UNIVERSITÉ DE CERGY
U.F.R. Economie et Gestion

Licence d'Économie et Gestion
L2 - S3

PROBABILITÉS

TEST 2 - Mardi 20 Novembre 2012 - 1h 30 min

Les exercices sont indépendants et peuvent être traités
dans l'ordre choisi par le candidat.
Il sera tenu compte de l'orthographe et du soin apporté à la rédaction.
CALCULATRICES INTERDITES
LES PORTABLES DOIVENT ÊTRE DÉBRANCHÉS ET RANGÉS.

Exercice 1 - 5 points

Dans cet exercice, les questions sont indépendantes :

1. Donner la définition d'une variable aléatoire réelle discrète X sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathrm{P})$.
2. Soit X une V.A. suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda = 2$.
   (a) Rappeler l'expression de $\mathrm{P}(X = k)$.
   (b) Rappeler la définition de la fonction de répartition F de la V.A. X.
   (c) Exprimer $\mathrm{P}(2 \leq X < 7)$ à l'aide de la fonction de répartition F de X, puis en donner une valeur approchée (à 10^{-2} près) à l'aide de la table fournie en annexe.
   (d) En vous aidant de la table jointe en annexe, donner une valeur approchée à 10^{-2} près de $\mathrm{P}(X = 3)$ et $\mathrm{P}_{(X \leq 7)}(X > 3)$
3. Soit $\vec{C} = (X, Y)$ un couple aléatoire discret. On rappelle les notations dans le cas fini :
   • $X(\Omega) = \{x_1, \cdots, x_n\}$ et $Y(\Omega) = \{y_1, \cdots, y_m\}$
   • $\mathrm{p}_{ij} = \mathrm{P}(\vec{C} = (x_i, y_j)) = \mathrm{P}((X = x_i) \cap (Y = y_j))$ pour tout $(i, j) \in [[1, n]] \times [[1, m]]$
   • $\mathrm{p}_{i\bullet} = \mathrm{P}(X = x_i)$ pour tout $i \in [[1, n]]$ et $\mathrm{p}_{\bullet j} = \mathrm{P}(Y = y_j)$ pour tout $j \in [[1, m]]$
   Soit j un indice tel que $\mathrm{P}(Y = y_j) \neq 0$, donner la définition de la **loi conditionnelle** de X sachant $Y = y_j$.

Exercice 2 - 6 points

Une urne contient 4 boules blanches et 2 boules noires. On tire une boule à chaque épreuve. On arrête le jeu dès lors que l'on a tiré **UNE** boule noire.

Soit X la V.A. qui compte les tirages effectués nécessaires pour obtenir une des deux boules noires.

Partie A : On effectue des tirages sans remise

On note B_i l'événement « on a tiré une boule blanche à la $i^{\text{ème}}$ épreuve ».

1. Préciser l'ensemble $X(\Omega)$.
2. Exprimer l'événement $(X = 2)$ à l'aide des événements B_i ou $\overline{B_i}$ et des connecteurs logiques. Calculer $\mathrm{P}(X = 2)$.

3. Reprendre la question précédente avec l'événement $(X = 3)$.
4. Déterminer la loi de X : vous donnerez vos résultats dans un tableau sans détailler les calculs.
5. Calculer l'espérance et la variance de X.

Partie B : On effectue des tirages avec remise

Dans cette question, les tirages sont alors supposés identiques et indépendants.

1. Quelle est la loi de X ? En donner le(s) paramètre(s).
2. Donner l'expression de $P(X = k)$ pour tout $k \in [\![1, +\infty[\![$
3. Calculer l'espérance puis la variance de X.

Exercice 3 - 7 points

On a gardé d'un jeu de cartes que $N = 6$ cartes : les 4 rois et 2 AS. On tire simultanément 3 cartes au hasard. Soit X la V.A. égale au nombre d'AS obtenus.

