UNIVERSITÉ DE CERGY

U.F.R. ÉCONOMIE et GESTION

Examen d'Algèbre

Session :Avril 2014- Durée :2heures

Enseignant responsable :ANDRIANASITERA

Licence. 2ème Année

CALCULATRICES ET PORTABLES NON AUTORISES.
TOUS LES RÉSULTATS DOIVENT ETRE JUSTIFIÉS CLAIREMENT.
IL SERA TENU COMPTE DU SOIN APPORTÉ A LA RÉDACTION.
LES PROBLEMES PROPOSÉS SONT INDÉPENDANTS ET PEUVENT ETRE TRAITÉS DANS L'ORDRE SOUHAITE PAR LE CANDIDAT.

****

Questions de cours(2pts)

On considère l'application linéaire f d'un espace vectoriel E de dimension n dans un espace vectoriel F de dimension m.

a) Donner la définition de $Kerf$
b) Donner la relation entre la dimension de $Kerf$ et le rang de f
c) Donner la condition pour que f soit injective
d) Donner la condition pour que f soit surjective

Exercice1(2pts)

On considère dans $\mathbb{R}^4$ la famille suivante :
$F=\{(1,1,1,2),(0,2,-1,1),(1,-1,2,1),(-1,3,-3,0)\}$

a)Cette famille est –elle libre ou liée ? (justifier votre réponse)

b)Déterminer le rang de F

Exercice2(4pts)

$$\text{Soit } A(m)=\begin{pmatrix} 1 & m & m^2 \\ 0 & 1 & 2m \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad m\in\mathbb{R}$$

1)Montrer que $A(m).A(p)=A(m+p) \quad \forall(m,p)\in\mathbb{R}^2$

2)En déduire $[A(m)]^n \ \forall n\in\mathbb{N}$

3)Montrer que $A(m)$ est inversible et calculer $[A(m)]^{-1}$ en remarquant que $A(0)=I$

PROBLEME (12pts)

On considère l'application linéaire f de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par :
$$f(x,y,z)=(2x+2y-z,-2x-3y+2z,x+2y)$$

1/ Préciser la matrice M de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

2/. Déterminer $Kerf$ et $\operatorname{Im} f$

3/. Calculer le polynôme caractéristique $P_M(\lambda)$

4/. Déterminer les valeurs propres de M et les sous espaces propres associés

5/ Justifier que M est diagonalisable et donner une matrice diagonale D semblable à M.

6/En déduire la matrice de passage P associée à D et écrire la relation qui lie les matrices M ,P et D puis exprimer M en fonction de P et de D.

7/ Calculer ensuite : $M^3+M^2-5M+3I$. Justifier pourquoi ce résultat était prévisible

8/ Calculer ensuite : $(I-M)(M+3I)$.

En déduire l'expression de l'inverse de M en fonction de M et de I ,calculer ensuite M^{-1}

Questions de cours(2pts)

Soit $f : E \mapsto F$

a) $Kerf = \left\{\vec{x} \in E / f\left(\vec{x}\right) = \vec{0}_F\right\}$ **(0. 5)**

b) $\dim Kerf + rg(f) = \dim E$ d'après le théorème des dimensions **(0. 5)**

c) f est injective si $Kerf = \left\{\vec{0}_E\right\}$ ou si $\dim Kerf = 0$ **(0.5)**

d) f est surjective si $rgf = \dim F$ ou si $\operatorname{Im} f = F$ **(0.5)**

Exercice1(2pts)

Soit $F = \{(1,1,1,2),(0,2,-1,1),(1,-1,2,1),(-1,3,-3,0)\}$

a) $(1,-1,2,1) = (1,1,1,2) - (0,2,-1,1)$ donc cette famille est liée **(0.5)**

b) D'après a $Vect[F] = Vect[\{(1,1,1,2),(0,2,-1,1),(-1,3,-3,0)\}]$ **(0.25)**

or $(-1,3,-3,0) = -(1,1,1,2) + 2(0,2,-1,1)$ **(0.25)**

donc $Vect[F] = Vect[\{(1,1,1,2),(0,2,-1,1)\}]$ **(0.25)** comme $(1,1,1,2)$ et $(0,2,-1,1)$ sont non colinéaires **(0.25)** $rg[F] = 2$ **(0. 5)**

Exercice2(5pts)

$$\text{Soit } A(m) = \begin{pmatrix} 1 & m & m^2 \\ 0 & 1 & 2m \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad m \in \mathbb{R}$$

1)Montrons que $A(m).A(p) = A(m+p) \quad \forall (m,p) \in \mathbb{R}^2$

$$A(m).A(m) = \begin{pmatrix} 1 & m & m^2 \\ 0 & 1 & 2m \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & p & p^2 \\ 0 & 1 & 2p \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & p+m & p^2+2p+m^2 \\ 0 & 1 & 2p+2m \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} (0.5)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & p+m & (p+m)^2 \\ 0 & 1 & 2(p+m) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A(m+p)(0.5)$$

2)Par itération

$$[A(m)]^n = A(m).A(m)...A(m) = A(m+m+...+m)(0.5) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$= A(nm)(0.5)$$

3) $\det A(m) = 1 \neq 0$ **(0.5)** donc $A(m)$ est inversible $\forall m$ **(0.5)**

