UNIVERSITÉ DE CERGY
U.F.R. Economie et Gestion

Licence d'Économie et Gestion
L2 - S3

PROBABILITÉS

TEST 1 - Mardi 16 Octobre 2012 - 1h 30 min

Il sera tenu compte du soin apporté à la rédaction.
CALCULATRICES INTERDITES
LES PORTABLES DOIVENT ÊTRE DÉBRANCHÉS ET RANGÉS.
Le barème est donné à titre indicatif

Questions de cours - 4 points

Les questions de cet exercice sont indépendantes les unes des autres.

1. Soit Ω un ensemble non vide et $\mathcal{T} = \mathcal{P}(\Omega)$ la tribu des parties de Ω. Donner la définition de P est une probabilité sur l'espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$.
2. Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathrm{P})$ un espace probabilisé. Les égalités suivantes étant admises :
   1) $\mathrm{P}(\emptyset) = 0$
   2) Si E et F sont deux événements disjoints : $\mathrm{P}(E \cup F) = \mathrm{P}(E) + \mathrm{P}(F)$.
   Démontrer que pour tous événements A et B, $\mathrm{P}(A \cap \overline{B}) = \mathrm{P}(A) - \mathrm{P}(A \cap B)$.
   Application numérique : Soient A et B deux événements d'un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathrm{P})$ tels que $\mathrm{P}(A) = 0,3$; $\mathrm{P}(\overline{B}) = 0,4$ et $\mathrm{P}(A \cup B) = 0,7$. Déterminer $\mathrm{P}(A \cap \overline{B})$.

Exercice 2 - 10 points

Les trois parties de cet exercice sont indépendantes entre elles. Tous les résultats seront donnés sous forme de fractions rationnelles irréductibles.

Une urne contient 8 boules : 5 boules blanches et 3 boules noires indiscernables au toucher.

Première partie : On tire au hasard **simultanément** 3 boules parmi les 8.

1. Décrire l'univers associé à cette expérience aléatoire et donner son cardinal.
2. Déterminer la probabilité de chacun des événements suivants :
   (a) A : « on a tiré trois boules blanches »
   (b) B : « on a tiré exactement une boule noire »

Seconde partie : On tire au hasard **successivement et avec remise** 3 boules. On suppose les tirages indépendants les uns des autres. On note N_i l'événement « on a tiré une boule noire au $\mathrm{i}^{\text{ème}}$ tirage » $(i \in \{1; 2; 3\})$

1. Que peut-on dire de $\mathrm{P}_{N_1}(N_2)$ et $\mathrm{P}(N_2)$?
2. Décrire à l'aide des événements N_i et des connecteurs logiques, les événements :
   (a) C : « on a tiré deux boules noires puis une boule blanche »
   (b) D : « on a tiré exactement deux boules noires »
3. Déterminer les probabilités des événements C et D.
4. Calculer la probabilité de l'événement E « on a tiré au moins une boule noire »

Troisième partie : On tire au hasard, **successivement et sans remise**, trois boules de l'urne.

1. Pour cette expérience aléatoire, un étudiant choisi de prendre comme univers Ω l'ensemble des 3-listes d'éléments pris dans $\{N, \overline{N}\}$ (où N est l'événement « on a tiré une boule noire ») : quel est alors le cardinal de Ω ? En quoi cette idée peut être source d'erreurs dans le calcul de la probabilité d'un événement ?
2. Comme dans la seconde partie, on note N_i l'événement « on a tiré une boule noire au $\text{i}^{\text{ième}}$ tirage » ($i \in \{1; 2; 3\}$) Décrire à l'aide des événements N_i et des connecteurs logiques, les événements :
   (a) F : « on a tiré trois boules noires »
   (b) G : « on a tiré une boule noire au second tirage »
3. Calculer la probabilité de l'événement F en écrivant explicitement la formule des probabilités composées.
4. Calculer la probabilité de l'événement G.