1. Déterminer l'univers Ω associé à cette expérience aléatoire, en donner son cardinal.
2. Quelle est la loi suivie par X ? En donner le(s) paramètre(s). Précisez $X(\Omega)$.
3. Détailler le calcul de $P(X = 0)$, puis donner sous forme de tableau la loi de X.
4. On note $p = P(X \geq 1)$. Vérifier que $p = 0,8$
5. On recommence cette épreuve 10 fois en remettant après chaque épreuve les cartes que l'on vient de tirer. On dira que l'épreuve est un succès lorsque l'on a obtenu **au moins un as**. Soit Y la V.A. qui dénombre les succès obtenus lors de ces 10 épreuves supposées identiques et indépendantes. Donner **en justifiant** la loi de Y, puis l'espérance et la variance de Y.

   Donner une valeur approchée (en vous aidant de la table jointe en annexe) de la probabilité que l'on obtienne au moins 6 succès lors de ces 10 épreuves.

Exercice 4 - 4 points

On lance un dé (à six faces) bien équilibré. Soit X la V.A. qui prend la valeur 1 si le résultat est un multiple de 3 et 0 sinon et Y qui prend la valeur 0 si le nombre est pair, 1 si le nombre est impair.

1. Donner la loi conjointe du couple (X, Y) et les lois marginales.
2. Donner la loi conditionnelle de X sachant $Y = 1$.
3. On note Z la V.A. définie par $Z = X + Y$ et U la V.A. définie par $U = X.Y$. Déterminer les lois de Z et U puis la loi conjointe du couple (Z, U). Les V.A. Z et U sont-elles indépendantes ?

PROBABILITÉS - TEST 2 -ANNEXE

Quelques lois de Poisson

k \ λ	1		2		3		4		5	
	P_k	F_k	P_k	F_k	P_k	F_k	P_k	F_k	P_k	F_k
0	36788		13534		04979		01832		00674	
1	36788	*73576*	27067	*40601*	14936	*19915*	07326	*09158*	03369	*04043*
2	18394	*91970*	27067	*67668*	22404	*42319*	14653	*23810*	08422	*12465*
3	06131	*98101*	18045	*85712*	22404	*64723*	19537	*43347*	14037	*26503*
4	01533	*99634*	09022	*94735*	16803	*81526*	19537	*62884*	17547	*44049*
5	00307	*99941*	03609	*98344*	10082	*91608*	15629	*78513*	17547	*61596*
6	00051	*99992*	01203	*99547*	05041	*96649*	10420	*88933*	14622	*76218*
7	00007	*99999*	00344	*99890*	02160	*98810*	05954	*94887*	10444	*86663*
8	00001	*1*	00086	*99976*	00810	*99620*	02977	*97864*	06528	*93191*
9	ϵ		00019	*99995*	00270	*98890*	01323	*99187*	03627	*96817*
10			00004	*99999*	00081	*99971*	00529	*99716*	01813	*98630*
11			00001	*1*	00022	*99993*	00192	*99908*	00824	*99455*
12			ϵ		00006	*99998*	00064	*99973*	00343	*99798*
13					00001	*1*	00020	*99992*	00132	*99930*
14					ϵ		00006	*99998*	00047	*99977*
15							00002	*1*	00016	*99993*
16							ϵ		00005	*99998*
17									00001	*99999*

