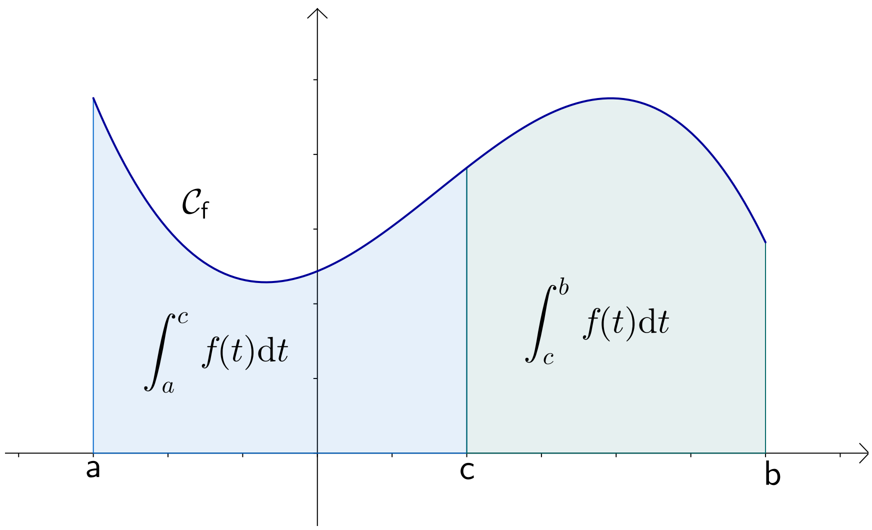


Figure 3 – Relation de Chasles

2. ***Linéarité de l'intégrale :*** *Pour tous réels positifs α et β :*

$$\int_a^b (\alpha f(t) + \beta g(t))\mathrm{d}t = \alpha \int_a^b f(t)\mathrm{d}t + \beta \int_a^b g(t)\mathrm{d}t$$

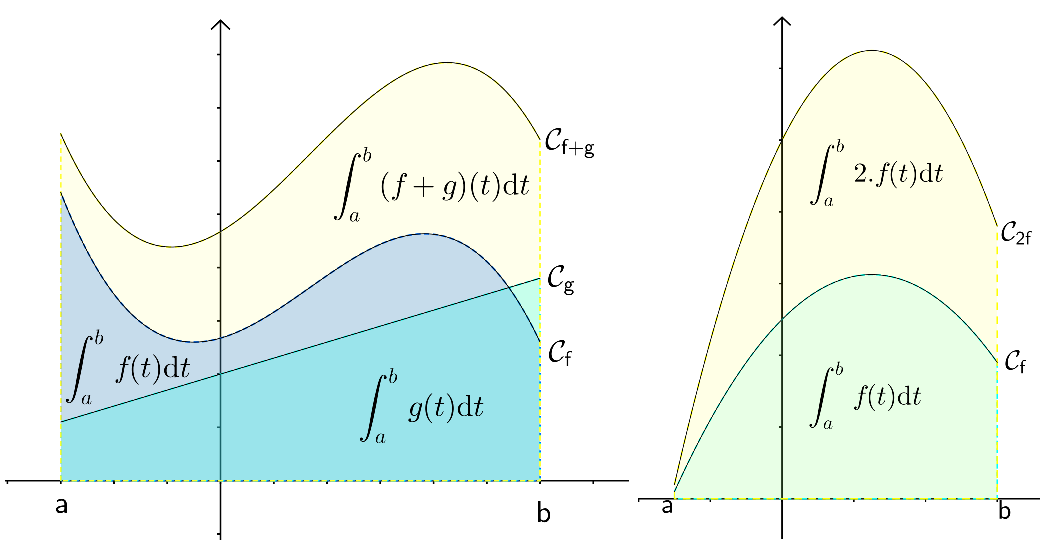


Figure 4 – Linéarité de l'intégrale

3. ***Lien avec la relation d'ordre :***
   Si $0 \leq f \leq g$ *sur* $[a;b]$*, alors* $0 \leq \int_a^b f(t)\mathrm{d}t \leq \int_a^b g(t)\mathrm{d}t$

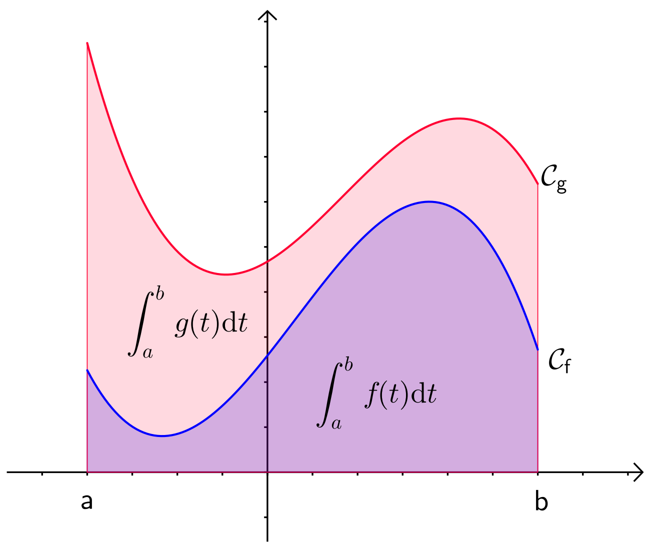


FIGURE 5 – Relation d'ordre

4. ***Valeur moyenne :*** *Il existe un unique réel, appelé valeur moyenne de* f *sur* $[a;b]$ *et noté* μ*, tel que :*

