Choix dans l'incertain Fabian Gouret
L3 Sciences Economiques 2012-2013

Université de Cergy-Pontoise

Chapitres 3 et 4

Exercice 1

Votre voisin n'aime pas les fonctions d'utilité à valeurs négatives comme $u(w) = -e^{-\alpha w}$.

1/ Proposez lui une fonction à valeurs positives qui représente les mêmes préférences que l'exponentielle négative.

2/ A-t-elle un intérêt?

Exercice 2

Vous avez vu dans votre cours que l'approximation d'Arrow-Pratt de la prime de risque était donnée par:
$\pi = \frac{-\mathbb{V}(w)}{2} \frac{u''(w)}{u'(w)}$

Cette approximation est un argument en faveur de la mesure du risque par la variance.

Considérez un agent dont les préférences sont représentées par la fonction $u(w) = \sqrt{w}$. Il doit choisir entre les deux loteries L_1 et L_2:

$L_1 = (\{0; 0,5\}; \{4; 0,5\})$

$L_2 = (\{1; \frac{7}{8}\}; \{9; \frac{1}{8}\})$

1/ Calculez l'espérance de w dans les deux cas, et la variance. Quelle loterie choisit l'agent.

2/ Calculez l'espérance d'utilité. Quelle loterie choisit l'agent.

3/ Comparez les résultats en 1/ et en 2/. Commentez.

Exercice 3

Un agent doit placer une somme ω, dont on admet qu'elle se confond avec son patrimoine. Il a le choix entre une actif au taux de rendement i certain, et un actif au taux de rendement aléatoire $Y = (\{m; p\}; \{b, 1-p\})$.

1/ On note $0 \leq a \leq \omega$ la partie de ω placée en actif risqué. Ecrire sous forme de loterie la richesse finale $W(a)$.

2/ Supposons a strictement positif. Dessinez la fonction de répartition $F(t) = Prob(W(a) \leq t)$.

3/ Dessinez la fonction de répartition $G(t) = Prob(W(0) < t)$.

4/ Vérifiez graphiquement que si $i < m < b$, quelque soit $a > 0$, $W(a)$ domine stochastiquement $W(0)$.

5/ Exprimez ce résultat de manière littéraire.

6/ Même question si $m < b < i$.

Exercice 4

Un individu dispose d'une richesse total de 40 et fait face à un risque d'accident. En cas d'accident, sa voiture est détruite. La valeur de sa voiture est de 20, de sorte que sa richesse tombe à 20. La probabilité d'accident est de $0,50$. L'individu évalue les risques au moyen d'une fonction d'utilité de VNM $u(x) = \ln(x)$, ou x désigne sa richesse finale. Une compagnie d'assurance offre un contrat qui promet un remboursement T en cas d'accident, en échange du paiement d'une prime fixe p. Un contrat est donc donné par un couple (p, T). Il y a assurance totale si le risque est totalement couvert, i.e. si $T = 20$.

1/ On appelle courbe d'iso-utilité une courbe reliant tous les contrats induisant un même niveau d'utilité espérée de l'individu, et courbe d'iso-profit une courbe induisant le même niveau de profit espéré pour la compagnie d'assurances. Déterminez dans le plan (p, T) les équations représentant les courbes d'iso-profit et d'iso-utilité. Montrez que la pente d'une courbe d'iso-utilité est 2 en un point $(p, 20)$. Représentez graphiquement ces courbes. Déduire de ces résultats que le meilleur contrat pour l'agent qui garantit une espérance de profit nulle à la compagnie d'assurance est un contrat d'assurance totale.

2/ La compagnie fait face à un coût fixe de 1 pour l'écriture d'un contrat. Montrez graphiquement que le meilleur contrat pour l'agent qui garantit un profit espéré nul à la compagnie est un contrat d'assurance totale. Montrez que l'individu préfère ce contrat à ne pas signer de contrat.

3/ Les transferts de la compagnie vers l'agent sont coûteux: chaque unité remboursée à l'agent coûte $1 + 1/6$ à la compagnie en raison de frais d'expertise. Quelle est l'espérance de profit pour un contrat (p, T)? Montrez que le meilleur contrat pour l'agent qui garantit un profit espéré nul est un contrat d'assurance partielle.