UNIVERSITÉ DE CERGY
U.F.R. Economie et Gestion

Licence d'Économie et Gestion
L2 - S3

PROBABILITÉS

TEST 1 - Vendredi 14 Octobre 2011 - 1h 30 min

Il sera tenu compte du soin apporté à la rédaction.
CALCULATRICES INTERDITES
LES PORTABLES DOIVENT ÊTRE DÉBRANCHÉS ET RANGÉS.

Exercice 1 - 8 points

On dispose d'un jeu de 32 cartes. On suppose que tous les tirages effectués, pour chacune des deux parties, sont équiprobables. On donne : $31 \times 32 = 992$ et $32^2 = 1024$.
Dans cet exercice, les probabilités demandées seront données sous forme de fractions irréductibles.

1. On tire trois cartes **simultanément**.
   (a) Préciser l'univers Ω associé à cette expérience aléatoire. Calculer son cardinal.
   (b) Déterminer la probabilité de l'événement A : « on obtient 3 coeurs ».
   (c) Déterminer la probabilité de l'événement B : « on obtient 2 coeurs dont le roi de coeur ».
2. On tire trois cartes **successivement en remettant à chaque fois la carte tirée dans le jeu** .
   (a) Préciser l'univers Ω' associé à cette expérience aléatoire. Donner une expression (sans effectuer le calcul) de son cardinal.
   (b) Calculer la probabilité de l'événement C : « on a tiré trois fois la même carte »
   (c) Calculer la probabilité de l'événement D : « on a tiré trois cartes distinctes »
   (d) Calculer la probabilité de l'événement E : « on a tiré deux fois la même carte et une troisième différente »

Exercice 2 - 6 points

Dans cet exercice les questions sont indépendantes les unes des autres :

1. Soient $\mathcal{S} = \{A_1, A_2, \cdots, A_n\}$, n événements non impossibles ($n \geq 2$) d'un même univers Ω. Donner la définition de : « $\mathcal{S}$ est un système complet d'événements ».
2. Soient A et B deux événements d'un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathrm{P})$ tels que $\mathrm{P}(A) = 0,5$; $\mathrm{P}(B) = 0,35$ et $\mathrm{P}(A \cup B) = 0,75$. Déterminer $\mathrm{P}(A \cap B)$, $\mathrm{P}(A \cap \overline{B})$ et $\mathrm{P}(\overline{A} \cap \overline{B})$.
3. On lance deux dés à 6 faces, un rouge et un vert non truqués (hypothèse d'équiprobabilité des lancers). On note :
   – A l'événement : « On obtient un nombre impair sur la face du dé rouge ».

– B : « La somme des faces est un nombre impair ».
– C : « Le produit des faces est un nombre impair ».
Calculer $\mathrm{P}(A)$, $\mathrm{P}(B)$ et $\mathrm{P}(B)$. Les événements A et B sont-ils indépendants ? incompatibles ?

Même question avec les événements B et C.

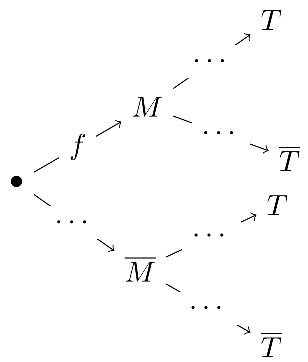
Exercice 3 - 7 points

Dans le but de dépister une maladie dans une population, on dispose d'un test de dépistage qui possède les caractéristiques suivantes :
– La probabilité qu'une personne malade ait un test positif est de $0,99$
– La probabilité qu'une personne non malade ait un test négatif est aussi de $0,99$

PARTIE A

On estime la proportion des personnes malades à f (où f est un réel appartenant à $[0,1]$).
On note M l'événement « la personne est malade » et T l'événement « le test est positif ».
$\overline{M}$ et $\overline{T}$ désignent respectivement les événements contraires de M et T.

1. **Reproduire sur votre copie** et compléter l'arbre de probabilité suivant :



   Dans la suite de cette partie, tous les résultats seront donnés sous forme littérale (c-a-d en fonction de f).