$$\mu = \frac{1}{(b-a)} \int_a^b f(x)dx$$

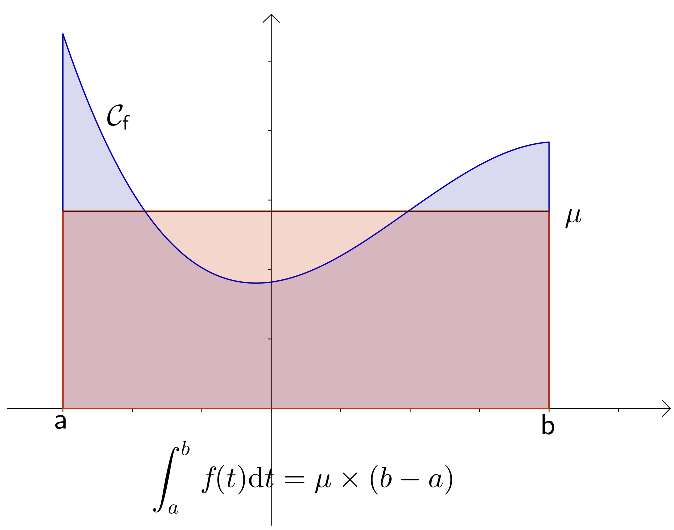


FIGURE 6 – Valeur moyenne

5. ***Inégalité de la moyenne :*** *Soient m et M deux réels tels que pour tout x de $[a;b]$ on ait : $m \leq f(x) \leq M$ alors : $m \leq \dfrac{1}{(b-a)} \displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t \leq M$*

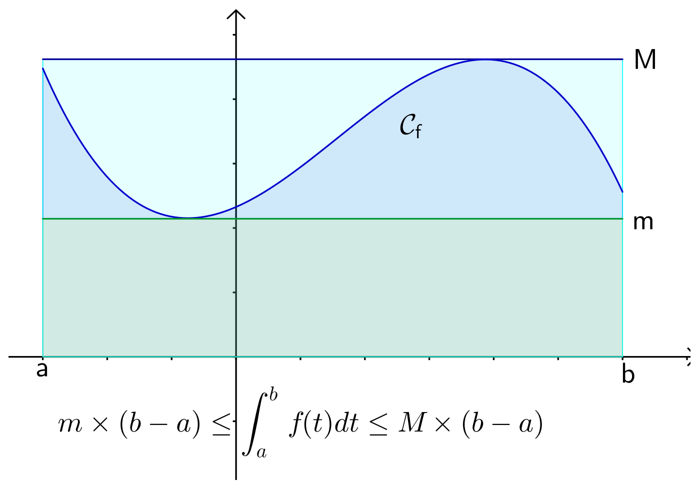


FIGURE 7 – Inégalité de la moyenne

2 Intégrale d'une fonction de signe quelconque

Définition 3. *Soit f une fonction négative sur un intervalle $[a,b]$. On considère la fonction $g = -f$: g est donc positive sur $[a,b]$. Supposons que g soit intégrable sur $[a,b]$.*

Graphiquement les courbes représentatives de f et g sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses. et les aires $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}'$ sont égales.

On définit l'intégrale de f sur $[a,b]$ par $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = -\mathcal{A} = -\int_a^b g(t)\mathrm{d}t$.

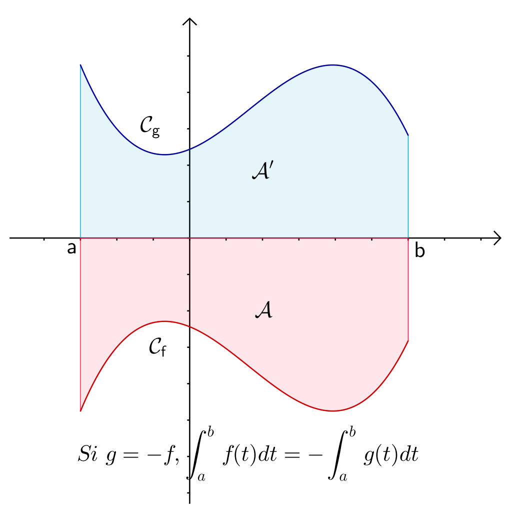


FIGURE 8 – Intégrale d'une fonction négative

Remarque : Puisque $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}'$ sont égales, et que $\mathcal{A} = \int_a^b (-f(t))\mathrm{d}t$, on a donc $\int_a^b (-f(t))\mathrm{d}t = -\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$.

La définition précédente nous permet de considérer les fonctions de signe quelconque sur un intervalle $[a, b]$.

Définition 4. *Soit f une fonction définie sur $[a_b]$ On note $a \leq a_1 \cdots a_n \leq b$ les racines de f sur $[a, b]$, de telle sorte que f soit de signe constant sur chacun des intervalles $[a_i, a_{i+1}]$ ($i \in [\![1, n-1]\!]$). Si f est intégrable sur chacun des intervalles $[a_i, a_{i+1}]$, on définit sur $[a, b]$*

$$f^+ \ : \ f^+(x) = \sup(f(x), 0) \text{ et } f^- \ : \ f^-(x) = \inf(f(x), 0)$$

Ainsi, f^+ est positive sur $[a, b]$ et f^- est négative, et $f = f^+ + f^-$.

L'intégrale de f de a à b est alors donnée par :

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_a^b f^+(t)\mathrm{d}t + \int_a^b f^-(t)\mathrm{d}t$$

