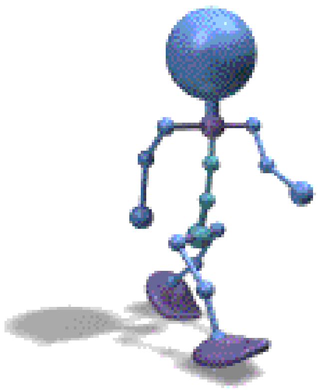
Lundi, 28 Septembre 2015

Optimisation – Licence 3 EF & DU – 2015/2016

Planche de TD N° 1



--- 11H00 → 12H30

Présentions, organisation des activités

Responsable de TD :	**NGANMENI Zéphirin** Etudiant en fin de thèse, UCP nganmeni@gmail.com
Horaire de TD :	Lundi, 11H00 – 12H30
Nombre de Séances :	10 Séances Du 28/09/2015 au 07/12/2015
Proportion CC– Examen :	A définir…
Dates des compositions :	A définir…

Dispositions Pratiques

Pour le bon déroulement des activités, nous vous recommandons de :

- Assister et être attentif à tous les cours magistraux
- Relire le cours et chercher à bien le comprendre
- Réaliser les exercices de la fiche de TD (Avant)
- Intervenir et proposer votre démarche de résolution pendant les séances de TD
- Bien prendre les notes (cours, TD) et poser des questions lorsque cela est nécessaire

Note : La présence (cours, TD) est obligatoire!

Exercice 1

Soient d_1, d_2 et d_∞ les applications définies respectivement sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ par :

$$\forall X = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$$

et

$$\forall Y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$$

- $d_1(X,Y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$;
- $d_2(X,Y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$;
- $d_\infty(X,Y) = max_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|$.

1) Montrer que chacune de ces applications définit une distance sur $\mathbb{R}^n$.
2) On se place dans le cas où n=1. Déterminer les valeurs de d_1, d_2 et d_∞.
3) On se place dans le cas n=2. Pour chacune des distances, représenter dans un repère orthonormé la boule ouverte puis la boule fermée de centre O et de rayon r=1.

Solution de l'exercice 1

1) Montrer que chacune de ces applications définit une distance sur $\mathbb{R}^n$.

Rappel du cours

Soit d : $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$, une application. D est une distance si et seulement si d vérifie les axiomes suivants :

D_1) $\forall X, Y \in \mathbb{R}^n$, on a : $d(X,Y) = 0 \Leftrightarrow X = Y$ (Séparation)

D_2) $\forall X, Y \in \mathbb{R}^n$, on a : $d(X,Y) = d(Y,X)$ (Symétrie)

D_3) $\forall X, Y, Z \in \mathbb{R}^n$, on a : $d(X,Y) \leq d(X,Z) + d(Z,Y)$ (Inégalité triangulaire)

Solution de l'exercice 1

❖ Montrons que d_1 est une distance sur $\mathbb{R}^n$.

$$d_1(X,Y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|,\ X,Y \in \mathbb{R}^n$$

D_1) $\forall X,Y \in \mathbb{R}^n$, on a : $d(X,Y) = 0 \Leftrightarrow X = Y$ (Séparation)

D_1) Soient $X,Y \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} d_1(X,Y) = 0 &\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall i \in [|1,n|],\ |x_i - y_i| = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall i \in [|1,n|],\ x_i - y_i = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall i \in [|1,n|],\ x_i = y_i \\ &\Leftrightarrow X = Y \end{aligned}$$

Donc $\forall X,Y \in \mathbb{R}^n,\ d_1(X,Y) = 0 \Leftrightarrow X = Y$

Solution de l'exercice 1

❖ Montrons que d_1 est une distance sur $\mathbb{R}^n$.

$$d_1(X,Y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|,\ X,Y \in \mathbb{R}^n$$

D_2) $\forall X,Y \in \mathbb{R}^n$, on a : $d(X,Y) = d(Y,X)$ (Symétrie)

D_2) Soient $X,Y \in \mathbb{R}^n$

$$d_1(X,Y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| \text{ et } d_1(Y,X) = \sum_{i=1}^{n} |y_i - x_i|$$

Or $\forall i \in [|1,n|]$, $|x_i - y_i| = |y_i - x_i|$,

donc $\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| = \sum_{i=1}^{n} |y_i - x_i|$.

