Série 5

Exercice 3

$X \rightsquigarrow N(11,5\ ;\ 2)$ $m = 11,5$ $\sigma = 2$

$n = 20$ $\bar{x} = 11,2$ $\sum_{i=1}^{20} (x_i - \bar{x}) = 62$

1) $IC(m)$: $\alpha = 5\%$

$\bar{X}_n \rightsquigarrow N(m, \sigma/\sqrt{n})$

On constitut $IC(m)$ à partir de

$$P\left(-t_\alpha \leq \frac{X_n - m}{\sigma/\sqrt{n}} \leq t_\alpha\right) = 1-\alpha$$

Si σ est connu :

$$-t_\alpha \leq \frac{\bar{X}_n - m}{\sigma/\sqrt{n}} \leq t_\alpha$$

$$\Leftrightarrow -t_\alpha . \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \bar{X}_n - m \leq t_\alpha . \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

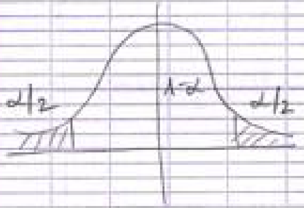
$$\Leftrightarrow \bar{X}_n - t_\alpha . \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq m \leq \bar{X}_n + t_\alpha . \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

t_α est lue dans la table de la loi normale. Si σ est inconnu, alors

$$IC(m) = \left[\bar{X}_n - t_\alpha . \frac{s}{\sqrt{n}}\ ;\ \bar{X}_n + t_\alpha . \frac{s}{\sqrt{n}}\right]$$

$$S^2 = \sum \frac{(x_i - \bar{x}_n)^2}{n-1} \Rightarrow s = \sqrt{\sum \frac{(x_i - \bar{x}_n)^2}{n-1}}$$

t_α étant lue dans la table de student à $(n-1)$ ddl.



Comme σ est inconnu.

$$IC(m) = \left[\bar{x}_n - t_\alpha . \frac{s}{\sqrt{n}}\ ;\ \bar{x}_n + t_\alpha . \frac{s}{\sqrt{n}}\right]$$

t_α lue dans la table de student à 19 ddl

$\alpha = 0,05 \Rightarrow t_\alpha = 2,093$

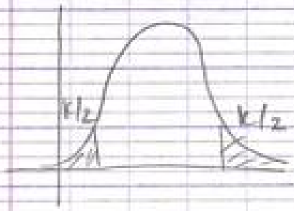
$\bar{x}_n = 11,2$ $n = 20$ $s = \sqrt{\frac{62}{19}} = 1,806$

$\Rightarrow IC(m) = [10,354\ ;\ 12,046]$

$11,5 \in IC(m)$ donc l'hypothèse $m = 11,5$ peut être maintenue.

2, On sait que $\sum_{i=1}^{n} \frac{(X_i-\bar{X}_n)^2}{\sigma^2} \rightsquigarrow \chi^2_{n-1}$

$$P\left(K_1 \leqslant \sum \frac{(X_i-\bar{X}_n)^2}{\sigma^2} \leqslant K_2\right) = 1-\alpha$$



$$P(\chi^2_{n-1} \geqslant k_2) = \alpha/2$$

$$P(\chi^2_{n-1} \geqslant k_1) = 1-\alpha$$

$$K_1 \leqslant \sum \frac{(X_i-\bar{X}_n)^2}{\sigma^2} < K_2$$

$$\Leftrightarrow \sum \frac{(X_i-\bar{X}_n)^2}{K_2} \leqslant \sigma^2 \leqslant \sum \frac{(X_i-\bar{X}_n)^2}{K_1}$$

d'où $IC(\sigma^2) = \left[\sum \frac{(X_i-\bar{X}_n)^2}{K_2} ; \sum \frac{(X_i-\bar{X}_n)^2}{K_1} \right]$

$n = 20$ K_1 et K_2 sont lues dans la table de Khi-deux à 19 ddl

$P(\chi^2_{19} > k_2) = 0{,}05/2 = 0{,}025 \Rightarrow K_2 = 32{,}85$

$P(\chi^2_{19} \geqslant k_1) = 0{,}975 \Rightarrow K_1 = 8{,}91$

$\Rightarrow IC(\sigma^2) = \left[\frac{62}{32{,}85} ; \frac{62}{0{,}91}\right] = (1{,}88 ; 6{,}958)$

$4 \in IC(\sigma^2)$, on peut dire que l'hypothèse constitut $\sigma = 2$ ne doit pas être modifiée.