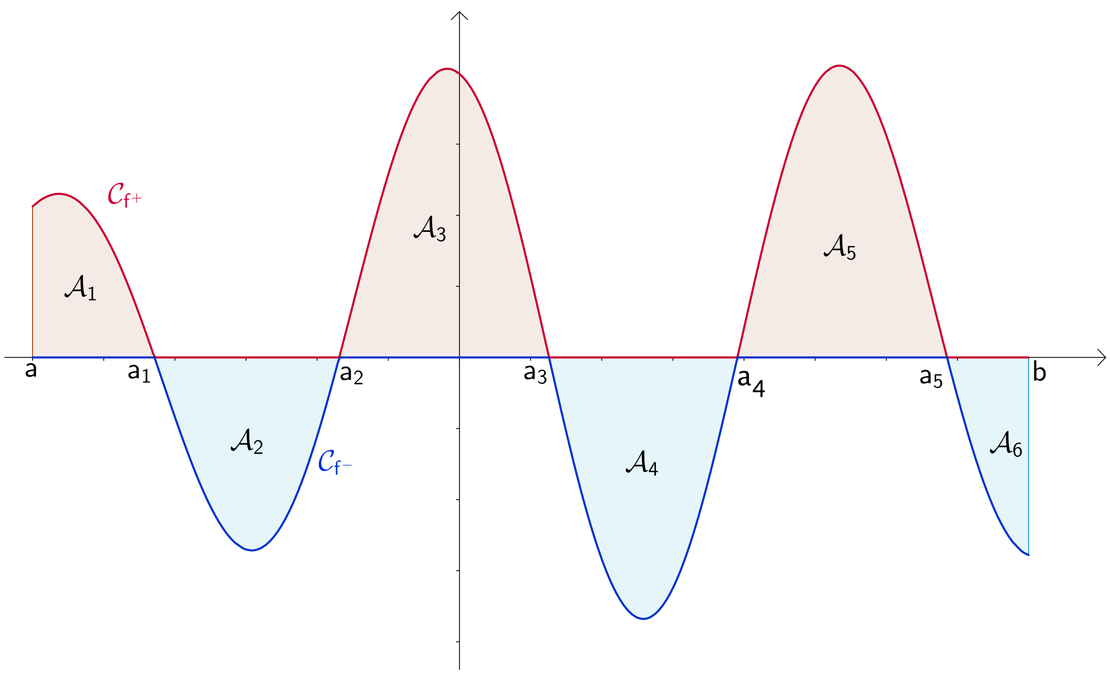


FIGURE 9 – Intégrale d'une fonction de signe quelconque

Sur la figure ci-dessus :

- l'aire $A = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 + A_6 = \int_a^b f^+(t)\mathrm{d}t - \int_a^b f^-(t)\mathrm{d}t$
- et $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = A_1 - A_2 + A_3 - A_4 + A_5 - A_6$

On dit que $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ représente l'aire algébrique de f entre a et b.

Définition 5. *Soit f définie et intégrable sur $[a, b]$*

1. *Pour tout réel $c \in [a, b]$, $\int_c^c f(t)\mathrm{dt} = 0$*
2. $\int_b^a f(t)\mathrm{dt} = -\int_a^b f(t)\mathrm{dt}$

On admet que les propriétés vues pour les fonctions positives restent valables pour l'intégrale des fonctions de signe quelconque.

Propriété 2. *Dans ce qui suit, $[a, b]$ est un intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$, $a < b$, et f et g deux fonctions définies et intégrables sur $[a, b]$.*

1. ***Relation de Chasles :***
Pour tout $c \in [a, b]$, $\int_a^b f(t)\mathrm{dt} = \int_a^c f(t)\mathrm{dt} + \int_c^b f(t)\mathrm{dt}$
2. ***Linéarité de l'intégrale :*** *Pour tous réels α et β :*
$$\int_a^b (\alpha f(t) + \beta g(t))\mathrm{dt} = \alpha \int_a^b f(t)\mathrm{dt} + \beta \int_a^b g(t)\mathrm{dt}$$
3. ***Lien avec la relation d'ordre :***
Si $f \leq g$ sur $[a; b]$, alors $\int_a^b f(t)\mathrm{dt} \leq \int_a^b g(t)\mathrm{dt}$
4. ***Valeur moyenne :*** *Il existe un unique réel, appelé valeur moyenne de f sur $[a; b]$ et noté μ, tel que :*
$$\mu = \frac{1}{(b-a)} \int_a^b f(x)dx$$
5. ***Inégalité de la moyenne :*** *Soient m et M deux réels tels que pour tout x de $[a; b]$ on ait : $m \leq f(x) \leq M$ alors :*
$$m \leq \frac{1}{(b-a)} \int_a^b f(t)\mathrm{dt} \leq M$$
6. ***Valeur absolue :*** *Si f est intégrable sur $[a, b]$ alors $|f|$ est également intégrable sur $[a, b]$ et*
$$\left| \int_a^b f(t)\mathrm{dt} \right| \leq \int_a^b |f(t)|\mathrm{dt}$$

3 Primitive d'une fonction continue

Définition 6. *Soit f une fonction définie sur **UN** intervalle I de $\mathbb{R}$. On appelle primitive de f toute fonction F définie et dérivable sur I telle que*

$$\forall x \in I,\ F'(x) = f(x)$$

3.1 Ensemble des primitives d'une fonction continue

Théorème 1. *Toute fonction continue sur un intervalle I admet des primitives sur I.*

Admis, c'est une conséquence immédiate du théorème [3] ci-dessous ■

Exemple 2 La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{3x}$ possède des primitives de la forme $F_k\ :\ F_k(x) = \frac{1}{3}e^{3x} + k$ où k est une constante réelle.

Théorème 2. *Soit f une fonction continue sur un intervalle I.*

1. *Si F est une primitive de f sur I, toute fonction G définie par* $\forall x \in I,\ G(x) = F(x) + c$ *où $c \in \mathbb{R}$ est également une primitive de f sur I.*
2. *Si F et G sont deux primitives sur I, alors il existe une constante réelle c, telle que pour tout $x \in I$, $G(x) = F(x) + c$.*
3. *Soit (x_0, y_0) où $x_0 \in I$. Il existe une unique primitive F de f telle que $F(x_0) = y_0$*

Remarque : Une autre façon de rédiger le point 3. du théorème précédent est de dire que si f une fonction continue sur un intervalle I et $x_0 \in I$, il existe une unique primitive de f qui s'annule en x_0. Cette primitive est $F :\ F(x) = G(x) - G(x_0)$ où G est une primitive quelconque de f.