Par conséquent, $\forall X,Y \in \mathbb{R}^n$, $d_1(X,Y) = d_1(Y,X)$

Solution de l'exercice 1

❖ Montrons que d_1 est une distance sur $\mathbb{R}^n$.

$$d_1(X,Y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|,\ X,Y \in \mathbb{R}^n$$

D_3) $\forall X,Y,Z \in \mathbb{R}^n$, on a : $d(X,Y) \leq d(X,Z) + d(Z,Y)$ (Inégalité triangulaire)

D_3) Soient $X, Y, Z \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} d_1(X,Y) &= \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| \\ &= \sum_{i=1}^{n} |x_i - z_i + z_i - y_i| \qquad [1] \end{aligned}$$

Or $\forall i \in [|1,n|], |x_i - z_i + z_i - y_i| \leq |x_i - z_i| + |z_i - y_i|$, donc

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i - z_i + z_i - y_i| \leq \sum_{i=1}^{n} (|x_i - z_i| + |z_i - y_i|) \qquad [2]$$

De plus,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} (|x_i - z_i| + |z_i - y_i|) &= \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - z_i|\right) + \left(\sum_{i=1}^{n} |z_i - y_i|\right) \\ &= d_1(X,Z) + d_1(Z,Y) \end{aligned}$$

La relation [2] devient : $\sum_{i=1}^{n} |x_i - z_i + z_i - y_i| \leq d_1(X,Z) + d_1(Z,Y)$ et

La relation [1] nous permet de conclure que: $d_1(X,Y) \leq d_1(X,Z) + d_1(Z,Y)$

Solution de l'exercice 1

❖ Montrons que d_2 est une distance sur $\mathbb{R}^n$.

$$d_2(X,Y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2},\ X,Y \in \mathbb{R}^n$$

D_1) Soient $X, Y \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned}
d_2(X,Y) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2} = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \forall i \in [|1,n|], \sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2 = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \forall i \in [|1,n|],\ (x_i - y_i)^2 = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \forall i \in [|1,n|],\ x_i - y_i = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \forall i \in [|1,n|],\ x_i = y_i \\
&\Leftrightarrow \quad X = Y
\end{aligned}$$

Donc $\forall X,Y \in \mathbb{R}^n,\ d_2(X,Y) = 0 \Leftrightarrow X = Y$

Solution de l’exercice 1

- Montrons que d_2 est une distance sur $\mathbb{R}^n$.

  $d_2(X,Y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2},\ X, Y \in \mathbb{R}^n$

D_2) Soient $X, Y \in \mathbb{R}^n$

$d_2(X,Y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2}$ et $d_2(Y,X) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i - x_i)^2}$

Or $\forall i \in [|1,n|]$, $(x_i - y_i)^2 = (y_i - x_i)^2$,

donc $\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i - x_i)^2}$.

Par conséquent, $\forall X, Y \in \mathbb{R}^n,\ d_2(X,Y) = d_2(Y,X)$

Solution de l'exercice 1

- Montrons que d_2 est une distance sur $\mathbb{R}^n$.

  $d_2(X,Y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2}$, $X, Y \in \mathbb{R}^n$

D_3) $\forall X, Y, Z \in \mathbb{R}^n$, on a : $d(X,Y) \leq d(X,Z) + d(Z,Y)$ (Inégalité triangulaire)

$$
\begin{aligned}
\left(d_2(X,Y)\right)^2 &= \sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n}(x_i - z_i + z_i - y_i)^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n}\left((x_i - z_i)^2 + 2(x_i - z_i)(z_i - y_i) + (z_i - y_i)^2\right) \\
&\leq \sum_{i=1}^{n}(x_i - z_i)^2 + 2\sum_{i=1}^{n}|x_i - z_i||z_i - y_i| + \sum_{i=1}^{n}(z_i - y_i)^2 \quad [3]
\end{aligned}
$$

D'après l'inégalité de Cauchy, on à :

$$\sum_{i=1}^{n}|x_i - z_i||z_i - y_i| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - z_i)^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(z_i - y_i)^2}$$

La relation [3] devient :

$$
\begin{aligned}
\left(d_2(X,Y)\right)^2 &\leq \sum_{i=1}^{n}(x_i - z_i)^2 + 2\sum_{i=1}^{n}|x_i - z_i||z_i - y_i| + \sum_{i=1}^{n}(z_i - y_i)^2 \\
&\leq \sum_{i=1}^{n}(x_i - z_i)^2 + 2\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - z_i)^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(z_i - y_i)^2} + \sum_{i=1}^{n}(z_i - y_i)^2 \\
&= \left(d_2(X,Z)\right)^2 + 2\sqrt{d_2(X,Z)}\sqrt{d_2(Z,Y)} + \left(d_2(Z,Y)\right)^2 \\
&= \left(d_2(X,Z) + d_2(Z,Y)\right)^2
\end{aligned}
$$

