[Poule mouillée] 1

II \ I	F. E.	D. D	
Faire Ecart	2, 2	1, 3	p
Droit Devant	3, 1	0, 0	$1-p$
	q	$1-q$	

$\sigma_1 = (p, 1-p)$, $\sigma_2 = (q, 1-q)$

Eq. de Nash avec stratégies pures :
(F.E., D.D) et
(D.D., F.E.)

Eq. mixte ?

$$J2 : (q, 1-q) \Rightarrow \begin{cases} J1 : MR_I = \{F.E\} \text{ si} \\ E_I[\{F.E\} / (q, 1-q)] > E_I[\{D.D\} / (q, 1-q)] \\ \Leftrightarrow 2q + 1(1-q) > 3q + 0(1-q) \\ \Leftrightarrow 2q + 1 - q > 3q \Leftrightarrow 1 > 2q \Rightarrow \boxed{q < \frac{1}{2}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} J1 : MR_I = \{D.D\} \text{ si} \\ E_I[\{D.D\} / (q, 1-q)] > E_I[\{F.E\} / (q, 1-q)] \\ \Leftrightarrow 3q + 0(1-q) > 2q + 1(1-q) \\ \Leftrightarrow \boxed{q > \frac{1}{2}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} J1 : MR_I \in \{\{D.D\} \text{ ou } \{F.E\} \text{ ou } (\forall) p \in [0,1]\} \\ E_I[\{D.D\} / (q, 1-q)] = E_I[\{F.E\} / (q, 1-q)] \\ \Leftrightarrow \boxed{q = \frac{1}{2}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow MR_I = p = \begin{cases} 1, & q < \frac{1}{2} \\ (\forall) p \in [0,1], & q = \frac{1}{2} \\ 0, & q > \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$J1 : (p, 1-p) \Rightarrow \begin{cases} J2 : MR_{II} = \{F.E\} \text{ si} \\ E_{II}[\{F.E\}/(p,1-p)] > E_{II}[\{D.D\}/(p,1-p)] \\ \Leftrightarrow 2p + 1(1-p) > 3p + 0(1-p) \\ \Leftrightarrow p + 1 > 3p \Leftrightarrow 1 > 2p \Rightarrow \underline{p < \frac{1}{2}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} J2 : MR_{II} = \{D.D\} \text{ si} \\ E_{II}[\{D.D\}/(p,1-p)] > E_{II}[\{F.E\}/(p,1-p)] \\ \Leftrightarrow 3p + 0(1-p) > 2p + 1(1-p) \\ \Leftrightarrow 2p > 1 \Rightarrow p > \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} J2 : MR_{II} \in \{ \{F.E\} \text{ ou } \{D.D\} \text{ ou } (\forall)\ q \in [0,1] \\ E_{II}[\{F.E\}/(p,1-p)] = E_{II}[\{D.D\}/(p,1-p)] \\ \Leftrightarrow p = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$q = MR_{II}(p, 1-p) = \begin{cases} 1, & p < \frac{1}{2} \\ (\forall)\ q \in [0,1], & p = \frac{1}{2} \\ 0, & p > \frac{1}{2} \end{cases}$$

⇒ Eq mixte?

$\left(p = \frac{1}{2} ; q = \frac{1}{2}\right)$

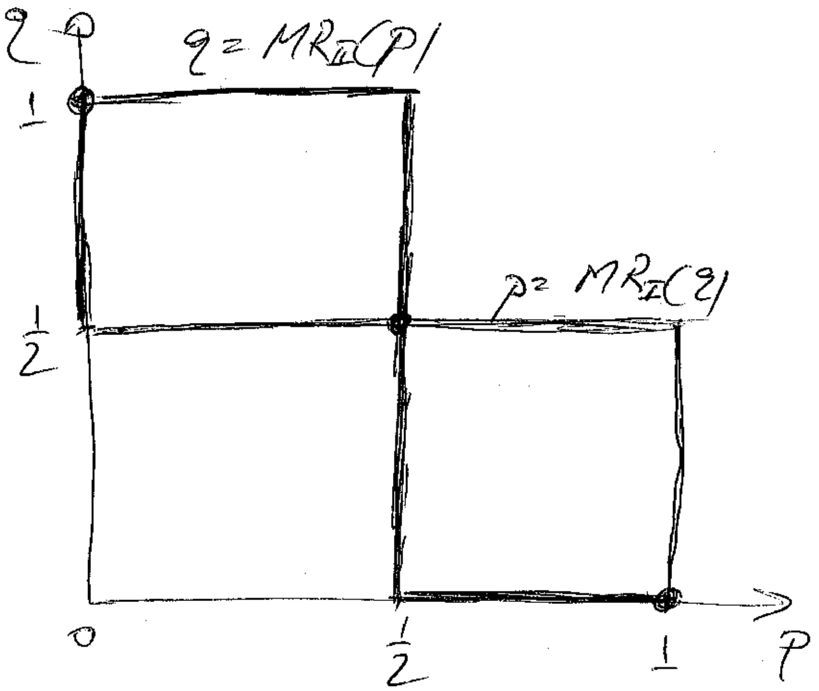
ou

$\left(\underbrace{\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)}_{\sigma_1} ; \underbrace{\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)}_{\sigma_2} \right)$

Eq. purs?