3.2 Primitives de fonctions usuelles

Tableau des primitives des fonctions de référence :

fonction f : $f(x) = ...$	Primitives F : $F(x) = ...$	Ensemble de validité
$a(\in \mathbb{R})$	$a.x + k$	$\mathbb{R}$
x^n $(n \in \mathbb{N})$	$\dfrac{1}{n+1}x^{n+1} + k$	$\mathbb{R}$
x^n $(n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\})$	$\dfrac{1}{n+1}x^{n+1} + k$	$]-\infty; 0[$ ou $]0; +\infty[$
$\dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$2.\sqrt{x} + k$	$]0; +\infty[$
x^α $(\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\})$	$\dfrac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1} + k$	$]0; +\infty[$
$\dfrac{1}{x}$	$\ln x + k$	$]0; +\infty[$
e^x	$e^x + k$	$\mathbb{R}$

Exercice 1 Déterminer les primitives des fonctions suivantes :

1. f_1 : $f_1(x) = -x^3 + 5x^2 - 7x + 4$ $(x \in \mathbb{R})$
2. f_2 : $f_2(x) = \dfrac{-2x^3 + x - 5}{x^2}$ $(x \in \mathbb{R}^{+*})$
3. f_3 : $f_3(x) = 2^x$ $(x \in \mathbb{R})$

Opérations et primitives Soit u une fonction définie, continue et dérivable sur un intervalle I

fonction f : $f(x) = ...$	Primitives F : $F(x) = ...$	Conditions
$u' \cdot u^n (n \in \mathbb{N}^*)$	$\dfrac{1}{n+1}u^{n+1} + k$	$\emptyset$
$\dfrac{u'}{u^n}(n \in \mathbb{N}, n \geq 2)$	$\dfrac{-1}{n-1}\dfrac{1}{u^{n-1}} + k$	$\forall x \in I, u(x) \neq 0$
$\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u} + k$	$\forall x \in I, u(x) > 0$
$\dfrac{u'}{u}$	$\ln u + k$	$\forall x \in I, u(x) > 0$
$u'e^u$	$e^u + k$	$\emptyset$

Exercice 2 Déterminer les primitives des fonctions suivantes :

1. $f_1 : \ f_1(x) = x^2(x^3-1)^3 \ (I = \mathbb{R})$
2. $f_2 : \ f_2(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}} \ (I =]1;+\infty[)$
3. $f_3 : \ f_3(x) = \dfrac{1}{x \ln x} \ (I =]1;+\infty[)$
4. $f_4 : \ f_4(x) = e^{-6x} \ (I = \mathbb{R})$
5. $f_5 : \ f_5(x) = 3e^x(e^x-1) \ (I = \mathbb{R})$

3.3 Primitives et intégrale

Théorème 3. *Soit f une fonction continue sur un intervalle I et $a \in I$.*
La fonction $F : \ x \mapsto \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et est une primitive de f sur I.

Corollaire
Soit f une fonction continue sur un intervalle I et a et b deux réels de I. Alors

(i) f admet des primitives sur I

(ii) Pour toute primitive F de f sur I, on a $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = F(b) - F(a)$

Preuve :
Cela résulte du théorème précédent : la fonction $F : x \mapsto \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ est l'unique primitive de F qui s'annule en a , ainsi

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t - \int_a^a f(t)\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t$$

Si G est une autre primitive de f sur I, il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $G = F + k$ Alors $G(b) - G(a) = F(b) + k - (F(a) + k) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ ■

Exemple 3 Étudier le sens de variation de la fonction F définie par $F(x) = \int_1^x \ln(1+t^2)\mathrm{d}t$ (voir figure page suivante)

Exemple 4 Soit F la fonction définie par $F(x) = \int_0^x e^{\frac{-t^2}{2}}\mathrm{d}t$

1. Justifier que F est définie et dérivable sur $\mathbb{R}^+$, puis calculer $F'(x)$ pour $x \geq 0$
2. Démontrer que $\forall t \geq 2, e^{\frac{-t^2}{2}} \leq e^{-t}$. En déduire que F est majorée sur $\mathbb{R}^+$.

Notation : Soit f une fonction admettant des primitives sur un intervalle I : l'ensemble des primitives de f est parfois appelé **intégrale indéfinie** de f et notée $\int f(x)\mathrm{d}x = F(x) + k$ où F est une primitive de f

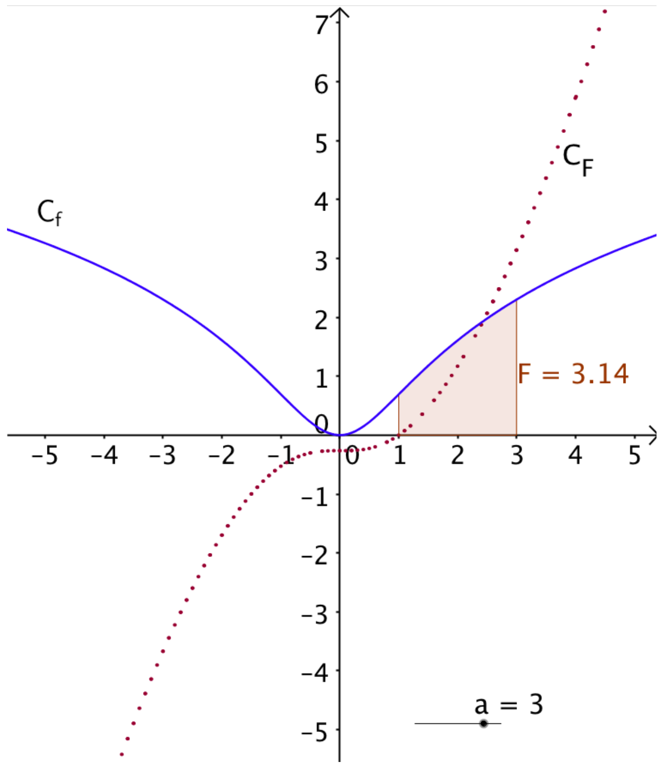


FIGURE 10 – Exemple 3

4 Méthodes d'intégration

Outre la recherche de primitive « directement », on dispose d'autres méthodes pour calculer certaines intégrales (Il faut cependant remarquer que pour certaines fonctions continues sur un intervalle I, qui possèdent donc des primitives sur I, les primitives ne peuvent s'exprimer à l'aide des fonctions de référence et des opérations usuelles, par ex. $x \mapsto e^{-x^2}$)

4.1 Quelques exemples de primitives "reconnaissables"

Exemples 5 Du type « $f = u'u^n$ »

1. $\displaystyle\int_1^2 x(x^2+1)^2 \mathrm{d}x$
2. $\displaystyle\int_0^1 e^x(e^x+1)^3 \mathrm{d}x$
3. $\displaystyle\int_1^e \frac{\ln x}{x} \mathrm{d}x$

Exemples 6 Du type « $\dfrac{u'}{u^n}$ »

1. $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{(2x-1)^3} \mathrm{d}x$
2. $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x}{(e^x+1)^2} \mathrm{d}x$

Exemple 7 **Du type « $\dfrac{u'}{u}$ »**

u ne s'annule pas sur $[a,b]$ (u est de signe constant sur $[a,b]$).