D'où $d_2(X,Y) \leq d_2(X,Z) + d_2(Z,Y)$

Solution de l'exercice 1

❖ Montrons que d_∞ est une distance sur $\mathbb{R}^n$.
$d_\infty(X,Y) = max_{1\leq i\leq n}|x_i - y_i|,\ X,Y \in \mathbb{R}^n$

$\boldsymbol{D_1}$**) Soient** $\boldsymbol{X, Y} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$

$$
\begin{aligned}
d_\infty(X,Y) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad max_{1\leq i\leq n}|x_i - y_i| = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \forall i \in [|1,n|], |x_i - y_i| = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \forall i \in [|1,n|],\ x_i - y_i = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \forall i \in [|1,n|],\ x_i = y_i \\
&\Leftrightarrow \quad X = Y
\end{aligned}
$$

Donc $\forall X,Y \in \mathbb{R}^n,\ d_\infty(X,Y) = 0 \Leftrightarrow X = Y$

Solution de l'exercice 1

❖ Montrons que d_∞ est une distance sur $\mathbb{R}^n$.
$d_\infty(X,Y) = max_{1\leq i\leq n}|x_i - y_i|,\ X,Y \in \mathbb{R}^n$

$\boldsymbol{D_2}$**) Soient** $\boldsymbol{X,Y} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$

$d_\infty(X,Y) = max_{1\leq i\leq n}|x_i - y_i|$, et $d_\infty(Y,X) = max_{1\leq i\leq n}|y_i - x_i|$,

Or $\forall i \in [|1,n|]$, $|x_i - y_i| = |y_i - x_i|$,

donc $max_{1\leq i\leq n}|x_i - y_i| = max_{1\leq i\leq n}|y_i - x_i|$.

Par conséquent, $\forall X,Y \in \mathbb{R}^n,\ d_\infty(X,Y) = d_\infty(Y,X)$

Solution de l'exercice 1

❖ Montrons que d_∞ est une distance sur $\mathbb{R}^n$.

$d_\infty(X,Y) = max_{1\leq i\leq n}|x_i - y_i|, \; X,Y \in \mathbb{R}^n$

D_3) Soient $X, Y, Z \in \mathbb{R}^n$

$d_\infty(X,Y) = max_{1\leq i\leq n}|x_i - y_i|$

$\exists i_0 \in [|1,n|] \; tel \; que : \; |x_{i_0} - y_{i_0}| = max_{1\leq i\leq n}|x_i - y_i|$

On a alors :

$$\begin{aligned} |x_{i_0} - y_{i_0}| &= |x_{i_0} - z_{i_0} + z_{i_0} - y_{i_0}| \\ &\leq |x_{i_0} - z_{i_0}| + |z_{i_0} - y_{i_0}| \end{aligned}$$

Or $|x_{i_0} - z_{i_0}| \leq max_{1\leq i\leq n}|x_i - z_i|$ et $|z_{i_0} - y_{i_0}| \leq max_{1\leq i\leq n}|z_i - y_i|$

Donc :

$max_{1\leq i\leq n}|x_i - y_i| = |x_{i_0} - y_{i_0}| \leq max_{1\leq i\leq n}|x_i - z_i| + max_{1\leq i\leq n}|z_i - y_i|$

Par suite, $d_\infty(X,Y) \leq d_\infty(X,Z) + d_\infty(Z,Y)$

D'où d_∞ est une distance sur $\mathbb{R}^n$.

Solution de l'exercice 1

2) On se place dans le cas n=1, déterminons les valeurs de $\boldsymbol{d_1}, \boldsymbol{d_2}$ et $\boldsymbol{d_\infty}$.

Soit $x, y \in \mathbb{R}$,

- $d_1(x,y) = |x-y|$
- $d_2(x,y) = \sqrt{(x-y)^2} = |x-y|$
- $d_\infty(x,y) = max_{1 \leq j \leq n}|x-y| = |x-y|$

Solution de l'exercice 1

3) On se place dans le cas n=2.