$(p = 0, q = 1)$ et

$(p = 1, q = 0)$



2 13 2

Exercice [Tir aux buts] (2).

- les deux joueurs : { le gardien de but, le tireur
- le tireur a le choix entre ↗ Tirer à droite (action D) ↘ tirer à gauche (action G)
- le gardien de but ↗ plonger à droite (action d) ↘ plonger à gauche (action g)

Le gardien arrête le tir lorsqu'il plonge du côté du tir, sinon le tireur marque.

- Les gains du gardien sont ↗ 1 s'il arrête le tir ↘ 0 sinon.
- les gain du tireur sont ↗ 1 s'il marque ↘ 0 sinon.

Q1: Forme stratégique / normale

		q	$1-q$
	Gardien / Tireur	d	g
p	D	0, 1	1, 0
$1-p$	G	1, 0	0, 1

Q2: Equilibre de Nash avec stratégies pures ?

Non.

Q3 : Eq. de Nas avec stratégies mixtes ?

Gardien : $(q, 1-q)$: $\mathbb{E}_T[D] = \mathbb{E}_T[G] \Leftrightarrow$

$$0 \cdot q + 1(1-q) = 1 \cdot q + 0(1-q)$$

$$\Leftrightarrow 1-q = q \Leftrightarrow 2q = 1 \Rightarrow \boxed{q^* = \frac{1}{2}}$$

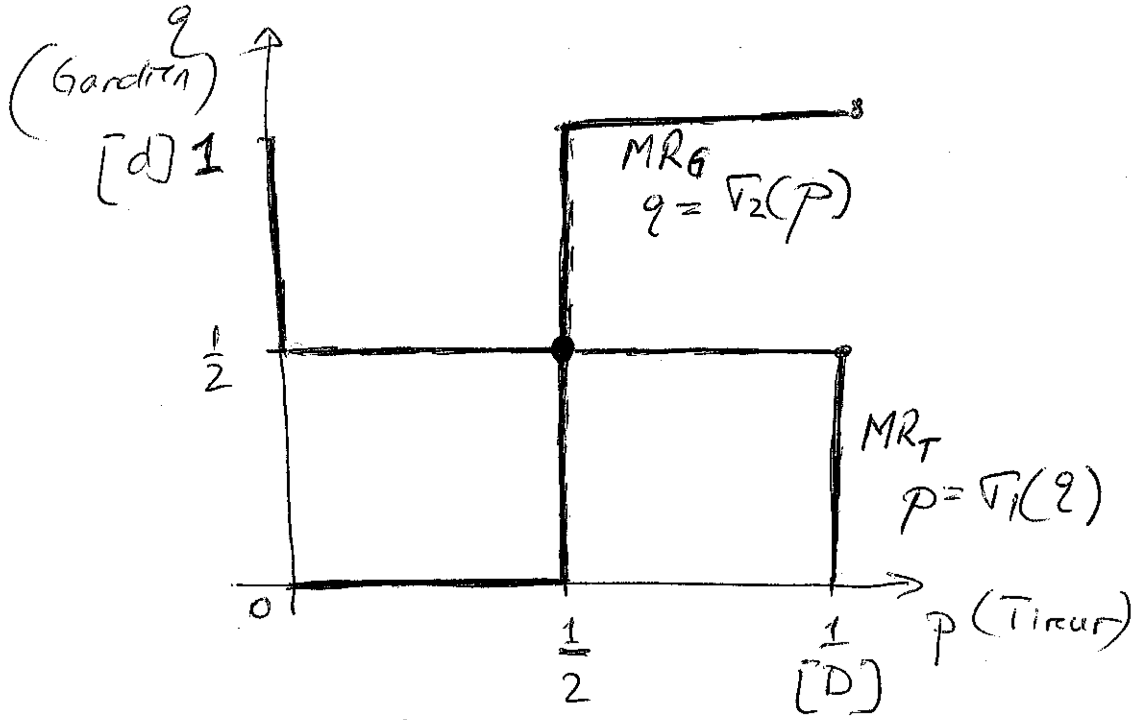
Tireur : $(p, 1-p)$: $\mathbb{E}_G[d] = \mathbb{E}_G[g] \iff$

$$1 \cdot p + 0(1-p) = 0 \cdot p + (1-p) \cdot 1$$

$$\iff p = 1(1-p) \iff 2p = 1 \Rightarrow p^* = \frac{1}{2}$$

$\Rightarrow$ Éq. Nash avec str. mixtes : $\left(\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right); \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)\right)$

Q4 : Fonctions des meilleurs réponses : MR_1



MR_T : $p = \sigma_1(q) = \begin{cases} 0, & q > \frac{1}{2} \\ p \in [0,1], & q = \frac{1}{2} \quad \text{: indifférence} \\ 1, & q < \frac{1}{2} \end{cases}$