1. $\displaystyle\int_1^3 \frac{2x}{x^2+1}\mathrm{d}x$
2. $\displaystyle\int_0^{\ln 2} \frac{e^x}{e^x+1}\mathrm{d}x$
3. $\displaystyle\int_e^{e^3} \frac{1}{x\ln x}\mathrm{d}x$

Exemple 8 **Du type « $u'e^u$ »** $\displaystyle\int_0^1 2xe^{x^2}\mathrm{d}x$

Exemple 9 **Du type « $\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$ »**

$$\int_0^4 \frac{1}{\sqrt{2x+1}}\mathrm{d}x$$

4.2 Intégration par parties

Théorème 4. *Soient u et v deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur un segment $[a,b]$*

$$\int_a^b u'(x)v(x)\mathrm{d}x = \Big[u(x)v(x)\Big]_a^b - \int_a^b u(x).v'(x)\mathrm{d}x$$

La preuve est immédiate en utilisant la formule de dérivation du produit $(u.v)' = u'v + uv'$ que l'on intègre membre à membre. (et $\displaystyle\int_a^b (uv)'(x)\mathrm{d}x = \Big[u(x).v(x)\Big]_a^b$)

Exemples 10

1. $I_1 = \displaystyle\int_1^e x.\ln x\ \mathrm{d}x$. On pose $u'(x) = x$ et $v(x) = \ln x$
2. $I_2 = \displaystyle\int_0^1 x.e^x dx$. On pose $u'(x) = e^x$ et $v(x) = x$
3. $I_3(x) = \displaystyle\int_1^x \ln t\ \mathrm{d}t$ (où $x > 0$).

4.3 Méthode par changement de variable

Définition 7. *Soit f une fonction réelle définie sur un intervalle I à valeurs dans un intervalle $J \subset \mathbb{R}$. On dit que f est un **difféomorphisme** de classe $\mathcal{C}^1$ de I sur J lorsque f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I (i.e. f est continue, dérivable et la dérivée de f est continue), est bijective sur I et f^{-1} est également de classe $\mathcal{C}^1$ sur J.*

Théorème 5. *Soit f une fonction continue sur $[a, b]$. Soit φ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $\varphi([\alpha, \beta]) \subset [a, b]$.*

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\mathrm{d}x = \int_{\alpha}^{\beta} (f \circ \varphi)(t)\varphi'(t)\mathrm{d}t$$

On peut utiliser ce théorème de deux manières :

•1) En pratique on pose $x = \varphi(t)$ alors $\mathrm{d}x = \varphi'(t)\mathrm{d}t$ et on calcule les nouvelles bornes :

Exemples 11

1. $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{x}{2x+1}\mathrm{d}x$. On pose $x = \varphi(t) = \dfrac{t-1}{2}$
2. $I = \displaystyle\int_1^e x \ln x \; \mathrm{d}x$. On pose $x = \varphi(t) = e^t$

Remarque : Ne pas utiliser cet énoncé pour une simple « substitution » qui ne présente pas grand intérêt : par exemple, pour $\displaystyle\int_0^1 (t+1)e^{t^2+2t}\mathrm{d}t$, si on pose $x = t^2 + 2t$ alors $\mathrm{d}x = (2t + 2)\mathrm{d}t$ et $I = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^3 e^x \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left[e^x\right]_0^3 = \frac{1}{2}(e^3 - 1)$. Ce résultat aurait pu être obtenu directement en remarquant que la fonction à intégrer est de la forme « $u'e^u$ ».

• 2) Pour obtenir $\displaystyle\int f(x)\mathrm{d}x$, on peut également poser $t = \varphi(x)$ mais dans ce cas là on ne pourra réaliser un changement de variable que si φ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme : en particulier il faudra s'assurer que φ que bijective : ce qui sera le cas lorsque φ est continue et strictement monotone.

Théorème 6. *Soit f une fonction continue sur $[a, b]$. Soit $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$ un $\mathcal{C}^1$- difféomorphisme. On pose $\alpha = \varphi(a)$ et $\beta = \varphi(b)$.*

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_{\alpha}^{\beta} (f \circ \varphi^{-1})(\varphi^{-1})'(t)\mathrm{d}t$$

Exemples 12

En pratique on pose $t = \varphi(x)$ alors $x = \varphi^{-1}(t)$ et $\mathrm{d}x = (\varphi^{-1})'(t)\mathrm{d}t$

1. $I = \displaystyle\int_1^2 \frac{2\mathrm{d}x}{e^x - e^{-x}}$. On fait le changement de variable : $t = e^x = \varphi(x) \Longleftrightarrow x = \ln t$
2. $I = \displaystyle\int_1^2 \frac{\ln x}{\sqrt{1+x}}\mathrm{d}x$. On pose $t = \sqrt{1+x} = \varphi(x)$ et $x = \varphi^{-1}(t) = t^2 - 1$
3. Soit f une fonction impaire définie sur $\mathbb{R}$: alors $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = 0$

UNIVERSITÉ DE CERGY **Année 2014-2015**

U.F.R. Économie & Gestion

Licence d'Économie & Finance / Licence de Gestion

MATH 201 : PROBABILITÉS

Chapitre VI : Variables aléatoires à densité

1 Généralités

1.1 Introduction

• On considère l'épreuve aléatoire suivante : « on tire un nombre réel quelconque au hasard dans $[0, 1]$ » . On suppose les tirages équiprobables.