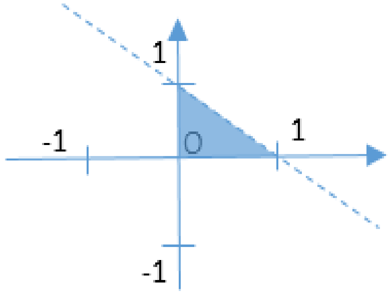
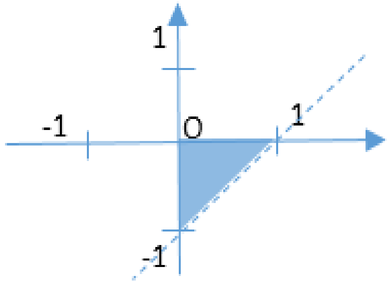
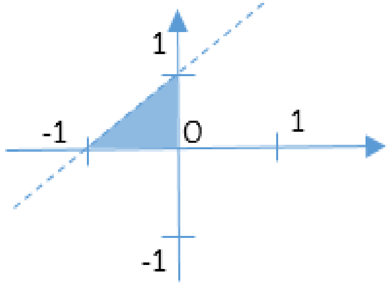
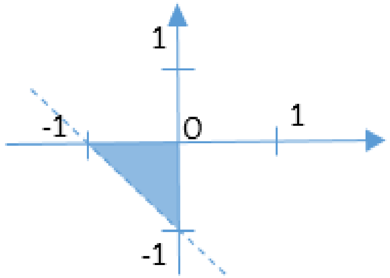
Pour chacune des distances, représentons dans un repère orthonormé la boule ouverte puis la boule fermée de centre O et de rayon r=1.

- $\mathcal{B}_o^{d_1} = \{X = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : d_1(X, O) < 1\}$, avec $O = (0,0)$

  $d_1(X, O) = |x_1| + |x_2|$

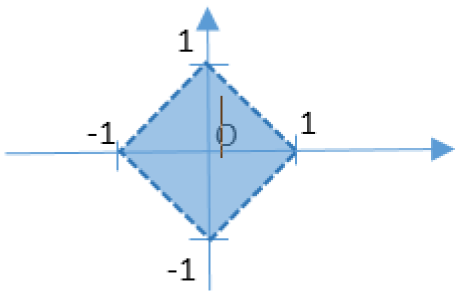
  $\mathcal{B}_o^{d_1} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : |x_1| + |x_2| < 1\}$

$$|x_1| + |x_2| = \begin{cases} x_1 + x_2 \;\; si \;\; x_1 \geq 0 \; et \; x_2 \geq 0 \\ x_1 - x_2 \;\; si \;\; x_1 \geq 0 \; et \; x_2 < 0 \\ -x_1 + x_2 \;\; si \;\; x_1 < 0 \; et \; x_2 \geq 0 \\ -x_1 - x_2 \;\; si \;\; x_1 < 0 \; et \; x_2 < 0 \end{cases}$$

1^{er} Cas : $x_1 \geq 0 \; et \; x_2 \geq 0$ $\lvert x_1 \rvert + \lvert x_2 \rvert < 1 \Leftrightarrow x_1 + x_2 < 1$ (D1) : $x_1 + x_2 = 1$	
$2^{ème}$ Cas : $x_1 \geq 0 \; et \; x_2 < 0$ $\lvert x_1 \rvert + \lvert x_2 \rvert < 1 \Leftrightarrow x_1 - x_2 < 1$ (D2) : $x_1 - x_2 = 1$	
$3^{ème}$ Cas : $x_1 < 0 \; et \; x_2 \geq 0$ $\lvert x_1 \rvert + \lvert x_2 \rvert < 1 \Leftrightarrow -x_1 + x_2 < 1$ (D3) : $-x_1 + x_2 = 1$	
$4^{ème}$ Cas : $x_1 < 0 \; et \; x_2 < 0$ $\lvert x_1 \rvert + \lvert x_2 \rvert < 1 \Leftrightarrow -x_1 - x_2 < 1$ (D4) : $-x_1 - x_2 = 1$	

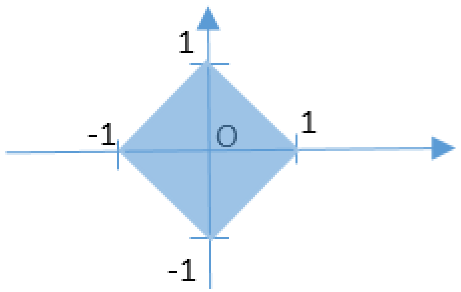
Solution de l'exercice 1

On a enfin la représentation de $\mathcal{B}_o^{d_1}$:



