UNIVERSITÉ DE CERGY-PONTOISE

U.F.R. Economie et Gestion **L2 - S3**

Licence d'Économie et Finance / Licence de Gestion

MATH 201 : PROBABILITÉS

TEST 2 - Décembre 2014 - 1h 30 min

Il sera tenu compte du soin apporté à la rédaction.
CALCULATRICES INTERDITES
LES PORTABLES DOIVENT ÊTRE DÉBRANCHÉS ET RANGÉS.

Questions diverses - 4 points

Les questions de cet exercice sont indépendantes les unes des autres.

1. • 1 point À quelles conditions la partie de $\mathbb{R}^2$ $\{(x_i, p_i), i \in I\}$ (où I est un ensemble fini ou dénombrable, et les x_i deux à deux distincts) définit-elle une loi de probabilité d'une V.A.R. discrète X définie sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathrm{P})$?

Exemple : Pour quelle valeur de $x \in \mathbb{R}$, l'ensemble $\left\{\left(i; \dfrac{i}{x}\right) / i \in [\![1;4]\!]\right\}$ définit la loi de probabilité d'une V.A. discrète X ?

2. • 1 point Soit X une V.A.R. discrète telle que $E(X) = V(X) = 2$. Montrer que $E(X^2 - 3X) = 0$

2. • 2 points Donner la définition de la fonction de répartition F d'une V.A.R. X. Montrer que F est croissante sur $\mathbb{R}$.

Soit X une V.A.R. discrète dont la fonction de répartition est donnée ci-dessous :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x < 1 \\ 0,2 & si \quad 1 \leq x < 3 \\ 0,5 & si \quad 3 \leq x < 4 \\ 1 & si \quad x \geq 4 \end{cases}$$

Donner la loi de probabilité de X

Exercice 1 - 4 points

Une urne contient $n + 6$ jetons : n ($n \geq 2$) blancs et 6 noirs. On tire 2 jetons simultanément de cette urne. Soit X la V.A.R. égale au nombre de jetons noirs obtenus.

1. Déterminer la loi de probabilité de X. En donner les paramètres.
2. Préciser $X(\Omega)$, puis calculer $\mathrm{P}(x_i)$ pour tout $x_i \in X(\Omega)$
3. Calculer $E(X)$.

Exercice 2 - 5 points

Paul et Hugo pratiquent de façon régulière le tennis. On estime que la probabilité que Paul gagne une rencontre est égale à $p = 0,6$. Les deux frères décident de jouer trois matchs pendant l'année universitaire (On supposera par la suite que les résultats de ces trois matchs sont indépendants les uns des autres)

À la fin de chaque rencontre le perdant verse 20 € dans une cagnotte qui servira à s'offrir un repas à la fin de l'année.

Paul s'interroge sur sa dépense éventuelle dans l'année.

1. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de matchs gagnés par Paul. Quelle est la loi de X ? **Justifiez !** Précisez les valeurs de $E(X)$ et $V(X)$.
2. Soit D la variable aléatoire égale à la dépense annuelle de Paul. Exprimer D en fonction de X. Déterminer $\mathrm{P}(D = 40)$ et $\mathrm{P}(D \leq 20)$ à l'aide de la table ci-dessous (valeurs approchées à 10^{-3} près).
3. Calculer $E(D)$.

n	k \ p	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50
2	0	90250	81000	72250	64000	56250	49000	42250	36000	30250	25000
	1	09500 *99750*	18000 *99000*	25500 *97750*	32000 *96000*	37500 *93750*	42000 *91000*	45500 *87750*	48000 *84000*	49500 *79750*	50000 *75000*
	2	00250	01000	02250	04000	06250	09000	12250	16000	20250	25000
3	0	85738	72900	61413	51200	42188	34300	27463	21600	16638	12500
	1	13538 *99275*	24300 *97200*	32513 *93925*	38400 *89600*	42188 *84375*	44100 *78400*	44363 *71825*	43200 *64800*	40838 *57475*	37500 *50000*
	2	00713 *99988*	02700 *99900*	05738 *99663*	09600 *99200*	14063 *98438*	18900 *97300*	23888 *95713*	28800 *93600*	33413 *90888*	37500 *87500*
	3	00013	00100	00338	00800	01563	02700	04288	06400	09113	12500