2. Déterminer la probabilité de l'événement $M \cap T$.
3. Déterminer la probabilité de l'événement T.
4. Démontrer que la probabilité d'un « faux positif », c'est-à-dire la probabilité qu'une personne qui a un test positif ne soit pas malade est : $\mathrm{P}_T(\overline{M}) = \dfrac{1-f}{98f+1}$.

PARTIE B

1. Calculer $\mathrm{P}_T(\overline{M})$ lorsque $f = 0,01$, puis lorsque $f = 0,5$. (valeurs décimales exactes)
2. Étudier les variations de la fonction F définie sur $I = [0,1]$ par $F(x) = \dfrac{1-x}{98x+1}$.
3. Quel inconvénient majeur présente, dans une population, la dépistage d'une maladie rare ?

UNIVERSITÉ DE CERGY **Licence d'Économie et Gestion**
U.F.R. Economie et Gestion **L2 - S3**

Corrigé du TEST 1 - Probabilités

Exercice 1 - 8 points

1. On tire 3 cartes **simultanément**
   (a) Ω est l'ensemble des **combinaisons** de 3 cartes prises parmi les 32 du jeu, donc $\text{Card}(\Omega) = \binom{32}{3} = \frac{32!}{3! \times 29!} = \frac{30 \times 31 \times 32}{6} = 5 \times 992 = 4960.$
   (b) Il y a $\binom{8}{3} = 56$ façons de choisir 3 « coeurs » parmi les 8 cartes « coeurs » donc $\text{Card}(A) = 56$ et $\text{P}(A) = \frac{56}{4960} = \frac{7}{620}$.
   (c) Les combinaisons favorables à l'événement B sont donc formées du roi de coeur (1 choix possible), d'une autre carte coeur (7 choix possibles) et d'une carte qui n'est pas un coeur (24 choix possibles) : donc $\text{Card}(B) = 7 \times 24 = 168$ et $\text{P}(B) = \frac{168}{4960} = \frac{21}{620}$.
2. (a) Ω' est l'ensemble des 3-listes d'éléments pris parmi les 32 cartes du jeu : donc $\text{Card}(\Omega') = 32^3$
   (b) Il y a 32 cartes, donc $\text{card}(C) = 32$ et donc $\text{P}(C) = \frac{32}{32^3} = \frac{1}{32^2} = \frac{1}{1024}$.
   (c) D est l'ensemble des **arrangements** de 3 cartes prises parmi les 32 cartes du jeu donc $\text{Card}(D) = A_{32}^3 = 30 \times 31 \times 32$ et $\text{P}(D) = \frac{30 \times 31 \times 32}{32^3} = \frac{30 \times 31}{32^2} = \frac{930}{1024} = \frac{465}{512}$.
   (d) Les éléments de E sont des 3-listes où deux cartes sont identiques et la troisième différente : il y a donc 32 choix possibles pour les deux cartes identiques et 31 pour la troisième. De plus, étant donnés trois telles cartes, il y a 3 tirages possibles si l'on tient compte de leur ordre d'apparition : donc $\text{Card}(E) = 3 \times 31 \times 32$ et $\text{P}(E) = \frac{3 \times 31 \times 32}{32^3} = \frac{93}{1024}$
   Remarque : Il était possible également d'utiliser le fait que les événements $\{C, D, E\}$ forment un système complet d'événements.

Exercice 2 - 7 points

1. Voir votre cours ...
2. On a $\text{P}(A \cap B) = \text{P}(A) + \text{P}(B) - \text{P}(A \cup B) = 0,5 + 0,35 - 0,75 = 0,1.$
   $\text{P}(A) = \text{P}(A \cap B) + \text{P}(A \cap \overline{B})$ (formule des probabilités totales) donc $\text{P}(A \cap \overline{B}) = \text{P}(A) - \text{P}(A \cap B) = 0,5 - 0,1 = 0,4$. Enfin $\text{P}(\overline{A} \cap \overline{B}) = \text{P}(\overline{A \cup B}) = 1 - \text{P}(A \cup B) = 1 - 0,75 = 0,25.$
3. L'univers Ω associé à cette expérience aléatoire est l'ensemble des 2-listes d'éléments pris dans $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, donc $\text{Card}(\Omega) = 36$.

