UNIVERSITÉ DE CERGY-PONTOISE

U.F.R. Economie et Gestion **L2 - S3**

Licence d'Économie et Finance / Licence de Gestion

MATH 201 : PROBABILITÉS

TEST 2 - Jeudi 21 Novembre 2013 - 1h 30 min

CALCULATRICES INTERDITES
LES PORTABLES DOIVENT ÊTRE DÉBRANCHÉS ET RANGÉS.
Le barème est donné à titre indicatif

Questions diverses - 10 points

1. **0,5 point** Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathrm{P})$ un espace probabilisé. Rappeler la définition d'une **variable aléatoire réelle (V.A.R.)** X définie sur cet espace.

2. **5,5 points** Soient $(\Omega, \mathcal{T}, \mathrm{P})$ un espace probabilisé et X une *V.A.R.* discrète sur $(\Omega, \mathcal{T}, \mathrm{P})$.
   (a) Donner la définition de la fonction de répartition F de X.
   (b) Montrer que F est croissante sur $\mathbb{R}$.
   (c) Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a \leq b$: montrer que $\mathrm{P}(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$. (on rappelle que si A et B sont deux événements d'un même univers Ω, $\mathrm{P}(\overline{A} \cap B) = \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A \cap B)$)
   (d) On lance un dé tétraédrique très mal équilibré dont les 4 faces sont numérotées de 1 à 4 : soit X la V.A. qui prend la valeur du numéro qui sort. La loi de probabilité de X est donnée dans le tableau ci-dessous :

x_i	1	2	3	4
p_i	$0,2$	$0,3$	$0,2$	$0,3$

   Déterminer la fonction de répartition F de X, puis représenter F dans un repère orthogonal.
   Calculer $E(X)$ et $V(X)$.

3. **1 point** Après avoir justifié de son existence, calculer la somme $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{3}\left(\frac{2}{5}\right)^n$.

4. **1 point** Le nombre d'appels reçus par un centre d'assistance par téléphone est une V.A.R. X suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. On suppose que $\mathrm{P}(X = 5) = \mathrm{P}(X = 6)$. Déterminer l'unique valeur possible de λ.

5. **2 points** Une urne contient 7 boules numérotées de 1 à 7. On tire simultanément 5 boules de cette urne. On note X la variable aléatoire égale au nombre de numéros pairs obtenus. Quelle est la loi de X ? Définir précisément $X(\Omega)$. Calculer $\mathrm{P}(X = 2)$.

Exercice 1 - 6 points

Une urne contient 5 boules numérotées de 1 à 5. On tire au hasard et simultanément 3 boules de cette urne.

1. **1,5 point** Déterminer un univers Ω associé à cette expérience aléatoire. Préciser son cardinal, puis décrire Ω en extension.
2. **1 point** Soit X la V.A.R.D. égale à la somme des trois numéros inscrits sur les boules tirées. Donner dans un tableau la loi de probabilité de X.
3. On tire au hasard et simultanément 3 boules de cette urne avec remise et on réitère 6 fois cette expérience. Soit Y la V.A.R.D. égale au nombre de fois où la somme des trois numéros obtenus est supérieure ou égale à 8.
   (a) **1 point** Préciser la loi de Y en justifiant soigneusement.
   (b) **0,5 point** Déterminer l'espérance et la variance de Y.
   (c) **2 points** A l'aide de la table fournie ci-dessous, déterminer une valeur approchée à 10^{-3} près des événements suivants :
      i. $\mathrm{P}(Y = 4)$
      ii. $\mathrm{P}(Y < 4)$
      iii. $\mathrm{P}(2 < Y \leq 5)$

Loi Binomiale pour n=6

n	k \ p	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50
6	0	73509	53144	37715	26214	17798	11765	07542	04666	02768	01563
	1	23213 *96723*	35429 *88573*	39933 *77648*	39322 *65536*	35596 *53394*	39253 *42018*	24366 *31908*	18662 *23328*	13589 *16357*	09375 *10938*
	2	03054 *99777*	09841 *98415*	17618 *95266*	24576 *90112*	29663 *83057*	32414 *74431*	32801 *64709*	31104 *54432*	27795 *44152*	23438 *34375*
	3	00214 *99991*	01458 *99873*	04145 *99411*	08192 *98304*	13184 *96240*	18522 *92953*	23549 *88258*	27648 *82080*	30322 *74474*	31250 *65625*
	4	00008 *1*	00121 *99994*	00549 *99960*	01536 *99840*	03296 *99536*	05954 *98907*	09510 *97768*	13824 *95904*	18607 *93080*	23438 *89063*
	5	ϵ *1*	00005 *1*	00039 *99999*	00154 *99994*	00439 *99976*	01021 *99927*	02048 *99816*	03686 *99590*	06089 *99170*	09375 *98438*
	6	ϵ	ϵ	00001	00006	00024	00073	00184	00410	00830	01563

Exercice 2 - 4 points

Une urne contient 9 boules numérotées de 1 à 9. On tire UNE boule de cette urne : soient X la V.A. égale à 1 si le numéro est un multiple de 3 et 0 sinon et Y la V.A. égale à 0 si le numéro est pair et 1 si le numéro est impair.

