L2 Gestion, 2015 - 2016

TD du Cours de Statistiques

Feuille N° 1 : **Rappels de probabilités**

Exercice 1

Un étudiant lance deux dés (d_1 et d_2) équilibrés (non truqués) et note les deux nombres affichés. On désigne par S la somme de ces deux nombres.

1. Quelle est la probabilité que S soit supérieure ou égale à 9?
2. Comme il y a six valeurs paires possibles (2, 4, 6, 8, 10, 12) pour S et seulement cinq valeurs impaires possibles (3, 5, 7, 9, 11), l'étudiant conclut qu'il y a plus de chance que S soit paire. Etes-vous d'accord avec ce raisonnement?
3. On considère les événements
   A : "obtenir un nombre impair pour d_1" ;
   B : "obtenir un nombre pair pour d_2" ;
   C : "S est paire".
   Montrer que les événements A, B, C sont 2 à 2 indépendants mais pas mutuellement indépendants.

Exercice 2

Une urne contient une boule blanche et une boule noire. On considère le jeu qui consiste à effectuer des tirages avec remise dans cette urne jusqu'à obtenir une boule blanche, ajoutant une boule noire après chaque tirage d'une boule noire. Calculer la probabilité de l'événement "arrêt de la partie au $n^{\text{ème}}$ tirage" avec $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 3

Démontrer que si deux événements A et B sont indépendants, alors A et l'événement complémentaire de B, $\overline{\mathrm{B}}$, sont indépendants.

Exercice 4

Un questionnaire à choix multiples propose quatre réponses pour chaque question. Soit $p = 0,3$ la probabilité qu'un étudiant connaisse la réponse à une question donnée. Si l'étudiant ignore la réponse, il choisit au hasard l'une des réponses proposées. Quelle est pour le correcteur la probabilité qu'un étudiant connaisse vraiment la bonne réponse lorsqu'il l'a donnée?

Exercice 5

Une compagnie d'assurance répartit ses clients en trois classes de risque : R_1 (risque faible), R_2 (risque moyen) et R_3 (risque élevé). Les effectifs de chaque classe représentent 20%, 50% et 30% de la population totale. Les probabilités d'avoir un sinistre dans l'année pour chacune des classes sont respectivement $0,05$, $0,15$ et $0,30$.

1. Quelle est la probabilité pour qu'une personne choisie au hasard ait un sinistre dans l'année ?
2. Si M. André n'a pas eu de sinistre cette année, quelle est la probabilité qu'il soit dans la classe de risque faible R_1 ?

Exercice 6
On considère la fonction F définie par

$$F(x) = \begin{cases} a & \text{si } x < 0 \\ b & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 2b + c & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ d & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

1. A quelles conditions sur a, b, c, d, F est-elle une fonction de répartition?
   On suppose dans la suite que F est la fonction de répartition d'une variable aléatoire X.
2. Calculer $P(X \leq 3)$; $P(X > 1)$; $P(0,5 < X \leq 1)$.
3. On suppose que $P(X > 1) = 0,3$ et $P(0,5 < X \leq 1) = 0,6$. Déterminer a, b, c, d.
4. Déterminer la loi de probabilité de X, son espérance et sa variance.

Exercice 7
La probabilité qu'une agence immobilière vende un appartement dans une négociation est $p \in]0, 1[$. L'agence effectue n négociations chaque jour. On suppose que les négociations sont indépendantes. Soit X la variable aléatoire égale au nombre d'appartements vendus au cours d'une journée.

1. Déterminer la loi de X.
2. Déterminer la probabilité que l'agence vende au moins un appartement en un jour.

Exercice 8
Deux personnes A et B participent à un jeux qui consiste à lancer un même dé équilibré à tour de rôle jusqu'à la première obtention d'un 6. Le gagnant est le premier à obtenir 6.

1. Déterminer la probabilité que la partie s'arrête au $k^{\text{ème}}$ lancer.
2. Quelle est la probabilité de l'événement "il n'y a pas de vainqueur"?
3. On considère la variable aléatoire X égale au nombre de lancers effectués.
   (a) Déterminer la loi de X.
   (b) Déterminer l'espérance et la variance de X.

Exercice 9
Soit (X, Y) un couple de v.a. discrètes dont la loi est donnée par le tableau

X \ Y	1	2	3
0	a	2/12	3/12
1	0	1/12	$2a$
2	1/12	1/12	1/12

où $a \in]0,1[$.

1. Déterminer a.
2. Déterminer les lois marginales de X et Y. Les v.a. X et Y sont-elles indépendantes?
3. Calculer $Cov(X,Y)$.
4. Déterminer la loi conditionnelle de Y sachant $X = 0$. Comparer cette loi à la loi marginale de Y. Y a-t-il une contradiction avec la réponse sur l'indépendance trouvée à la question 2.?

Exercice 10
Soit (X,Y) un couple de v.a. discrètes dont la loi est donnée par le tableau

X \ Y	-1	0	1
-1	1/8	1/16	1/8
0	1/8	1/8	1/8
1	1/8	1/16	1/8

1. Déterminer les lois marginales de X et Y.
2. Calculer $Cov(X,Y)$.
3. Les v.a. X et Y sont-elles indépendantes?

Exercice 11
Soit X et Y deux v.a. indépendantes de même loi $\mathcal{B}(p)$ avec $p \in]0,1[$.

1. Déterminer la loi de $X+Y$ et celle de $X-Y$.
2. Les v.a. $X+Y$ et $X-Y$ sont-elles indépendantes?