Session :Avril 2013- Durée :2heures

PROBLEME N°I(4pts)

$$A(m)=\begin{pmatrix} m & -2 & 1 \\ 2 & m & -3 \\ m & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

1)Calculer $\det A(m)$ et vérifier que $\det A(1)=0$

2)En déduire les deux autres valeurs de m qui annulent $\det A(m)$

PROBLEME N°II(8pts)

On considère l'application f de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ défini par :

$$f(x,y,z)=(x-y+z,x-y-z)$$

1/ Montrer que f est une application linéaire

2/. Déterminer le noyau $Ker f$ et l'image de f $\operatorname{Im} f$, dont on donnera une base et la dimension

3 /Donner la matrice A de f relativement à la base canonique $\mathcal{B}=(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$ de $\mathbb{R}^3$ et $\mathcal{B}'=(\vec{\varepsilon}_1,\vec{\varepsilon}_2)$ de $\mathbb{R}^2$

4°/.On considère les deux familles V et U suivantes

$V=\{(1,1,0),(1,0,1),(1,1,1)\}$ $U=\{(1,1),(-1,1)\}$

Justifier que V et U forment respectivement une base de $\mathbb{R}^3$ et une base de $\mathbb{R}^2$

Calculer ensuite la matrice A' de f relativement à. V et à U en précisant notamment la matrice de passage P de $\mathcal{B}$ à V .et la matrice de passage Q de $\mathcal{B}'$ à.U ainsi que la relation entre A' et A..

PROBLEME N°III(8 pts)

On considère l'endomorphisme φ de $\mathbb{R}^3$ de matrice A dans la base canonique:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1°) Montrer que φ est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$

2°/. Calculer le polynôme caractéristique $P_A(\lambda)$

3°/. Déterminer les valeurs propres de A et les sous espaces propres associés
4°/ Justifier que A est diagonalisable et préciser la matrice diagonale D semblable à A.
5°/..En déduire une matrice de passage P qui permet de diagonaliser A. et écrire la relation qui lie les matrices A, P et la matrice diagonale D ,puis en déduire l'expression de A en fonction de P et de D.
6°/ Calculer ensuite : $-A^3+4A^2-5A+2I$. Justifier pourquoi ce résultat était prévisible.:
En utilisant ce résultat exprimer l'inverse de A en fonction de A^2 *de* A *et de* I et calculer A^{-1}

ProblèmeI

1)

$$\det A(m)=\begin{vmatrix} m & -2 & 1 \\ 2 & m & -3 \\ m & 1 & -2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} m-1 & -2 & 1 \\ m-1 & m & -3 \\ m-1 & 1 & -2 \end{vmatrix}=(m-1)\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & m & -3 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix}$$

$$=(m-1)\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & m+2 & -4 \\ 0 & 3 & -3 \end{vmatrix}=(m-1\begin{vmatrix} m+2 & -4 \\ 3 & -3 \end{vmatrix}=-3(m-1)(m-2)$$

$\det A(1)=0$

2) $\det A(m)=0 \Leftrightarrow (m-1)(m-2)=0 \Leftrightarrow m=1 ou\ m=2$

3) a) $si\ m\in° -\{1,2\}\det A(m)\neq 0$ rgA=3

b) $si\ m=1 \det A(1)=0 \quad rg\leq 2$

$$A(1)=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \quad \frac{1}{-2}\neq\frac{2}{1}\Rightarrow (1;2;1)et(-2;1;1)\ sont\ non\ colinéaires \text{ donc}$$

rgA=2

c) $si\ m=2 \det A(2)=0 \quad rg\leq 2$

$$A(2)=\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \quad \frac{2}{-2}\neq\frac{2}{2}\Rightarrow (2;2;2)et(-2;2;1)\ sont\ non\ colinéaires \text{ donc}$$

rgA=2

Problème II

$f(x,y,z)=(x-y+z,x-y-z)$

1) Soient $\vec{v}=(x,y,z)$ et $\vec{v}'=(x',y',z')$

$$f(\vec{v}+\vec{v}')=f(x+x',y+y',z+z')=(x+x'-y-y'+z+z',x+x'-y-y'-z-z')$$

$$=(x-y+z,x-y-z)+(x'-y'+z',x'-y'-z')=f(\vec{v})+f(\vec{v}')$$

Soient $\vec{v} = (x,y,z)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$

$f(\lambda \vec{v}) = f(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = (\lambda x - \lambda y + \lambda z, \lambda x - \lambda y - \lambda z)$

$= \lambda(x - y + z, x - y - z) = \lambda f(\vec{v})$

On a montré que f est une application linéaire.