3) $\begin{cases} H_0 : m = 11{,}5 \\ H_1 : m \neq 11{,}5 \end{cases}$

La région critique de ce test est de la forme

(R) : $\{\bar{X}_n \geqslant k_1\} \cup \{\bar{X}_n \leqslant k_2\}$

Déterminons de k_1 et de k_2

$P(T_0 \geqslant t_{\alpha/2} / T_0 \rightsquigarrow St_{19}) = \frac{\alpha}{2}$ $\quad T_0 = \frac{\bar{X}_n - m}{s/\sqrt{n}}$

$\frac{\alpha}{2} = 0{,}025 \Rightarrow t_{\alpha/2} = 2{,}093$

$k_1 = 11{,}5 + 2{,}093 \times \frac{1{,}806}{\sqrt{20}} - 12{,}34$

$k_2 = 11,5 - 2,093 \times \dfrac{1,806}{\sqrt{20}} \simeq 10,66$

Règle de décision : si $\bar{x} \in (A)$, on accepte H_0

$A =]10,66 \,;\, 12,34[$

$11,2 \in (A)$ donc on accepte H_0

$\begin{cases} H_0 = \sigma^2 = 4 \\ H_1 : \sigma^2 \neq 4 \end{cases}$

Le test portant sur la variance, on peut s'appuyer sur la statistique

$Z = \Sigma (X_i - \bar{X}_n)^2$

On sait que $\Sigma \dfrac{(X_i - \bar{X}_n)^2}{\sigma^2} \rightsquigarrow \chi^2_{n-1}$

Ce test admet comme région critique

$(R) : \left\{ \sum_{i=1}^{20} (x_i - \bar{x}_{20})^2 \geqslant k_2 \right\} \cup \left\{ \sum_{i=1}^{20} (x_i - \bar{x}_{20}) \leqslant k_1 \right\}$

Détermination de k_1 et k_2. On détermine k_1 et k_2 définie par

$P\left(\sum_{i=1}^{20} \dfrac{(x_i - \bar{x}_{20})^2}{\sigma^2} \geqslant k_2 \right)$

$= P(\chi^2_{19} \geqslant k_2) = 0,025 \Rightarrow k_2 = 32,85$

$P\left(\sum_{i=1}^{20} \dfrac{(X_i - \bar{X}_{20})^2}{\sigma^2} \leqslant k_1 \right) = 0,025$

$\Rightarrow P\left[\Sigma \dfrac{(X_i - \bar{X}_{20})^2}{\sigma^2} > k_1 \right] = P(\chi^2_{19} > k_1) = 0,975$

$\Rightarrow k = 8,91$

$k_2 = \sigma^2 k_2 = 4 \times 32,85$

$k_1 = \sigma^2 K_1 = 4 \times 8,91$

Ce qui donne (R) :

$\{\Sigma (X_i - x_{20})^2 \geqslant 131,4) \cup \{\Sigma (x_i - \bar{x}_{20})^2 \leqslant 35,64\}$ est la région d'acception $(A) =]35,64 \,;\, 131,4[$

Règle de décision

Si $\sum_{i=1}^{20} (x_i - \bar{x}_{20})^2 \in (A)$. On accepte H_0

$62 \in]35,64 \,;\, 131,4[\Rightarrow$ on accepte H_0

L'équipe pédagogique peut donc ne pas modifier l'hypothèse sur la moyenne l'écart type

Exercice 1

$$\begin{cases} H_0 : & m = m_0 = 210 \\ H_1 & 215 \end{cases}$$

a, Décission pour $\alpha = 5\%$

$H_0 : \overline{X}_n \rightsquigarrow N(210, 3)$

$H_1 : \overline{X}_n \rightsquigarrow N(215, 3) \rightarrow \begin{cases} H_0 \text{ fausse} \\ H_1 \text{ vraie} \end{cases}$

On rejette (H_0) si $\overline{X}_1 \geqslant k_1$

$X \rightarrow N(m, 15)$

$\overline{X}_{25} = 212$

$\overline{X}_{25} \rightarrow N(m, ?)$

$$E(\overline{X}_n) = \frac{1}{n} \sum E(X_i) = \frac{1}{n} . n . m = m$$

$$V(\overline{X}_n) = \frac{1}{n^2} \sum V(X_i) = \frac{1}{n^2} \; n . 15^2 = \frac{15^2}{25} = 9$$