Exercice 3 - 3 points

Lors d'un examen, on évalue la proportion des étudiants fraudeurs à $p \in [0; 1]$.
On sait que 50% des étudiants non fraudeurs sont capables de répondre correctement à l'exercice 3, alors que 90% des étudiants fraudeurs répondent correctement à cette question.
On note T l'événement : « l'étudiant a fraudé à l'exercice 3 »
J l'événement : « l'étudiant a répondu de manière correcte à l'exercice 3 »

1. Déterminer en fonction de p la probabilité $\mathrm{P}(J)$.
2. Sur la copie que l'enseignant lit, la réponse est correcte. Montrer que, dans ce cas, la probabilité que l'étudiant ait triché est égale à $\dfrac{9p}{4p+5}$.
3. L'enseignant décide d'annuler l'exercice si la proportion de réponses justes dans le paquet de copies est supérieure à $0,7$. Quelle valeur p ne doit-elle pas dépasser ?
4. Question totalement hors barème .... Que pensez-vous d'une telle valeur de p ? est-elle réaliste ?

Exercice 4 - 3 points

1. Une urne contient 10 boules numérotées de 1 à 10. On tire une boule au hasard (hypothèse d'équiprobabilité) et on considère les événements :
   A = « On tire une boule portant un nombre pair »
   B = « On tire une boule portant un nombre multiple de 3 »
   Calculer $\mathrm{P}(A)$ et $\mathrm{P}(B)$. Les événements A et B sont-ils incompatibles ? indépendants ?
2. Reprendre les questions précédentes avec une urne contenant 12 boules numérotées de 1 à 12.

UNIVERSITÉ DE CERGY **Licence d'Économie et Gestion**
U.F.R. Economie et Gestion **L2 - S3**

Corrigé du TEST 1 - Probabilités

Exercice 1 - 4 points

1. **1,5 point** P est **application** de $\mathcal{T}$ vers $[0;1]$ telle que $P(\Omega) = 1$ et qui possède la propriété de σ-additivité.
2. **1 point** On vérifie que les événements $A \cap B$ et $A \cap \overline{B}$ sont incompatibles afin d'utiliser les égalités prises en hypothèse.
   1,5 point *Application numérique :* $\mathrm{P}\ (B) = 1 - \mathrm{P}(\overline{B}) = 0,6$, d'où
   $\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A \cup B) = 0,2$; et donc $\mathrm{P}(A \cap \overline{B}) = \mathrm{P}(A) - \mathrm{P}(A \cap B) = 0,1$.

Exercice 2 - 10,5 points

Une urne contient 8 boules : 5 boules blanches et 3 boules noires.

3 points Première partie : On tire au hasard **simultanément** 3 boules parmi les 8.

1. **1 point** Ω est l'ensemble des combinaisons de trois boules prises parmi les huit : $\mathrm{Card}(\Omega) = \binom{8}{3} = 56$.
2. (a) **1 point** Un tirage favorable à A est un tirage où l'on a pris 3 boules blanches parmi les 5 : il y a donc $\binom{5}{3} = 10$ tirages et $\mathrm{P}(A) = \frac{10}{56} = \frac{5}{28}$

   (b) **1 point** Un tirage favorable à B est un tirage où l'on a pris 2 boules blanches parmi les 5 et 1 boule noire parmi les 3 : soit $\binom{5}{2} \times \binom{3}{1} = 10 \times 3 = 30$ tirages et $\mathrm{P}\ (B) = \frac{30}{56} = \frac{15}{28}$

3,5 points Seconde partie : On tire au hasard **successivement et avec remise** 3 boules.

1. **0,5 point** $\mathrm{P}_{N_1}(N_2) = \mathrm{P}(N_2)$ car les tirages (donc les événements N_1 et N_2) sont indépendants.
2. (a) **0,5 point** $\mathrm{C} = N_1 \cap N_2 \cap \overline{N_3}$

   (b) **0,5 point** $\mathrm{D} = (N_1 \cap N_2 \cap \overline{N_3}) \cup (\overline{N_1} \cap N_2 \cap N_3) \cup (N_1 \cap \overline{N_2} \cap N_3)$ (union disjointe d'événements)
3. **1 point** $\mathrm{P}(C) = \mathrm{P}(N_1) \times \mathrm{P}(N_2) \times \mathrm{P}(\overline{N_3}) = \left(\frac{3}{8}\right)^2 \times \frac{5}{8} = \frac{45}{512}$
   $\mathrm{P}(D) = 3 \times \mathrm{P}(C) = 3 \times \frac{45}{512} = \frac{135}{512}$
4. **1 point** L'événement $\overline{E}$ est « on a tiré trois boules blanches »
   et $\mathrm{P}(\overline{E}) = \mathrm{P}(\overline{N_1} \cap \overline{N_2} \cap \overline{N_3}) = \left(\frac{5}{8}\right)^3 = \frac{125}{512}$, donc $\mathrm{P}(E) = \frac{387}{512}$

4 points **Troisième partie :** On tire au hasard, **successivement et sans remise**, trois boules de l'urne.