1. Donner la loi conjointe du couple (X, Y) et les lois marginales.
2. Donner la loi conditionnelle de X sachant $(Y = 1)$.
3. On note Z la V.A. définie par $Z = X + Y$ et U la V.A. définie par $U = X.Y$. Déterminer les lois de Z et U puis la loi conjointe du couple (Z, U). Les V.A. Z et U sont-elles indépendantes ?

UNIVERSITÉ DE CERGY-PONTOISE

U.F.R. Economie et Gestion **L2 - S3**

Licence d'Économie et Finance / Licence de Gestion

Corrigé du TEST 2 - Probabilités

Questions diverses - 10 points

1. **0,5 point** On appelle **variable aléatoire réelle (V.A.R.)** définie sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathrm{P})$ toute application X de Ω dans $\mathbb{R}$

2. Soient $(\Omega, \mathcal{T}, \mathrm{P})$ un espace probabilisé et X une *V.A.R.* discrète sur $(\Omega, \mathcal{T}, \mathrm{P})$.

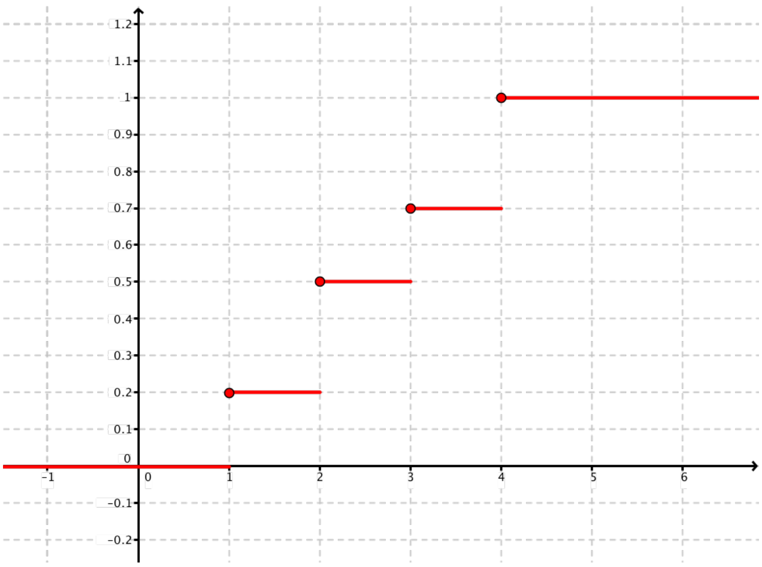
   (a) **0,5 point** On appelle **fonction de répartition** de X l'application définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ définie par $F(x) = \mathrm{P}(X \leq x)$.

   (b) **1 point** F est croissante sur $\mathbb{R}$:
   Soit $(x_0, x_1) \in \mathbb{R}^2$, si $x_0 \leq x_1$ alors $(X \leq x_0) \subset (X \leq x_1)$, donc $\mathrm{P}(X \leq x_0) \leq \mathrm{P}(X \leq x_1)$ et $F(x_0) \leq F(x_1)$, d'où le résultat.

   (c) **1,5 point** Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a \leq b$:
   $(a < X \leq b) = (X \leq b) \cap (X > a)$. Notons $A = (X \leq a)$ et $B = (X \leq b)$.
   On a : $(a < X \leq b) = \overline{A} \cap B$.
   Donc $\mathrm{P}(a < X \leq b) = \mathrm{P}(\overline{A} \cap B) = \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A) = F(b) - F(a)$.

   (d) **1,5 point**

$$\begin{cases} F(X) = 0 & \text{si} \quad X < 1 \\ F(X) = 0,2 & \text{si} \quad 1 \leq X < 2 \\ F(X) = 0,5 & \text{si} \quad 2 \leq X < 3 \\ F(X) = 0,7 & \text{si} \quad 3 \leq X < 4 \\ F(X) = 1 & \text{si} \quad X \geq 4 \end{cases}$$



   1 point $E(X) = 0,2 + 0,6 + 0,6 + 1,2 = 2,6$ et $E(X^2) = 0,2 + 1,2 + 1,8 + 4,8 = 8$ donc $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = 8 - 2,6^2 = 8 - 6,76 = 1,24$

3. **1 point** La raison de cette série géométrique est $q = \dfrac{2}{5} \in]-1;1[$ donc la série converge et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{3}\left(\frac{2}{5}\right)^n = \frac{1}{3} \times \frac{1}{1-\frac{2}{5}} = \frac{5}{9}$.