MR_G : $q = \sigma_2(p) = \begin{cases} 0, & p < \frac{1}{2} \\ q \in [0,1], & p = \frac{1}{2} \quad \text{: indifference} \\ 1, & p > \frac{1}{2} \end{cases}$

3

[3×3]

I \ II	G	M	D	
A	0, 1	−1, 2	1, −2	p_1
B	1, −1	0, 0	−1, 2	p_2
C	−1, 3	1, 2	0, 0	$1-p_1-p_2$
	q_1	q_2	$1-q_1-q_2$	

$\left(\begin{array}{c} p_1 \\ p_2 \\ 1-p_1-p_2 \end{array}\right) \to \sigma_1$

$(q_1 \;\; q_2 \;\; 1-q_1-q_2) \to \sigma_2$

$\sigma_1 = (p_1, p_2, 1-p_1-p_2)$ et $\sigma_2 = (q_1, q_2, 1-q_1-q_2)$

$u_1(A, \sigma_2) = 0\cdot q_1 + (-1)\cdot q_2 + 1(1-q_1-q_2)$

$u_1(B, \sigma_2) = 1\cdot q_1 + 0\cdot q_2 + (-1)(1-q_1-q_2)$

$u_1(C, \sigma_2) = (-1)\cdot q_1 + 1\cdot q_2 + 0(1-q_1-q_2)$

~~u_1 A~~ I indifférent entre A, B et C si

$$u_1(A, \sigma_2) = u_1(B, \sigma_2) = u_1(C, \sigma_2)$$

$u_1(A, \sigma_2) = u_1(B, \sigma_2) \Leftrightarrow$

$$-q_2 + (1-q_1-q_2) = q_1 - (1-q_1-q_2)$$

$$\Leftrightarrow -q_2 + 1 - q_1 - q_2 = q_1 - 1 + q_1 + q_2$$

$$\Leftrightarrow 1 - q_1 - 2q_2 = -1 + 2q_1 + q_2$$

$$\Leftrightarrow 2 = 3q_1 + 3q_2 \Rightarrow (q_1 + q_2) = \frac{2}{3} \quad (1)$$

$u_1(B, \sigma_2) = u_1(C, \sigma_2) \Leftrightarrow$

$$q_1 - (1-q_1-q_2) = -q_1 + q_2$$

$$\Leftrightarrow q_1 - 1 + q_1 + \cancel{q_2} = -q_1 \cancel{+q_2}$$

$$\Leftrightarrow 3q_1 = 1 \Rightarrow \boxed{q_1 = \frac{1}{3}}$$

$$\overset{(1)}{\Rightarrow} \boxed{q_2 = \frac{1}{3}}$$

$\Rightarrow \sigma_2 = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$. joue chaque action pure avec prob. 1/3

J2 indifférent entre G, M ou D si
$u_2(G,\sigma_1) = u_2(M,\sigma_1) = u_2(D,\sigma_1)$

(1) $u_2(G,\sigma_1) = u_2(M,\sigma_1)$

$\Leftrightarrow 1\cdot p_1 + (-1)p_2 + 3(1-p_1-p_2) = 2p_1 + 0\,p_2 + 2(1-p_1-p_2)$

$\Leftrightarrow p_1 - p_2 + (1-p_1-p_2) = 2p_1 \Leftrightarrow$

$1 - 2p_2 = 2p_1 \Leftrightarrow 2(p_1+p_2) = 1 \Rightarrow \boxed{p_1+p_2 = \frac{1}{2}}$ (1)

(2) $u_2(M,\sigma_1) = u_2(D,\sigma_1) \Leftrightarrow$

$2p_1 + 2(1-p_1-p_2) = (-2)p_1 + 2p_2 + 0(1-p_1-p_2)$

$\Leftrightarrow \cancel{2p_1} + 2 - \cancel{2p_1} - 2p_2 = -2p_1 + 2p_2$

$\Leftrightarrow 2 = -2p_1 + 4p_2 \Leftrightarrow 1 = -p_1 + 2p_2$ (2)

$\begin{cases} p_1 + p_2 = \frac{1}{2} \\ -p_1 + 2p_2 = 1 \end{cases}$ (+)

$0 + 3p_2 = \frac{3}{2} \Rightarrow p_2 = \frac{\frac{3}{2}}{3} = \frac{1}{2}$

$\left.\begin{array}{l} p_2 = \frac{1}{2} \\ p_1 + p_2 = \frac{1}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow p_1 = 0$

$\Rightarrow \sigma_1 = \left(0, \frac{1}{2}, 1-0-\frac{1}{2}\right) = \left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

$\Rightarrow$ éq. de Nash mixte : $(\sigma_1^*, \sigma_2^*) = \left(\left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)\right)$

Q : Paiements $u_1(\sigma_1^*, \sigma_2^*)$ et $u_2(\sigma_1^*, \sigma_2^*)$?