Série 2

Ex 1 :

1, X : dossier quelconque bien rempli

$X = \begin{cases} 1 , & p = 0,94 \\ 0 , & 1-p = 1-0,94 = 0,06 \end{cases}$

$X \rightarrow$ Bernoulli (p)

2, $X \rightarrow B(p)$ $\quad \forall k \in [0,1]$

$X \rightarrow B(0,94)$

$P(X-k) = p^k (1-p)^{1-k} = 0,94^k \cdot (0,006)^{1-k}$

3, $G_X(t) = E(t^0) = t^0 q + t^1 q = q + tp = 0,06 + 0,94 t$

$E(X) = \frac{dG_X(t)}{dt} (t=1)$

$V(x) = \frac{dG^2 x(t)}{dt^2} (t=1) + \frac{dG_X(t)}{dt} (t=1) - \left[\frac{dG_X(t)}{dt} (t=1) \right]$

$G_x'(t) = 0,94$

$G_x(1)' = 0,94$

$E(x) = 0,94$

$E(x) = p$

$G_x(t)'' = 0 + 0,94 - 0,94^2 = 0,96 \times 0,06$

$V(x) = 0 + p - p^2 = p(1-p)$

2ème partie 1) $X = x_1 + x_2 + x_3 + \dots + X_{100}$

$X = \sum_{i=1}^{100} x_i$

2) On effectue n fois l'expérience de Bernoulli. Donc, $X \rightarrow$ Binominale (n, p)

avec $n = 100$ et $p = 0,94$

$\forall k \in \mathbb{N}, \ p(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

3) $G_x(t)' = E(t^x) = \sum_{k=p}^{100}$

$= \sum \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} t^k$

$= \sum \binom{n}{k} (pt)^k (1-p)^{n-k}$

$= \sum \binom{n}{k} (pt)^k (q)^{n-k}$

$\frac{dG_x(t)}{dt} = np(pt+q)^{n-1} = n(pt+q)^{n-1} \cdot p$

Avec $k = 1$ - $n(p+q)^{n-1} \cdot p$

$= n(p+1-p) \times q$

$E(x) = np$

$V(x) = \frac{d^2 G_x(t)}{dt^2}(t=1) + \frac{dG_x(t)}{dt} - \left[\frac{dG_x t}{dt}(t=1)\right]^2$

$= (n^2p^2 - np^2) + (np) - (np)^2$

$\frac{d^2G_x(t)}{dt^2} = \left[n(pt+q)^{n-1} \cdot p\right]$

$= (n-1)n \times p(pt+q)^{n-2} \cdot p$

$= n(n-1) \times p^2 \times (pt+q)^{n-2}$

Avec $t = 1$ on a $\Leftrightarrow n(n-1) \cdot p^2 (p+q)^{n-2}$

$= n(n-1) \times p^2$

$= (n^2 - n) \times p^2$

$V(X) = (n^2p^2 - np^2) + (np) - (np)^2$

$= n^2p^2 - np^2 - (np)^2 + np = np(1-p)$

$V(X) = npq$

4) $P(X < 96)$

$X \rightarrow \mathcal{N}(np, npq)$

$Y = \frac{96 - E(x)}{\sqrt{V(x)}} = \frac{96 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{96 - 94}{\sqrt{5{,}76}} = 0{,}84$

$P(X < 96) = P(Y < 0{,}84) = \phi(0{,}84) = 0{,}7995$

$P(X \geq 96) = 1 - p(X < 96) = 1 - 0{,}7995 = 0{,}2005$

$P(X \geq 90) = 1 - P(X < 90)$

$= 1 - p\left(Y < \frac{-4}{\sqrt{5{,}76}}\right) = 1 - P(Y < -1{,}660)$

$P(X < -m) = 1 - P(X < m)$

$= 1 - [1 - P(Y < 1,666)] = P(Y < 1,666) = 0,95$

$P(90 \leqslant X \leqslant 92) = P(90 \leqslant X < 93)$

$= F(93) - F(90) = P(X<93) - P(X<90)$

$= P\left(Y < \dfrac{-1}{\sqrt{5,76}}\right) - P\left(Y < \dfrac{-4}{\sqrt{5,76}}\right)$

$= P(Y < -0,42) - P(Y < -1,66)$

$= 1 - P(Y < 0,42) - [1 - P(Y < 1,66)]$

$= 1 - 0,6591 - (1 - 0,9515) = 0,9515 - 0,6591 = 0,2024$

Ex 2

1) $X \rightarrow (n, p)$ (Binominale)

$X \rightarrow (2000 ; 0,001)$

$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k \cdot q^{n-k}$

2) Approximation de la binominale par la loi de Poisson

$X \rightsquigarrow$ Poisson (λ)

a, $E(X) = np = 2000 \times 0,001 = 2$

$P(X = 3) = e^{-2} \cdot \dfrac{2^3}{3} = 0,18$

$P(X > 2) = 1 - P(X \leqslant 2) = 1 - [P(X=0) + P(X=1) + P(X=2)]$

$= 1 - \left[\left(e^{-2} \cdot \dfrac{2^0}{0!}\right) + \left(e^{-2} \cdot \dfrac{2^1}{1!}\right) + \left(e^{-2} \cdot \dfrac{2^2}{2!}\right)\right]$

$= 1 - [e^{-2} + e^{-2} \times 2 + e^{-2} \cdot 2]$

$= 1 - (0,13 + 0,27 + 0,27) = 0,33$

Ex 3

Partie A

1) $X \rightsquigarrow \mathcal{N}(m, \sigma)$

$f(x) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$

2, Soit $T = \dfrac{x-m}{\sigma}$

$T \rightsquigarrow \mathcal{N}(0,1)$

$f(\pi) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-T^2/2}$ et $T = \left(\dfrac{x-m}{\sigma}\right)$

3) Soit $P(a < T < b) = \displaystyle\int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-T^2/2} dt$

$$= \phi(b) - \phi(x)$$

$$\phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} dt$$

Partie C.

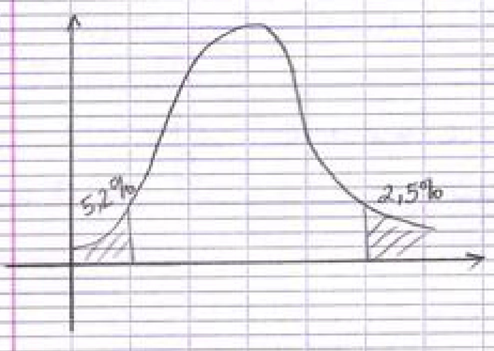
1) $T_i = \dfrac{x_i - m}{\sigma}$ suit la loi ~~normale~~ nominale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$

2) T_i^2 suit une loi Khi deux χ_1^2 à un degre de liberté. La valeur ΣT_i^2 suit une loi du Khi-deux à 9 degrés de liberté.

3) La variable $Z = \dfrac{\sum_{i=1}^{9} (X_i - \overline{X})^2}{\sigma^2}$ suit une loi du Khi deux à 8 degrés de liberté.

$E(t) = n = 8$; $V(t) = 2m = 2 \times 8 = 16$

4)



$\Rightarrow P(k_1 < Z < k_2) = 95\%$

$P(Z \geqslant k_2) = 0{,}025$

$P(Z \geqslant k_1) = 0{,}975$

$\Rightarrow P(Z < k_1) = 0{,}025 \Rightarrow k_1 = 2{,}18$

$P(Z \leqslant k_2) = 0{,}975 \Rightarrow k_2 = 17{,}53$