• Quelle est la probabilité que ce nombre tiré soit égal à 1 ? $0,65$? $\sqrt{2}$? 17 ? On note X la V.A.R. égale au nombre tiré au hasard.

• La probabilité d'obtenir 17 est clairement nulle (car 17 n'appartient pas à $[0; 1]$!). Supposons que la probabilité d'obtenir chaque réel de $[0; 1]$ soit égale à un réel $p > 0$ (situation d'équiprobabilité), pourquoi aboutit-on à une contradiction ?

1.2 Intégrale généralisée d'une fonction

Définition 1. • *Soit f une fonction définie et continue (par morceaux au moins) sur un intervalle $I = [a, b[$ (où b peut être $+\infty$) (Respect. sur un intervalle $I =]a, b]$ où a peut être $-\infty$). On dit que l'intégrale de f sur I est convergente si la fonction $F \mapsto F(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ (respectivement $F(x) = \int_x^b f(t)\mathrm{d}t$), où $x \in I$, a une limite **finie** quand x tend vers b (resp. x tend vers a).*

• *Cette limite est alors appelée **intégrale généralisée** de f sur I et est notée $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$. On a ainsi :*

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \lim_{\substack{x \to b \\ x < b}} \int_a^x f(t)\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} \int_x^b f(t)\mathrm{d}t$$

• *Si la limite n'existe pas (ou est infinie), on dit que l'intégrale de f sur I est divergente.*

Illustration :

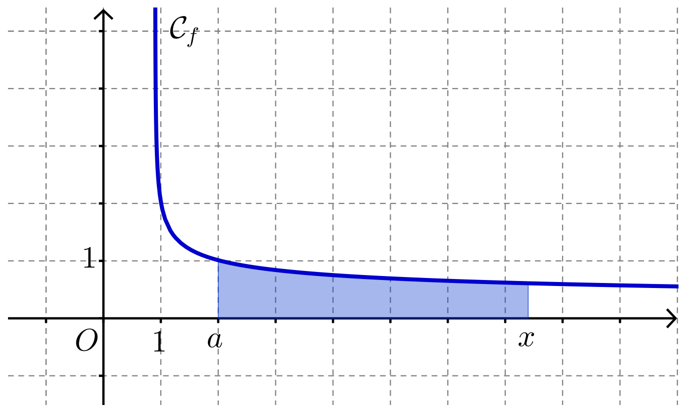


FIGURE 1 – $F(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ est représentée par l'aire colorée

Lorsque f est définie et continue sur un intervalle **ouvert** $]a, b[$ on dira que l'intégrale $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ est convergente si pour tout réel c intérieur à $]a, b[$ (ou ce qui est équivalent, si pour un réel $c \in]a; , b[$), les deux intégrales $\int_a^c f(t)\mathrm{d}t$ et $\int_c^b f(t)\mathrm{d}t$ sont convergentes.

Par exemple, l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ est convergente si et seulement si $\int_{-\infty}^{0} f(t)\mathrm{d}t$ et $\int_{0}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ sont toutes les deux convergentes, et dans ce cas

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{0} f(t)\mathrm{d}t + \int_{0}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$$

Exemples 1 L'intégrale de f sur I est-elle convergente ?

1. Soit f définie sur $I = [0, +\infty[$ par $f(t) = e^{-t}$
2. Soit f définie sur $I = [1, +\infty[$ par $f(t) = \dfrac{1}{t^\alpha}$ où α est un réel différent de 1

Exemples 2

1. Les intégrales $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln t}{t}\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t}\,\mathrm{d}t$ sont-elles convergentes ?
2. Les intégrales $\displaystyle\int_1^e \frac{1}{t.\ln t}\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_e^{+\infty} \frac{1}{t.\ln t}\,\mathrm{d}t$ sont-elles convergentes ?
3. Pour quelles valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$, l'intégrale $I_\alpha = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{\alpha t}\,\mathrm{d}t$ est-elle convergente ?

Théorème 1. *Soit f une fonction continue (par morceaux) et strictement positive sur $[a, b[$, l'intégrale de f sur $[a, b[$ converge si et seulement si la fonction $F : x \mapsto \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ est majorée sur $[a, b[$.*

Théorème 2. *Soient f et g deux fonctions continues (par morceaux) et positives sur $[a, b[$ et telles que pour tout $x \in [a, b[$, $0 \leq f(x) \leq g(x)$*

- *Si $\int_a^b g(t)\mathrm{d}t$ converge, alors $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ converge aussi.*
- *Si $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ diverge, alors $\int_a^b g(t)\mathrm{d}t$ diverge aussi.*

Exemple 3 Montrer que $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\mathrm{d}t$ est convergente.

1.3 Application à la fonction de répartition d'une V.A.R.

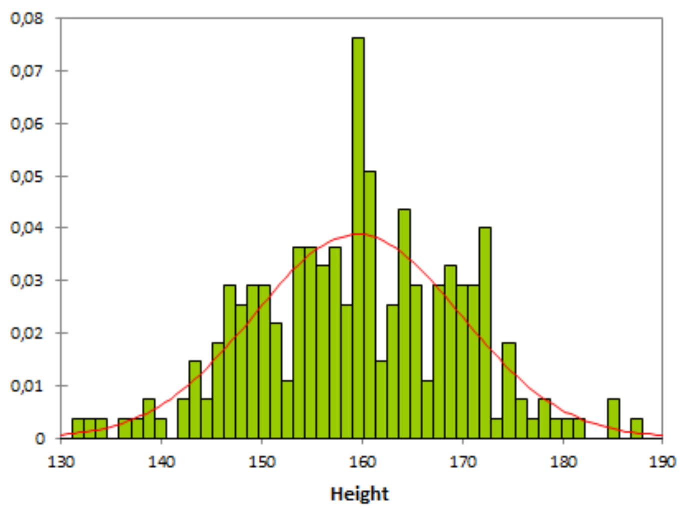


FIGURE 2 – Lien discret (histogramme) - continu (courbe)