1. **1 point** Dans le cas où Ω est l'ensemble des 3-listes d'éléments pris dans $\{N, \overline{N}\}$, $\text{Card}\Omega = 2^3 = 8$. Cette modélisation n'est pas idéale, car les événements élémentaires n'ont pas la même probabilité d'apparition : on n'est pas en situation d'équiprobabilité, d'où les risques d'erreurs dans les calculs de probabilités.
2. (a) **0,5 point** $F = N_1 \cap N_2 \cap N_3$

   (b) **0,5 point** $G = N_2 = (N_1 \cap N_2) \cup (\overline{N_1} \cap N_2)$ (union disjointe d'événements)
3. **1 point** $\text{P}(F) = \text{P}(N_1) \times \text{P}_{N_1}(N_2) \times \text{P}_{(N_1 \cap N_2)}(N_3)$ (formule des probabilités composées) $= \dfrac{3}{8} \times \dfrac{2}{7} \times \dfrac{1}{6} = \dfrac{1}{56}$
4. **1 point** $\text{P}(G) = \text{P}(N_1) \times \text{P}_{N_1}(N_2) + \text{P}(\overline{N_1}) \times \text{P}_{\overline{N_1}}(N_2)$ (formule des probabilités totales) $= \dfrac{3}{8} \times \dfrac{2}{7} + \dfrac{5}{8} \times \dfrac{3}{7} = \dfrac{21}{56} = \dfrac{3}{8}$

Exercice 3 - 3 points

1. **1 point** $\text{P}(J) = \text{P}(T \cap J) + \text{P}(\overline{T} \cap J) = \text{P}(T) \times \text{P}_T(J) + \text{P}(\overline{T}) \times \text{P}_{\overline{T}}(J) = 0,9p + 0,5(1-p) = 0,4p + 0,5$.
2. **1 point** $\text{P}_J(T) = \dfrac{\text{P}(T \cap J)}{\text{J}} = \dfrac{0,9p}{0,4p + 0,5} = \dfrac{9p}{4p+5}$
3. **1 point** On résout $\text{P}(J) \geq 0,7 \iff 0,4p + 0,5 \geq 0,7 \iff p \geq \dfrac{1}{2}$
4. 50% de tricheurs ... est-ce réaliste ? Ce serait en tout cas déprimant ....

Exercice 4 - 3 points

1. **1,5 point** Une urne contient 10 boules numérotées de 1 à 10.
   $A = \{2; 4; 6; 8; 10\}$ et $B = \{3; 6; 9\}$.
   $\text{P}(A) = \dfrac{5}{10} = \dfrac{1}{2}$, et $\text{P}(B) = \dfrac{3}{10}$
   $\text{P}(A \cap B) = \dfrac{1}{10} \neq 0$ donc les événements A et B ne sont pas incompatibles. De plus $\text{P}(A \cap B) \neq \text{P}(A) \times \text{P}(B)$: les événements A et B ne sont pas indépendants.
2. **1,5 point** Une urne contient 12 boules numérotées de 1 à 12.
   $A = \{2; 4; 6; 8; 10; 12\}$ et $B = \{3; 6; 9; 12\}$.
   $\text{P}(A) = \dfrac{6}{12} = \dfrac{1}{2}$, et $\text{P}(B) = \dfrac{4}{12} = \dfrac{1}{3}$
   $\text{P}(A \cap B) = \dfrac{2}{12} = \dfrac{1}{6} \neq 0$ donc les événements A et B ne sont pas incompatibles. De plus $\text{P}(A \cap B) = \text{P}(A) \times \text{P}(B)$: les événements A et B sont indépendants.