Loi binomiale de paramètre $n = 10$

n	k \ p	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,5
10	0	59874	34868	19687	10737	05631	02825	01346	00605	00253	00098
	1	31512 *91386*	38742 *73610*	34743 *54430*	26844 *37581*	18771 *24403*	12106 *14931*	07249 *08595*	04031 *04636*	02072 *02326*	00977 *01074*
	2	07463 *98850*	19371 *92981*	27590 *82020*	30199 *67780*	28157 *52559*	23347 *38278*	17565 *26161*	12093 *16729*	07630 *09956*	04395 *05469*
	3	01048 *99897*	05740 *98720*	12983 *95003*	20133 *87913*	25028 *77588*	26683 *64961*	25222 *51383*	21499 *38228*	16648 *26604*	11719 *17188*
	4	00096 *99994*	01116 *99837*	04010 *99013*	08808 *96721*	14600 *92187*	20012 *84973*	23767 *75150*	25082 *63310*	23837 *50440*	20508 *37695*
	5	00006 *1*	00149 *99985*	00849 *99862*	02642 *99363*	05840 *98207*	10292 *95265*	15357 *90507*	20066 *83376*	23403 *73844*	24609 *62305*
	6	ϵ *1*	00014 *99999*	00125 *99987*	00551 *99914*	01622 *99649*	03676 *98941*	06891 *97398*	11148 *94524*	15957 *89801*	20508 *82813*
	7	ϵ *1*	00001 *1*	00013 *99999*	00079 *99992*	00309 *99958*	00900 *99841*	02120 *99518*	04247 *98771*	07460 *97261*	11719 *94531*
	8	ϵ *1*	ϵ *1*	00001 *1*	00007 *1*	00039 *99997*	00145 *99986*	00428 *99946*	01062 *99832*	02289 *99550*	04395 *98926*
	9	ϵ *1*	ϵ *1*	ϵ *1*	ϵ *1*	00003 *1*	00014 *99999*	00051 *99997*	00157 *99990*	00416 *99966*	00977 *99902*
	10	ϵ	ϵ	ϵ	ϵ	ϵ	00001	00003	00010	00034	00098

UNIVERSITÉ DE CERGY
U.F.R. Economie et Gestion

Licence d'Économie et Gestion
L2 - S3

Corrigé du TEST 2 - Probabilités

Exercice 1 - 5 points

1. **1 point** Une V.A.R.D. X sur $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathrm{P})$ est une application de Ω à valeurs dans $\mathbb{R}$ telle que $X(\Omega) = \{x_i / \ i \in I\}$ est un ensemble au plus dénombrable.
2. Soit X une V.A. suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda = 2$.
   (a) **0,5 point** $\mathrm{P}(X = k) = \dfrac{e^{-2}2^k}{k!}$
   (b) **0,5 point** La fonction de répartition de X est l'application F définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ par $F(x) = \mathrm{P}(X \leq x)$.
   (c) **0,5 point** $\mathrm{P}(2 \leq X < 7) = \mathrm{P}(1 < X \leq 6) = F(6) - F(1) \approx 0,99547 - 0,40601 \approx 0,59$.
   (d) **1,5 point** $\mathrm{P}(X = 3) \approx 0,18045$ et $\mathrm{P}_{(X\leq 7)}(X > 3) = \dfrac{\mathrm{P}(3 < X \leq 7)}{\mathrm{P}(X \leq 7)} = \dfrac{F(7) - F(3)}{F(7)} \approx \dfrac{0,9989 - 0,85712}{0,9989} \approx 0,14$.
3. **1 point** La loi conditionnelle de X sachant $Y = y_j$ est l'application définie sur $X(\Omega)$ à valeurs dans $[0;1]$ par $x_i \longmapsto \mathrm{P}_{(Y=y_j)}(X = x_i) = \dfrac{\mathrm{P}((X = x_i) \cap (Y = y_j))}{\mathrm{P}(Y = y_j)} = \dfrac{p_{ij}}{p_{\bullet j}}$.

Exercice 2 - 6 points

Soit X la V.A. qui compte les tirages effectués pour obtenir une des deux boules noires.

Partie A : On effectue des tirages sans remise

1. **0,5 point** $X(\Omega) = \{1;2;3;4;5\}$ (Il faut au plus 5 tirages pour obtenir une des deux boules noires, car il y a 4 boules blanches)
2. **1 point** $(X = 2) = B_1 \cap \overline{B_2}$ et $\mathrm{P}(X = 2) = \mathrm{P}(B_1) \times \mathrm{P}_{B_1}(\overline{B_2}) = \dfrac{4}{6} \times \dfrac{2}{5} = \dfrac{4}{15}$.
3. **1 point** $(X = 3) = B_1 \cap B_2 \cap \overline{B_3}$ et $\mathrm{P}(X = 3) = \mathrm{P}(B_1) \times \mathrm{P}_{B_1}(B_2) \times \mathrm{P}_{B_1 \cap B_2}(\overline{B_3}) = \dfrac{4}{6} \times \dfrac{3}{5} \times \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{5}$.
4. **1 point**

x_i	1	2	3	4	5
p_i	1/3	4/15	1/5	2/15	1/15

5. **1 point** $E(X) = \dfrac{7}{3}$ et $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = 7 - \left(\dfrac{7}{3}\right)^2 = \dfrac{14}{9}$