4. **1 point** D'après la formule du cours, pour tout $k \in \mathbb{N}, \mathrm{P}(X = k) = \dfrac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$
Donc $\mathrm{P}(X = 5) = \mathrm{P}(X = 6) \Leftrightarrow \dfrac{\lambda^5}{5!}e^{-\lambda} = \dfrac{\lambda^6}{6!}e^{-\lambda} \Leftrightarrow \dfrac{\lambda^5}{5!} = \dfrac{\lambda^6}{6!} \Leftrightarrow 6\lambda^5 = \lambda^6 \Leftrightarrow \lambda = 6$

5. **2 points** Une urne contient 7 boules numérotées de 1 à 7. On tire simultanément 5 boules de cette urne. On note X la variable aléatoire qui compte les numéros pairs (=objets de type 1) lorsque l'on tire 5 boules, suit la loi hypergéométrique $\mathcal{H}$ $(7;3;5)$. $X(\Omega) = \{1;2;3\}$. $\mathrm{P}(X = 2) = \dfrac{\binom{3}{2}\binom{4}{3}}{\binom{7}{5}} = \dfrac{3 \times 4}{21} = \dfrac{4}{7}$

Exercice 1 - 6 points

Une urne contient 5 boules numérotées de 1 à 5. On tire au hasard et simultanément 3 boules de cette urne.

1. **1,5 point** Ω est l'ensemble des combinaisons des 3 boules prises parmi 5 : $\mathrm{Card}\Omega = \dbinom{5}{3} = 10$ et
$$\Omega = \Big\{\{1;2;3\};\ \{1;2;4\};\ \{1;2;5\};\ \{1;3;4\};\ \{1;3;5\};\ \{1;4;5\};\ \{2;3;4\};\ \{2;3;5\};\ \{2;4;5\};\ \{3;4;5\}\Big\}$$

2. **1 point** Loi de probabilité de X :

x_i	6	7	8	9	10	11	12
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$

3. (a) **1 point** On considère l'expérience de Bernoulli : « On tire 3 boules de l'urne ». On appelle succès « La somme des 3 numéros est supérieure ou égale à 8 ». Alors $P(S) = p = 0.8$. On réitère 6 fois cette expérience : les tirages étant supposés identiques et mutuellement indépendants. Y, la V.A. qui dénombre les succès, suit la loi binomiale $\mathcal{B}$ $(6; 0,8)$.
   (b) **0,5 point** $E(Y) = np = 4,8$, et $V(Y) = npq = 0,96$
   (c) **2 points** Les valeurs de la table étant données pour des probabilités inférieures ou égales à $0,5$, on pose $Z = 6 - Y$: Z dénombre alors les « échecs » et Z suit la loi binomiale $\mathcal{B}(6; 0,2)$
      i. $\mathrm{P}(Y = 4) = \mathrm{P}(Z = 2) \approx 0,246$
      ii. $\mathrm{P}(Y < 4) = \mathrm{P}(Z > 2) = 1 - \mathrm{P}(Z \leq 2) = 1 - F(2) \approx 1 - 0,901 \approx 0,099$
      iii. $\mathrm{P}(2 < Y \leq 5) = \mathrm{P}(1 \leq Z < 4) = \mathrm{P}(0 < Z \leq 3) = F(3) - F(0) \approx 0,983 - 0,262 \approx 0,721$

Exercice 2 - 4 points

Une urne contient 9 boules numérotées de 1 à 9. On tire UNE boule de cette urne : soient X la V.A. égale à 1 si le numéro est un multiple de 3 et 0 sinon et Y le V.A. égale à 0 si le numéro est pair et 1 si le numéro est impair.

1. **1 point**

$X \backslash Y$	0	1	Loi de X
0	1/3	1/3	2/3
1	1/9	2/9	1/3
Loi de Y	4/9	5/9	1

2. **0,5 point**

$X \backslash (Y=1)$	0	1
$p = P_{i0}/P_{\bullet 0}$	3/5	2/5

3. **2 points**

z_i	0	1	2
p_i	3/9	4/9	2/9

u_i	0	1
p_i	7/9	2/9

$Z \backslash U$	0	1	Loi de Z
0	3/9	0	3/9
1	4/9	0	4/9
2	0	2/9	2/9
Loi de U	7/9	2/9	1

0,5 point On remarque que $\mathrm{P}\left((Z=0)\cap(U=1)\right)=0$ et $\mathrm{P}(Z=0)\times\mathrm{P}(U=1)=\dfrac{2}{27}\neq\mathrm{P}\left((Z=0)\cap(U=1)\right)$: donc les V.A. Z et U ne sont pas indépendantes.