Exercice 3 - 7 points

Une urne contient 8 boules numérotées de 1 à 8. On tire **UNE** boule de cette urne. On considère les deux V.A.R.D. X et Y définies par :

- X prend la valeur -1 si le numéro tiré est 1 ou 2, la valeur 0 si le numéro tiré est 3 ou 4, la valeur 1 si le numéro tiré est 5 ou 6, et la valeur 2 sinon
- Y prend la valeur 1 si le numéro tiré est un multiple de 3 et 0 sinon

1. Reconnaître les lois usuelles de X et Y. Donner les valeurs de $E(X)$, $E(Y)$, $V(X)$ et $V(Y)$.
2. Donner dans un tableau la loi conjointe du couple (X, Y) et les lois marginales.
3. Déterminer la loi conditionnelle de X sachant $Y = 1$.
4. Déterminer la loi de $Z = X + Y$.
5. Calculer la covariance de (X, Y). Les V.A.R. X et Y sont-elles indépendantes ?

UNIVERSITÉ DE CERGY-PONTOISE

U.F.R. Economie et Gestion **L2 - S3**

Licence d'Économie et Finance / Licence de Gestion

Corrigé du TEST 2 - Probabilités

Questions diverses - 4 points

1. • 1 point

• **(0,5 point)** $\{(x_i, p_i)/i \in I\}$ est une loi de probabilité de X si et seulement si :

$$p_i \geq 0 \text{ pour tout } \ i \in I \text{ et } \sum_{i \in I} p_i = 1$$

• **(0,5 point)** On a $\displaystyle\sum_{i=1}^{4} \frac{i}{x} = \frac{1}{x} + \frac{2}{x} + \frac{3}{x} + \frac{4}{x} = \frac{10}{x} = 1 \Longleftrightarrow x = 10$

L'ensemble $\left\{\left(i; \dfrac{i}{x}\right) /i \in [\![1;4]\!]\right\}$ définit la loi de probabilité d'une V.A. discrète X si et seulement si $x = 10$

2. • 1 point $V(X) = 2 = E(X^2) - (E(X))^2 = E(X^2) - 4$ donc $E(X^2) = 6$

Ainsi $E(X^2 - 3X) = E(X^2) - 3E(X) = 0$

2. • 2 points

• **(0,5 point)** La fonction de répartition F de X est définie sur $\mathbb{R}$ par : $F(x) = \mathrm{P}(X \leq x)$

• **(1 point)** F est croissante sur $\mathbb{R}$: soit $(x_0, x_1) \in \mathbb{R}^2$, si $x_0 \leq x_1$ alors $(X \leq x_0) \subset (X \leq x_1)$, donc $\mathrm{P}(X \leq x_0) \leq \mathrm{P}(X \leq x_1)$ et $F(x_0) \leq F(x_1)$, d'où le résultat.

• **(0,5 point)**

x_i	1	3	4
p_i	$0,2$	$0,3$	$0,5$

Exercice 1 - 4 points

Une urne contient $n+6$ jetons ($n \geq 2$) : n blancs et 6 noirs. On tire 2 jetons simultanément de cette urne. Soit X la V.A.R. égale au nombre de jetons noirs obtenus.

1. **• 1,5 point** X compte le nombre de jetons noirs (= « objets de type 1 ») lorsque l'on tire 2 jetons d'une urne contenant $n+6$ jetons dont 6 noirs : X suit la loi hypergéométrique $\mathcal{H}(n+6; 6; 2)$ (ou $\mathcal{H}\left(6; 2; \dfrac{6}{n+6}\right)$).
2. **• 2 points** $X(\Omega) = \{0; 1; 2\}$

   $$\mathrm{P}(X=0) = \frac{\binom{6}{0}\binom{n}{2}}{\binom{n+6}{2}} = \frac{\frac{n!}{(n-2)!2!}}{\frac{(n+6)!}{(n+4)!2!}} = \frac{(n-1)n}{(n+5)(n+6)}$$

   $$\mathrm{P}(X=1) = \frac{\binom{6}{1}\binom{n}{1}}{\binom{n+6}{2}} = \frac{6n}{\frac{(n+6)!}{(n+4)!2!}} = \frac{12n}{(n+5)(n+6)}$$

   $$\mathrm{P}(X=2) = \frac{\binom{6}{2}\binom{n}{0}}{\binom{n+6}{2}} = \frac{30}{(n+5)(n+6)}$$

   (on peut vérifier que l'on a bien une loi de probabilité, car $(n-1)n + 12n + 30 = n^2 + 11n + 30 = (n+5)(n+6)$)
3. **• 0,5 point** $E(X) = 2 \times \dfrac{6}{n+6} = \dfrac{12}{n+6}$.