On en déduit la représentation de $\mathcal{B}_f^{d_1} = \{X = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : d_1(X, O) \leq 1\}$,

$\mathcal{B}_f^{d_1} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : |x_1| + |x_2| \leq 1\}$



❖ $\mathcal{B}_o^{d_2} = \{X = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : d_2(X, O) < 1\}$, avec $O = (0,0)$

$d_2(X, O) = \sqrt{{x_1}^2 + {x_2}^2}$

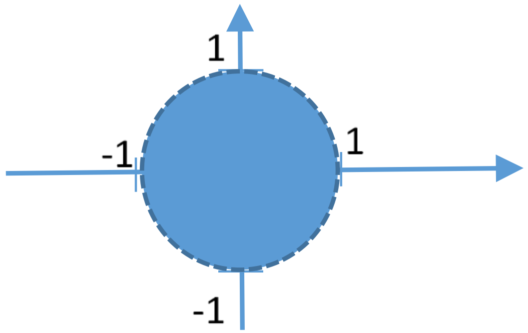
$\mathcal{B}_o^{d_2} = \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{{x_1}^2 + {x_2}^2} < 1\right\}$

$= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : {x_1}^2 + {x_2}^2 < 1\}$

Or ${x_1}^2 + {x_2}^2 = 1$ est l'équation du cercle de centre O et de rayon 1

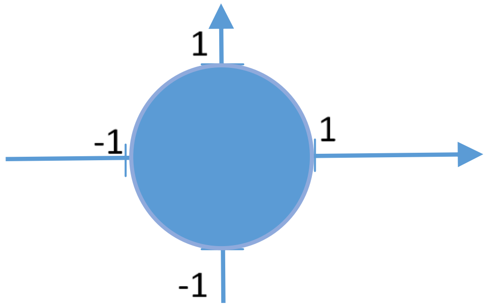
On teste un point quelconque de l'espace qui ne se trouve pas sur ce cercle. Par exemple, le test avec le point O(0, 0) donne : $0^2 + 0^2 = 0 < 1$, donc O$\in \mathcal{B}_o^{d_2}$

Représentation



On en déduit la représentation de la boule fermée :

$\mathcal{B}_f^{d_2} = \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{{x_1}^2 + {x_2}^2} \leq 1\right\}$



❖ $\mathcal{B}_o^{d_\infty} = \{X = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : d_\infty(X, O) < 1\}$, avec $O = (0,0)$

$$d_\infty(X, O) = \sqrt{{x_1}^2 + {x_2}^2}$$

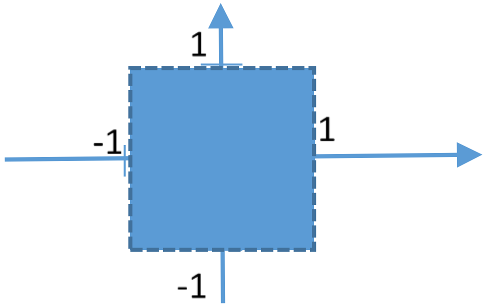
$$\mathcal{B}_o^{d_\infty} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \max\{|x_1|, |x_2|\} < 1\}$$

Or $\max\{|x_1|, |x_2|\} < 1 \Leftrightarrow |x_1| < 1 \;\; et \;\; |x_2| < 1$

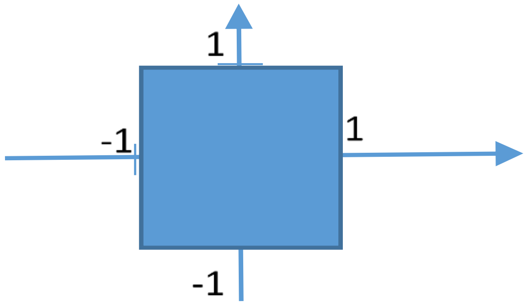
$$\Leftrightarrow -1 < x_1 < 1 \;\; et \;\; -1 < x_2 < 1$$

Donc $\mathcal{B}_o^{d_\infty} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : -1 < x_1 < 1 \;\; et \;\; -1 < x_2 < 1\}$

Représentation



On en déduit la représentation $\mathcal{B}_f^{d_\infty}$



Fin

Merci Pour Votre Attention