$A(0) = A(m-m) = A(m).A(-m) = I(1)$

$$\Rightarrow [A(m)]^{-1} = A(-m) = \begin{pmatrix} 1 & -m & m^2 \\ 0 & 1 & -2m \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} (1)$$

PROBLEME (13pt)

1) $[0.5pt]$

$$M=\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -2 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

2) $[2pt]$

$Kerf=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\ /\ f(x,y,z)=(0,0,0)\}$

$$f(x,y,z)=(0,0,0)\Leftrightarrow\begin{cases} 2x+2y-z=0 \\ -2x-3z-2z=0\,(0.5) \\ x+2y \qquad\quad =0 \end{cases}$$

$$or\ \det M=\begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -2 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=-3\neq 0$$

donc $Kerf=\{(0,0,0)\}$ **(0.5)**

D'après le théorème des dimensions. $\dim Kerf+\dim \mathrm{Im}(f)=3\Rightarrow \dim\mathrm{Im}(f)=3$

par suite $\mathrm{Im}(f)=\mathbb{R}^3$ **(1)**

3) $[1pt]$ $P_M(\lambda)=\det(M-\lambda I)$ I étant la matrice identité.

$$P_M(\lambda)=\begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & -1 \\ -2 & -3-\lambda & 2 \\ 1 & 2 & -\lambda \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & -1 \\ -1+\lambda & -3-\lambda & 2 \\ -1+\lambda & 2 & -\lambda \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & -1 \\ 0 & -1-\lambda & 1 \\ 0 & 4 & -1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$=(1-\lambda)\begin{vmatrix} -(1+\lambda) & 1 \\ 4 & -(1+\lambda) \end{vmatrix}=(1-\lambda)\left[(1+\lambda)^2-4\right]=-(1-\lambda)^2(\lambda+3)$$

4) $[2,5pt]$ On sait que les valeurs propres de M sont les zéros du polynôme caractéristique. on résout donc $P_M(\lambda)=0$

$P_M(\lambda)=0\Leftrightarrow-(1-\lambda)^2(3+\lambda)=0\Leftrightarrow\lambda=1\ ou\ \lambda=-3\Rightarrow Sp(M)=\{1,-3\}$ (1)

On détermine les sous espaces propres en résolvant pour chaque valeur propre le système $(M-\lambda I)X=0$ avec $X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

-Pour $\lambda=1$ on a :

$$(M-I)X=0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & -4 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x+2y-z=0$$

$\Leftrightarrow z=x+2y \quad (x,y)\in \mathbb{R}^2$

$E_{\lambda=1}=Ker(M-I)=Vect[(1,0,1),(0,1,2)](1)$

-Pour $\lambda=-3$ on a :

$$(M+3I)X=0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x+2y-z=0 \\ -2x+2z=0 \\ x+2y+3z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-2x \\ z=x \end{cases} \quad x\in\mathbb{R}$$

$E_{\lambda=-3}=Ker(M+3I)=Vect[(1,-2,1)](0.5)$

5) $[1.5pt]$ D'après les résultats de la 3ème équation $\dim E_{\lambda=1}=2$ et $\dim E_{\lambda=-3}=1$ donc $\dim E_{\lambda=1}+\dim E_{\lambda=-3}=3$ par suite la matrice M est diagonalisable (1)et semblable à la matrice D suivante :

$$D=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}(0.5)$$

6) $[1,5pt]$ Pour la matrice D précédente la matrice de passage P associée est ;

$$P=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}(0.5)$$

et on a $D=P^{-1}MP(0.5)$ ce qui donne $M=PDP^{-1}(0.\ 5)$

7) $[2pt]$

$M=PDP^{-1} \Rightarrow M^n=PD^nP^{-1} \quad \forall n\in\mathbb{N}(0.\ 5)$

En appliquant sur $M^3+M^2-5M+3I$ on obtient :

$$M^3+M^2-5M+3I=-\left(PD^3P^{-1}\right)+\left(PD^2P^{-1}\right)-5\left(PDP^{-1}\right)+3I(0.25)$$

$$=P\left[D^3+D^2-5D+3I\right]P^{-1}(0.25)$$

$$=P\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -27 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -15 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\right]P^{-1}$$

$$=P[0]P^{-1}=0(0.5)$$

Ce résultat était prévisible d'après le théorème de Cayley Hamilton qui dit que toute matrice carrée vérifie sa propre équation caractéristique. On vérifie en effet que $P_M(\lambda)=-(1-\lambda)^2(3+\lambda)=-\lambda^3-\lambda^2+5\lambda-3=-\left(\lambda^3+\lambda^2-5\lambda+3\right)$ et d'après ce théorème $P_M(M)=-(M^3+M^2-5M+3I)=0(0.5)$

8) $[2pt]$

$$(I-M)(M+3I)=\begin{pmatrix}-1 & -2 & 1\\ 2 & 4 & -2\\ -1 & -2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5 & 2 & -1\\ -2 & 0 & 2\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}(0.5)$$

$$\Rightarrow (I-M)(M+3I)=0 \Leftrightarrow M^2+2M=3I(0.25)$$

$$\Leftrightarrow M(M+2I)\frac{1}{3}=I(0.25)\Rightarrow M^{-1}=\frac{1}{3}(M+2I)(0.5)$$

$$M^{-1}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}4 & 2 & -1\\ -2 & -1 & 2\\ 1 & 2 & 2\end{pmatrix}(0.5)$$