Exercice 2 - 5 points

1. • **2 points** On considère l'épreuve de Bernoulli « Paul et Hugo jouent un match de tennis » : on appelle succès « Paul remporte le match », la probabilité du succès est $\text{P}(S) = p = 0,6$. Cette épreuve de Bernoulli est répétée 3 fois de manière identique. Les épreuves sont mutuellement indépendantes : soit X la V.A. qui dénombre les succès, alors X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(3; 0,6)$. $E(X) = 1,8$ et $V(X) = 0,72$
2. • **2 points**
   (1 point) On a $D = 20(3 - X)$ et $\text{P}(D = 40) = \text{P}(X = 1)$. La table ne donne pas les valeurs des probabilités pour $p = 0,6$ ... il faut considérer la V.A. $Y = 3 - X$: alors Y est la V.A. qui dénombre les échecs et Y suit la loi binomiale $\mathcal{B}(3; 0,4)$.
   (0,5 point) Enfin, $\text{P}(X = 1) = \text{P}(Y = 2) \approx 0,288$
   (0,5 point) De même, $\text{P}(D \leq 20) = \text{P}(X \geq 2) = \text{P}(Y \leq 1) = F(1) \approx 0,648$
3. • **1 point** $E(D) = E(60-20X) = 60-20E(X) = 60-20\times3\times0,6 = 60-36 = 24$ €

Exercice 3 - 7 points

Une urne contient 8 boules numérotées de 1 à 8. On tire **UNE** boule de cette urne.

• X prend la valeur -1 si le numéro tiré est 1 ou 2, la valeur 0 si le numéro tiré est 3 ou 4, la valeur 1 si le numéro tiré est 5 ou 6, et la valeur 2 sinon

• Y prend la valeur 1 si le numéro tiré est un multiple de 3 et 0 sinon

1. • **3 points** • X suit la loi uniforme $\mathcal{U}_{[\![-1;2]\!]}$, donc $E(X) = \dfrac{1}{2}$ et $E(X^2) = \dfrac{3}{2}$ donc $V(X) = E(X^2) - E(X) = \dfrac{5}{4}$
   • Y suit la loi de Benouilli de paramètre $p = \dfrac{2}{8} = \dfrac{1}{4}$, donc $E(Y) = \dfrac{1}{4}$ et $V(X) = \dfrac{3}{16}$
2. • **1 point**

X \ Y	0	1	loi de X
-1	1/4	0	1/4
0	1/8	1/8	1/4
1	1/8	1/8	1/4
2	1/4	0	1/4
Loi de Y	3/4	1/4	1

3. • **0,5 point**

Loi de X sachant $(Y = 1)$	-1	0	1	2
p_{i1}	0	1/2	1/2	0

4. • **1 point**

z_i	-1	0	1	2	3
$\text{P}(Z = z_i)$	1/4	1/8	1/4	3/8	0

5. • **1,5 point** $cov(X, Y) = \dfrac{1}{2}\left(V(X + Y) - V(X) - V(Y)\right)$
   On calcule tout d'abord $V(Z) = E(Z^2) - (E(Z))^2 = 2 - \left(\dfrac{3}{4}\right)^2 = \dfrac{23}{16}$
   D'où $cov(X, Y) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{23}{16} - \dfrac{5}{4} - \dfrac{3}{16}\right) = 0$
   Les V.A. X et Y ne sont pas indépendantes car $\text{P}((X = -1) \cap (Y = 1)) = 0$, alors que $\text{P}(X = -1) \times \text{P}(Y = 1) = \dfrac{1}{4} \times \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{16} \neq \text{P}((X = -1) \cap (Y = 1))$