$\sqrt{X_n} = 3$

On cherche k_1 pour $\alpha = 5$

$$\begin{aligned} \alpha &= P(D_1 / H_0) = 0{,}05 \\ &= P(\overline{X}_n \geqslant k_1 / \overline{X}_n \rightsquigarrow N(210, 3)] \\ &= P\left(\frac{\overline{X}_n - 210}{3} \geqslant t\right) = 0{,}05 \end{aligned}$$

$\Leftrightarrow \quad 1 - P(U_0 \leqslant t) = 0{,}05$

$\Leftrightarrow \quad 1 - \Phi(t) = 0{,}05 \Leftrightarrow \Phi(t) = 0{,}95$

$t = 1{,}645$

$D_0 \rightarrow$ je choisi $H_0 \rightarrow$ j'accepte H_0

$D_1 \rightarrow$ je recherche H_0

$$E = \frac{k_1 - 210}{3}$$

$$1{,}645 = \frac{k_1 - 210}{3}$$

$k_1 = 214{,}93 \Rightarrow 212 < 214{,}93 \rightarrow$ on accepte H_0

$212 \in (A)$

b) $\beta = P(D_0 / H_1) = P[\overline{X}_n \leq k / \overline{X}_n \rightarrow \mathcal{N}(215, 3)]$

$$= P\left(\frac{\overline{X}_n - 215}{3} < \frac{k - 215}{3}\right)$$

$$= \pi\left(\frac{k-215}{3}\right)$$

$$= \pi\left(\frac{214,93 - 215}{3}\right)$$

$$= \pi(-0,02) = 1 - 0,508 = 0,492$$

2) $\begin{cases} H_0 : & m = m_0 = 210 \\ H_1 : & m = m_0 > 210 \end{cases}$

a, UPP ?

$$0,01 = P\left(U_0 \geq \frac{k_2 - 210}{3}\right)$$

$$\pi\left(\frac{k_2 - 210}{3}\right) = 0,99 \rightarrow t = 2,33$$

$k_2 = 2,33 \times 3 + 210 = 216,99$

R.C. $\overline{X}_n \geq 216,99$ indpat de 210 (valeur sans H_0) de UPP

b, $\left.\begin{array}{l} \overline{x}_{25} = 212 \in (A) \\ \qquad\qquad \notin R.C \end{array}\right\} \rightarrow$ on accepte H_0

c, Puissance du test $P(D_1 / H_1)$

$\eta = 1 - \beta = 1 - P(D_0 / H_1)$

$$= 1 - \pi\left(K_\alpha - (m_1 - m_0)\frac{5}{15}\right)$$

$$= 1 - \pi\left(K_\alpha - (m_1 - m_0)\frac{\sqrt{n}}{\sigma_0}\right)$$

$$= 1 - \pi\left(2,33 - (m_1 - 210)\frac{1}{3}\right)$$

$* \; m_1 = 215$

$1 - \pi(0,6633) = 1 - 0,7454 = 25,46\%$

$m_1 = 220 \rightarrow 84,13\%$

d, Courbe d'efficacité

$$\eta = 1 - \pi\left[K\alpha - (m_1 - m_0)\frac{5}{15}\right] = 0,9$$

$$\pi\left[K\alpha - (m_1 - m_0)\frac{5}{15}\right] = 0,1$$

On voit que : $\pi(t) = 0,9 \rightsquigarrow t = 1,285$

$\pi(-1,285) = 0,1$

$$K\alpha - (m_1 - m_0)\frac{5}{15} = -1,285$$

$$2,33 - (m_1 - 210)\frac{5}{15} = -1,285$$

$\rightarrow m_1 = 221$

m_1	210	215	220	221
η	0,1	0,2546	0,8413	0,9

Exercice 2

$$\sigma^2 \rightarrow S^2 = \frac{\sum (X_i - \overline{X}_n)^2}{n-1} = \frac{676}{69} \rightarrow S = \sqrt{\frac{676}{69}}$$

$$T_0 = \frac{\overline{X}_n - 8}{S_n/\sqrt{70}} \rightsquigarrow St(n-1)$$

$$\begin{cases} H_0 : & m = 8 \\ H_1 : & m < 8 \end{cases}$$

$\alpha = 5\% = 0,05 = P(\overline{X}_n < k / T_0 \rightsquigarrow St(691)$

$= P(T_0 < t\alpha / T_0 \rightsquigarrow \cdots\cdots)$

$-1,65 \rightarrow -1,67$

$$\frac{k-8}{3,13} = -1,67$$

$k = 7,375$