Définition 2. *Soit X une V.A.R. sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathrm{P})$. On dit que X est une V.A.R.* ***à densité****, s'il existe une fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ telle que :*

1. $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \geq 0.$
2. *f est continue sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en un nombre fini de réels (où elle admet cependant une limite réelle (i.e. finie) à gauche et une limite réelle à droite.)*
3. *$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\ \mathrm{d}t$ existe et vaut 1.*

On dit que f est ***une densité de probabilité*** *de X et que X est V.A.R. à densité f.*
Dans ce cas, la fonction de répartition de X, notée F_X, est définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\ \mathrm{d}t$$

Théorème 3. *Soit X une V.A.R. à densité sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathrm{P})$ de densité f, alors la fonction de répartition F_X de X vérifie :*

1. *F_X est croissante sur $\mathbb{R}$.*
2. *$\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$ et $\lim_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$.*
3. *F_X continue en tout point de $\mathbb{R}$.*
4. *En tout réel x_0 où f est continue, F est dérivable et $F'(x_0) = f(x_0)$*

Admis

Remarque : Quelle tribu choisir pour étudier une loi de probabilité continue ?

La tribu formée des parties de $\mathbb{R}$ est très importante, trop ...

On peut se donner comme tribu **la tribu Borélienne (1898)** qui est la tribu engendrée par les intervalles ouverts et on peut même se restreindre aux intervalles ouverts d'extrémités les rationnels : cette famille génératrice est alors dénombrable.

Exemple 4 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = 0 & \text{si } x < -1 \text{ ou } x > 1 \\ f(x) = x + 1 & \text{si } x \in [-1; 0] \\ f(x) = -x + 1 & \text{si } x \in [0; 1] \end{cases}$$

Montrez que f est une densité de probabilité.

Proposition 1. *Si F est une fonction définie et continue sur $\mathbb{R}$, croissante sur $\mathbb{R}$, et si vérifie $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$ et $\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$, alors F est la fonction de répartition d'une V.A.R. X à densité, dont une densité de X est donnée par la dérivée de F aux réels où celle-ci existe.*

Admis

Exemple 5 Soit F définie par :

$$\begin{cases} \text{si } x < 0, & F(x) = \dfrac{e^x}{2} \\ \\ \text{si } 0 \leq x < 2, & F(x) = \dfrac{x^2 + 8}{16} \\ \\ \text{si } x \geq 2, & F(x) = 1 - \dfrac{1}{4} e^{2-x} \end{cases}$$

Montrer que F est la fonction de répartition d'une V.A. dont vous préciserez la densité de probabilité

Propriétés : Soit X une V.A.R. de densité f :

1. Pour tout $a \in \mathbb{R}$, $\mathrm{P}(X = a) = 0$.
2. Pour tous réels a et b tels que $a < b$: $\mathrm{P}(a < X < b) = \mathrm{P}(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$
3. Pour tout réel a :
$$\mathrm{P}(X \leq a) = \mathrm{P}(X < a) = \int_{-\infty}^{a} f(t)\ \mathrm{d}t$$
$$\text{et}\ \ \mathrm{P}(X \geq a) = \mathrm{P}(X > a) = \int_{a}^{+\infty} f(t)\ \mathrm{d}t$$

2 Espérance - Variance

Définition 3. *Soit X une V.A.R. à densité et f une densité de X.*

1. *On appelle **espérance** de X, lorsqu'elle existe, l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} t.f(t)\mathrm{d}t$*
2. *Si X admet une espérance, on appelle **variance** de X, lorsqu'elle existe, l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} [t - E(X)]^2.f(t)\mathrm{d}t = E\Big([X - E(X)]^2\Big)$.*
3. *Si X admet une variance, on appelle écart-type de X le réel $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.*

Remarques :

1. Si X admet une variance, celle-ci est positive (car f l'est) : donc l'écart-type de X existe.
2. Si X n'admet pas d'espérance, X ne peut pas admettre de variance.

Exemple 6 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = 0 & \text{si } x < -1 \text{ ou } x > 1 \\ f(x) = x + 1 & \text{si } x \in [-1; 0] \\ f(x) = -x + 1 & \text{si } x \in [0; 1] \end{cases}$$

1. Montrez que f est une densité de probabilité d'une V.A.R X.
2. Déterminer la fonction de répartition F de X
3. Calculer $\mathrm{P}(-0,2 \leq X \leq 0,5)$
4. Calculer $E(X)$ puis $V(X)$.

Exemple 7 Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3}{32}x(4 - x) & \text{si } 0 \leq x \leq 4 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Justifier que f est bien une densité de probabilité d'une V.A.R. X.
2. Déterminer la fonction de répartition de X.
3. Calculer $E(X)$ et $V(X)$.

Théorème 4. *Soit X une V.A.R. admettant une densité f et admettant une espérance. Soient $a \neq 0$ et b deux réels.*

La V.A.R. $Y = aX + b$ admet une espérance et $E(Y) = aE(X) + b$

Remarque - cas général : Théorème dit "du transfert" Soit X une V.A.R. admettant une densité f. Soit φ une fonction numérique continue (sauf éventuellement en un nombre fini de réels) telle que $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)f(t)\mathrm{d}t$ soit absolument convergente, alors la V.A.R. $Y = \varphi(X)$ admet une espérance, et :

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)f(t)\ \mathrm{d}t$$

Théorème 5. *Soient X et Y deux V.A.R. à densité possédant une espérance : alors la V.A. $X+Y$ possède une espérance et*

$$E(X+Y) = E(X) + E(Y)$$

Théorème 6. *Soit X une V.A.R. admettant une densité f et possédant une espérance, alors la variance de X, $V(X)$ existe si et seulement si $E(X^2)$ existe et on a alors :*

$$V(X) = E(X^2) - \Big(E(X)\Big)^2$$

Conséquence : si $Y = aX + b$ (où a et b sont deux réels) : $V(aX + b) = a^2 V(X)$