2) $Ker(f) = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / f(x,y,z) = (0,0) \right\}$

$$f(x,y,z) = (0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} x - y + z = 0 \\ x - y - z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x \\ z = 0 \end{cases} x \in \mathbb{R}$$

Soit $Ker(f) = \left\{ (x,x,0) / x \in \mathbb{R} \right\} = Vect\left[(1,1,0) \right]$ donc $(1,1,0)$ est une base de $Ker(f)$

$\operatorname{Im} f = Vect\left[f(\vec{e}_1), f(\vec{e}_2), f(\vec{e}_3) \right]$

$f(\vec{e}_1) = f(1,0,0) = (1,1)$ $f(\vec{e}_2) = f(0,1,0) = (-1,-1)$ $f(\vec{e}_3) = f(0,0,1) = (1,-1)$

$f(\vec{e}_2) = -f(\vec{e}_1)$ donc $\operatorname{Im} f = Vect\left[f(\vec{e}_1), f(\vec{e}_3) \right] = Vect\left[(1,1),(1,-1) \right]$ et $(1,1),(1,-1)$ forme une base de $\operatorname{Im} f$

3) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

4) V forme une base de $\mathbb{R}^3$ si elle est une famille libre et V est une famille libre si

$$\det P \neq 0 \; avec \; P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \det P = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

V forme donc une base de $\mathbb{R}^3$

U forme une base de $\mathbb{R}^2$ si elle est une famille libre et U est une famille libre

si $\det Q \neq 0 \; avec \; Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ $\det Q = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$

U forme donc une base de $\mathbb{R}^2$

$$A' = Q^{-1}AP = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

PROBLEME N°III

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1)

φ est un automorphisme si et seulement si $\det A \neq 0$.

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \text{ donc } \varphi \text{ est un automorphisme}$$

2)

$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ I étant la matrice identité.

$$P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & -1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2(2-\lambda)$$

3) On sait que les valeurs propres de A sont les zéros du polynôme caractéristique. on résout donc $P_A(\lambda) = 0$

$$P_A(\lambda) = 0 \Leftrightarrow (1-\lambda)^2(2-\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1 \; ou \; \lambda = 2 \Rightarrow Sp(A) = \{1,2\}$$

4)On détermine les sous espaces propres en résolvant pour chaque valeur propre le système $(A - \lambda I)X = 0$ avec $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

-Pour $\lambda = 1$ on a :

$$(A - I)X = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -y - z = 0 \\ 0 = 0 \\ y + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in {}^\circ \\ z = -y \end{cases} \quad y \in {}^\circ$$

$$E_{\lambda=1} = Ker(A - I) = Vect[(1,0,0),(0,1,-1)]$$

-Pour $\lambda = 2$ on a :

$$(A - 2I)X = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -x - y - z = 0 \\ -y = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ z = -x \end{cases} \quad x \in {}^\circ$$

$$E_{\lambda=2} = Ker(A - 2I) = Vect[(1,0,-1)]$$

4) D'après les résultats de la 3ème équation $\dim E_{\lambda=1} = 2$ la matrice A est diagonalisable et semblable à la matrice D suivante :

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

5) Pour la matrice D précédente la matrice de passage P associée est ;

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

et on a $D = P^{-1}AP$ ce qui donne $A = PDP^{-1}$

6)

$$A = PDP^{-1} \Rightarrow \quad A^n = PD^nP^{-1} \quad \forall n \in \bullet$$

En appliquant sur $-A^3 + 4A^2 - 5A + 2I$ on obtient :

$$-A^3 + 4A^2 - 5A + 2I = -\left(PD^3P^{-1}\right) + 4\left(PD^2P^{-1}\right) - 5\left(PDP^{-1}\right) + 2I$$

$$= P\left[-D^3 + 4D^2 - 5D + 2I\right]P^{-1}$$

$$= P\left[-\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\right]P^{-1} = P\left[0\right]P^{-1} = 0$$

Ce résultat était prévisible d'après le théorème de Cayley Hamilton qui dit que toute matrice carrée vérifie sa propre équation caractéristique. On vérifie en effet que $P_A(\lambda) = -\lambda^3 + 4\lambda^2 - 5\lambda + 2$ et d'après ce théorème $P_A(A) = -A^3 + 4A^2 - 5A + 2I = 0$

$$-A^3 + 4A^2 - 5A + 2I = 0 \Leftrightarrow A^3 - 4A^2 + 5A = 2I \Leftrightarrow A.\frac{1}{2}(A^2 - 4A + 5I) = I$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{2}(A^2 - 4A + 5I) = \frac{1}{2}P(D^2 - 4A + 5I)P^{-1}$$

$$D^2 - 4D + 5I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$