– Card$(A) = 18$ (il y a trois choix pour le dé rouge et 6 pour le dé vert), donc $\mathrm{P}(A) = \dfrac{1}{2}$.
– Card $(B) = 18$ (il y a 6 choix pour le dé rouge, et une fois la face de celui-ci connue, il n'y a plus que trois choix pour le dé vert afin que la somme soit paire) donc $\mathrm{P}(B) = \dfrac{1}{2}$.
– Un produit est impair si et seulement si les deux facteurs sont impairs : C est donc l'ensemble des couples d'entiers impairs pris parmi $\{1, 3, 5\}$ donc Card$(C) = 9$ et $\mathrm{P}(C) = \dfrac{1}{4}$

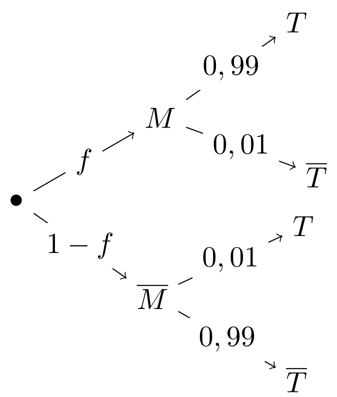
a $A \cap B = \{(1,2),(1,4),(1,6),(3,2),(3,4),(3,6),(5,2),(5,4),(5,6)\}$, donc $\mathrm{P}(A \cap B) = \dfrac{9}{36} = \dfrac{1}{4} = \mathrm{P}(A) \times \mathrm{P}(B)$. Donc A et B sont indépendants (et non incompatibles car $\mathrm{P}(A \cap B) \neq \emptyset$).

b $B \cap C = \emptyset$ car pour que la somme soit impaire, il faut que les faces soient de parités contraires, mais dans ce cas leur produit est pair ! Donc B et C sont incompatibles (et non indépendants car tous les deux non vides).

Exercice 3 - 7 points

PARTIE A

1.



2. $\mathrm{P}(M \cap T) = \mathrm{P}(M) \times \mathrm{P}_M(T)$
$= 0,99f$.

3. D'après la Formule des probabilités totales :
$$\begin{aligned} \mathrm{P}(T) &= \mathrm{P}(T \cap M) + \mathrm{P}(T \cap \overline{M}) \\ &= 0,99f + \mathrm{P}(\overline{M}) \times \mathrm{P}_{\overline{M}}(T) \\ &= 0,99f + (1-f) \times 0,01 \\ &= 0,98f + 0,01 \end{aligned}$$

4. $\mathrm{P}_T(\overline{M}) = 1 - \mathrm{P}_T(M)$
$= 1 - \dfrac{99f}{98f+1} = \cdots = \dfrac{1-f}{98f+1}$.
ou bien : $\dfrac{\mathrm{P}(T \cap \overline{M})}{\mathrm{P}(T)} = \dfrac{\mathrm{P}(\overline{M}) \times \mathrm{P}_{\overline{M}}(T)}{\mathrm{P}(T)} = \dfrac{(1-f) \times 0,01}{0,98f + 0,01} = \dfrac{1-f}{98f+1}$.

PARTIE B

1. Si $f = 0,01$: $\mathrm{P}_T(\overline{M}) = \dfrac{0,99}{1,98} = 0,5$ et pour $f = 0,5$, $\mathrm{P}_T(\overline{M}) = \dfrac{0,5}{50} = 0,01$.

2. La fonction F définie sur $I = [0, 1]$ par $F(x) = \dfrac{1-x}{98x+1}$ est dérivable sur I, et $\forall x \in I,\ F(x) = \dfrac{-99}{(98x+1)^2} < 0$

x	0	1
$F'(x)$	$-$	
$F(x)$	1 ↘	0

3. Lorsque la maladie est rare (i.e. lorsque f est très faible) dans une population, il y a une forte probabilité que le test révèle des faux positifs : et donc un très grand risque de soigner des personnes qui ne sont pas malades.