Partie B : On effectue des tirages avec remise

1. **0,5 point** X suit une loi géométrique de paramètre $p = \dfrac{1}{3}$ (loi du premier succès).
2. **0,5 point** $\forall x \in [\![1, +\infty[\![, \mathrm{P}(X = k) = pq^{k-1} = \dfrac{1}{3} \times \left(\dfrac{2}{3}\right)^{k-1}$.
3. **0,5 point** On a : $E(X) = \dfrac{1}{p} = 3$ et $V(X) = \dfrac{q}{p^2} = 6$.

Exercice 3 - 7 points

On a gardé d'un jeu de cartes que $N = 6$ cartes : les 4 rois et 2 AS. On tire simultanément 3 cartes au hasard. Soit X la V.A. égale au nombre d'AS obtenus.

1. **1 point** Ω est l'ensemble des combinaisons de 3 cartes prises parmi 6. Card $(\Omega) = \binom{6}{3} = 20$.
2. **1 point** X dénombre les as (= objets de type 1) lorsque l'on tire 3 cartes : X suit la loi hypergéométrique $\mathscr{H}(6,2,3)$ $\left(\text{ou } \mathscr{H}\left(6,3,\frac{1}{3}\right)\right)$ et $X(\Omega) = [[0;2]]$.
3. **1,5 point** $P(X=0) = \dfrac{\binom{2}{0}\binom{4}{3}}{\binom{6}{3}} = \dfrac{1 \times 4}{20} = \dfrac{1}{5}$

x_i	0	1	2
p_i	1/5	3/5	1/5

4. **0,5 point** $p = P(X \geq 1) = 1 - P(X=0) = 1 - 0,2 = 0,8$
5. **2 points** On considère l'épreuve de Bernoulli : on tire 3 cartes. On appelle « succès » : on a obtenu au moins un as. $p = P(S) = 0,8$. On recommence 10 fois cette expérience : les épreuves étant supposées identiques et indépendantes. Soit Y la V.A. égale au nombre de succès lors de ces 10 épreuves : Y suit la loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0,8$. Alors $E(Y) = np = 8$ et $V(Y) = npq = 1,6$.

   1 point La table ne donnant les valeurs approchées de $P(Y = k)$ pour des valeurs de p inférieures à 0,5, on pose $Z = 10 - Y$ la V.A. qui dénombre les échecs lors de ces 10 épreuves. ainsi Z suit la loi binomiale $\mathscr{B}$ $(10;0,2)$

   On a alors $P(Y \geq 6) = P(Z \leq 4) = F_Z(4) \approx 0,96721$

Exercice 4 - 4 points

On lance un dé (à six faces) bien équilibré. Soit X la V.A. qui prend la valeur 1 si le résultat est un multiple de 3 et 0 sinon et Y qui prend la valeur 0 si le nombre est pair, 1 si le nombre est impair.

1. **1 point**

$X \backslash Y$	0	1	Loi de X
0	1/3	1/3	2/3
1	1/6	1/6	1/3
Loi de Y	1/2	1/2	1

2. **0,5 point**

$X \backslash (Y=0)$	0	1
$p = P_{i0}/P_{\bullet 0}$	2/3	1/3

3. **2 points**

z_i	0	1	2
p_i	1/3	1/2	1/6

u_i	0	1
p_i	5/6	1/6

$Z \backslash U$	0	1	Loi de Z
0	1/3	0	1/3
1	1/2	0	1/2
2	0	1/6	1/6
Loi de U	5/6	1/6	1

0,5 point On remarque que $P((Z=0) \cap (U=0)) = 1/2$ et $P(Z=0) \times P(U=0) = \dfrac{5}{18} \neq P((Z=0) \cap (U=0))$: donc les V.A. Z et U ne sont pas indépendantes.