3 Quelques exemples de V.A.R à densité

3.1 Loi uniforme

Définition 4. *Soit X une V.A. réelle définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathrm{P})$. On dit que X suit une **loi uniforme sur l'intervalle [a ; b]** si X admet pour densité de probabilité la fonction f définie par :*

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{1}{b-a} & \text{si } x \in [a;b] \\ f(x) = 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On note $X \hookrightarrow \mathcal{U}([a;b])$

On s'assure aisément qu'une telle fonction vérifie les propriétés qui font d'elle une densité de probabilité

Propriété : La fonction de répartition de la loi uniforme sur $[a,b]$ est donnée par :

$$\begin{cases} F(x) = 0 & \text{si } x < a \\ F(x) = \displaystyle\int_a^x \frac{\mathrm{d}t}{b-a} = \frac{x-a}{b-a} & \text{si } a \leq x \leq b \\ F(x) = 1 & \text{si } x > b \end{cases}$$

Illustration :

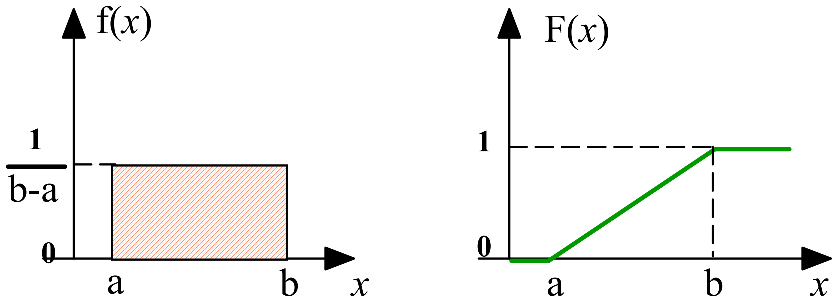


FIGURE 3 – Loi uniforme sur $[a, b]$ et fonction de répartition

Théorème 7. *Soit X une V.A.R. qui suit la loi $\mathcal{U}([a; b])$. Alors*

$$E(X) = \frac{a+b}{2} \text{ et } V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

Exemple 8

Une machine fabrique des pièces de 40 cm de longueur. On sait que les longueurs varient dans un intervalle centré en 40 de longueur 4cm. On suppose que les erreurs sont uniformément distribuées dans cet intervalle. Montrer que l'espérance de l'erreur est alors nulle.

3.2 Loi Exponentielle

Définition 5. *Soit X une V.A.R. définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathrm{P})$. On dit que X suit une* ***loi exponentielle de paramètre*** *$\lambda > 0$, si X admet pour densité de probabilité la fonction f définie par :*

$$\begin{cases} f(x) = \lambda e^{-\lambda x} & si\ x \geq 0 \\ f(x) = 0 & sinon \end{cases}$$

On note $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$

On vérifie qu'une telle fonction f possède les propriétés d'une densité de probabilité d'une V.A.

Illustration :

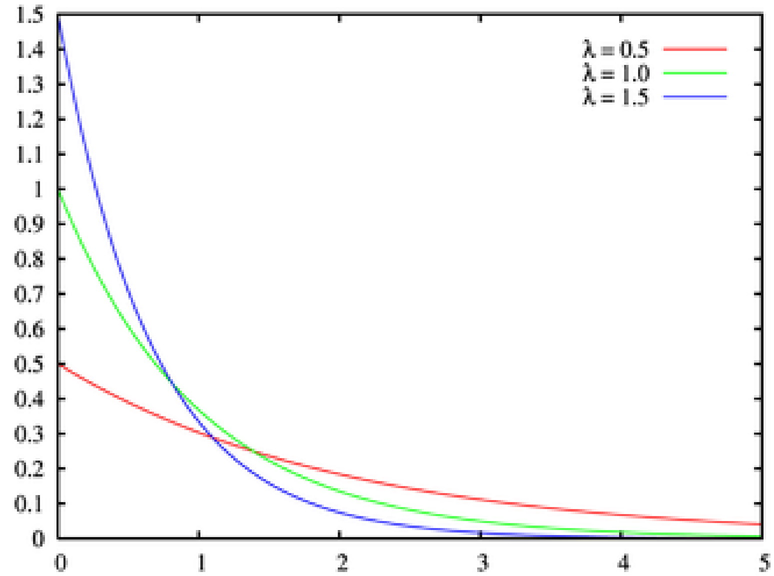


FIGURE 4 – Lois exponentielles pour différents paramètres λ

Propriété 1. *Soit X une V.A.R, $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$*
La fonction de répartition F est :
Si $x \geq 0$, $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \Big[-e^{-\lambda t} \Big]_0^x = 1 - e^{-\lambda x}$
Si $x < 0$, $F(x) = 0$
On pourra retenir par coeur cette expression de la fonction de répartition.

Exemple 9
La durée de vie d'une ampoule d'un certain modèle suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0,002$. On note X la V.A. égale à la durée de vie d'une telle ampoule. $X \hookrightarrow \mathcal{E}(0,002)$.

1. Calculer la probabilité qu'une ampoule (de ce modèle) ait une durée de vie supérieure à 800 heures
2. Calculer la probabilité qu'une ampoule ait une durée de vie inférieure à 500 heures.
3. Déterminer la valeur de T pour laquelle $\mathrm{P}(X \leq T) = \mathrm{P}(X \geq T)$

Théorème 8. *Soit X une V.A.R. qui suit la loi $\mathcal{E}(\lambda)$. Alors*

$$E(X) = \frac{1}{\lambda} \text{ et } V(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$

Exemple 10 La durée de vie X d'un appareil est une V.A.R. à densité qui suit la loi $\mathcal{E}(\lambda)$. . Montrer que dans ce cas cet appareil a une « vie sans vieillissement »
Réponse : Soient $x > 0$ et $T \in \mathbb{R}$. Il faut montrer que

$$\mathrm{P}_{X \geq T}(X \geq T + x) = \mathrm{P}(X \geq x)$$

(La probabilité que l'appareil « vive » au moins x unités de temps supplémentaires sachant qu'il a déjà vécu T unités ne dépend pas de T)