Choix dans l'incertain
L3 Sciences Economiques 2012-2013

Fabian Gouret

Université de Cergy-Pontoise

Chapitre 2

Exercice 1

Jo gagne sa vie en vendant des billets de loterie. Supposons qu'il en vende à trois agents: Jean, Geoffrey et Paul. Les trois agents ont les fonctions d'utilité suivantes pour les sommes pouvant être gagnées à l'issue des loteries.

	Fonctions d'utilité		
Sommes	Jean	Geoffrey	Paul
0 euros	0	0	0
500 euros	500	1250	700
1000 euros	1000	1800	1260
1500 euros	1500	2250	1400
2000 euros	2000	2400	1400
3000 euros	3000	2500	1400

Dans ce tableau la colonne de gauche indique les sommes mises en jeu et chaque colonne de droite donne l'utilité de ces sommes pour chacun des trois agents.

1/ Si la première loterie offre 50% de chances de gagner 3000 euros et 50% de chances de ne rien gagner (0 euro), quel est le montant maximum que chacun des trois agents est disposé à payer pour participer à cette loterie?

2/ Quelle est la prime de risque de chacun de ces trois agents?

3/ Supposons que Jo veuille vendre aux trois agents une assurance pour leur voiture. Chaque voiture à une valeur courante de 3000 euros. Mais cette valeur peut tomber à zéro en cas d'accident. Il y a 90% de chances qu'il n'y ait pas d'accident et 10% de chances qu'il y en ait. Combien chaque agent est disposé à payer pour assurer sa voiture?

Exercice 2

Un agent possède un patrimoine ω. Il est suceptible de subir un sinistre détruisant intégralement ce patrimoine (avec une probabilité π). La police d'assurance proposée lui rembourse une somme q en cas de sinistre et l'assuré doit payer en contrepartie une prime P. L'individu peut s'assurer plus ou moins complètement. Il peut choisir la valeur de remboursement q. Par contre la prime payée dépend de q: $P = kq$. Evidemment $k \in [0, 1]$.

1/ Quelles sont les ressources de l'individu (notées r_1) en cas de sinistre (état 1) et celles de l'individu (notées r_2) s'il n'y a pas de sinistre (état 2)?

2/ Eliminer q et obtenez une relation entre r_1 et r_2.

3/ Décrire cette droite dans le plan (r_1, r_2).

4/ Que représente cette droite?

5/ Supposez maintenant que l'attitude face au risque de l'assuré puisse être représentée par une fonction d'utilité de VNM, cette fonction d'utilité étant supposée concave. L'individu maximise l'espérance mathématique de l'utilité de ses ressources:

$$\mathbb{E}U = \pi u(r_1) + (1 - \pi)u(r_2)$$

Décrire les courbes d'indifférence de notre agent dans un plan (r_1, r_2). Vous montrerez préliminairement que ces courbes sont convexes.

6/ Vous calculerez le Taux marginal de substitution (TMS) entre richesse dans l'état 1 et richesse dans l'état 2.

7/ Maximisez l'espérance d'utilité dans l'ensemble des couples (r_1, r_2) que notre agent est susceptible de choisir. Vous montrerez qu'à l'optimum on a:

$$TMS = \frac{\pi u'(r_1)}{(1 - \pi)u'(r_2)} = \frac{k}{1 - k}$$

8/ Montrez que dans le cas d'une prime d'assurance dite "juste" (*fair* en anglais), i.e. quand la prime d'assurance est égale à l'espérance mathématique du dédommagement ($P = kq = \pi q$), nous avons à l'optimum $r_1 = r_2$.

9/ Refaire les questions 7/ et 8/ en considérant $u(r) = \ln(r)$.

Exercice 3

Un agent possède une somme d'argent w qu'il peut investir dans un actif sans risque ayant un taux d'intérêt de r. Alternativement, il peut acheter un actif ayant un rendement aléatoire d'espérance x $(\{x_1, \pi_1\}; \{x_2, \pi_2\}; \ldots; \{x_n, \pi_n\})$. Il répartit sa somme d'argent w à raison d'un montant α dans l'actif risqué et d'un montant $w - \alpha$ dans l'actif non risqué. Il maximise l'espérance d'utilité de son portefeuille.

1/ Montrer que la valeur finale espérée de son portefeuille est donnée par:

$$z = w(1 + r) + \alpha(x - r)$$

2/ Ecrire l'espérance d'utilité.

3/ La valeur optimale α^* peut-elle être égale à zéro?

4/ Si le rendement espérée de l'actif risqué est supérieur au rendement de l'actif non risqué, un agent averse au risque investira-t-il une somme $\alpha^* > 0$ dans l'actif risqué?

5/ Vous chercherez sur internet ce qu'est l'"*Equity Premium Puzzle*". En quoi nos résultats l'illustrent?

Exercice 4

Un salarié gagne un revenu r. Il peut perdre son emploi avec probabilité p, auquel cas il perçoit un revenu de remplacement $b < r$. En plus de son salaire, il a une richesse qui est égale à ω. Il a une fonction d'utilité de VNM du type: $u(x) = \ln x$.

1/ Donner la loterie à laquelle fait face le salarié.

2/ Montrer que l'équivalent certain est donné par:

$$\overline{w} = (\omega + b)^p (\omega + r)^{1-p}$$

3/ Considérer que $\omega = 1000$, $r = 1200$, $b = 600$ et $p = 0,1$. Calculer l'espérance de la loterie puis l'équivalent certain.

4/ Calculer la prime de risque. Interpréter.

5/ Considérer maintenant que la richesse initiale est nulle. Calculer l'équivalent certain et la prime de risque. Commenter.

6/ La crainte du chômage peut se mesurer par la variation d'espérance d'utilité quand la probabilité p augmente. Expliquer la différence avec l'aversion pour le risque.