UNIVERSITÉ DE CERGY
U.F.R. Economie et Gestion

Licence d'Économie et Gestion
L2 - S3

PROBABILITÉS

TEST 2 - Vendredi 18 Novembre 2011 - 1h 30 min

Les exercices sont indépendants et peuvent être traités dans l'ordre choisi par le candidat.
Il sera tenu compte du soin apporté à la rédaction.
CALCULATRICES INTERDITES
LES PORTABLES DOIVENT ÊTRE DÉBRANCHÉS ET RANGÉS.

Exercice 1 - 4 points

Dans cet exercice, les questions sont indépendantes :

1. Après avoir justifié de son existence, calculer la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{3}\left(\frac{2}{5}\right)^n$.
2. Soit X une V.A.R. discrète qui suit la loi binomiale de paramètres $\mathscr{B}(n,p)$ où $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0;1]$. Soit $k \in [\![0;n]\!]$, donner l'expression de $\mathrm{P}(X=k)$, puis justifier que l'on définit bien ainsi une loi de probabilité.
3. Soit X une V.A.R. Définir la fonction de répartition F de X.
   Application : On lance un dé tétraédrique très mal équilibré dont les 4 faces sont numérotées de 1 à 4 : soit X la V.A. qui prend la valeur du numéro qui sort. La fonction de répartition F de X est donnée par :
   $$\begin{cases} F(X)=0 & \text{si} \quad X<1 \\ F(X)=0,4 & \text{si} \quad 1 \leq X < 2 \\ F(X)=0,75 & \text{si} \quad 2 \leq X < 3 \\ F(X)=0,85 & \text{si} \quad 3 \leq X < 4 \\ F(X)=1 & \text{si} \quad X \geq 4 \end{cases}$$
   Déterminer la loi de probabilité de X
4. Donner la définition d'un « couple aléatoire discret $\overrightarrow{C}=(X,Y)$ »

Exercice 2 - 4,5 points

Une fabrique de meubles possède un parc de 10 machines fonctionnant sans arrêt. La probabilité pour une machine de tomber en panne au cours d'un mois est $p=0,1$. On suppose que les machines tombent en panne indépendamment les unes des autres.

1. Soit X la V.A.R. qui dénombre les machines tombées en panne au cours d'un mois. Quelle est la loi de probabilité de X ? **Justifiez !** Préciser les paramètres de cette loi. Donner l'espérance et la variance de X.
2. Pour les questions (a) et (b) vous donnerez une valeur approchée à 10^{-5} près et pour la question (c) une valeur à 10^{-2} près en vous aidant de la table fournie en annexe. Déterminer la probabilité que :
   (a) Exactement deux machines sont tombées en panne.

(b) Plus de deux machines sont tombées en panne.

(c) Au moins deux machines sont tombées en pannes sachant qu'au plus 5 sont tombées en panne.

3. On suppose cette fois que le modèle pris dans les questions 1 et 2 n'est pas très fiable, et on décide de modéliser la loi de X par une loi de Poisson de paramètre $\lambda = 1$.

   (a) Rappelez la valeur de l'espérance et de la variance de X.

   (b) Déterminer la probabilité (à 10^{-5} près pour (i) et (ii) et à 10^{-2} près pour (iii)) que :

      i. Exactement deux machines sont tombées en panne.

      ii. Plus de deux machines sont tombées en panne.

      iii. Au moins deux machines sont tombées en pannes sachant qu'au plus 5 sont tombées en panne.

Exercice 3 - 7 points

Une urne contient 4 boules blanches et une boule noire. On tire une boule à chaque épreuve. On arrête le jeu dès lors que l'on a tiré la boule noire.

Soit X la V.A. qui compte les tirages effectués pour obtenir la boule noire.

Partie A : On effectue des tirages sans remise

On note B_i l'événement « On a tiré une boule blanche à la $i^{\text{ème}}$ épreuve ».

1. Exprimer l'événement $(X = 3)$ à l'aide des événements B_i ou $\overline{B_i}$. Calculer $P(X = 3)$.
2. Déterminer la loi de X. Vous donnerez vos résultats dans un tableau sans détailler les calculs.
3. Calculer l'espérance et la variance de X.

Partie B : On effectue des tirages avec remise

Dans cette question, les tirages sont alors supposés identiques et indépendants.

1. Quelle est la loi de X ? En donner le(s) paramètre(s).
2. Donner l'expression de $P(X = k)$ pour tout $k \in [\![1, +\infty[\![$
3. Calculer l'espérance et la variance de X.
4. Déterminer le nombre minimum de tirages que l'on doit effectuer afin que la probabilité de tirer la boule noire soit supérieure à $0,9$: on fera les calculs avec $\ln 2 \approx 0,7$ et $\ln 5 \approx 1,6$

Exercice 4 - 4,5 points

On lance un dé (à six faces) bien équilibré. Soit X la V.A. qui prend la valeur 1 si le résultat est un multiple de 3 et 0 sinon et Y qui prend la valeur 0 si le nombre est pair, 1 si le nombre est 1 ou 3 et 2 si le nombre est 5 Donner la loi conjointe du couple (X, Y) et les lois marginales. On note Z la V.A. définie par $Z = X + Y$ et U la V.A. définie par $U = X.Y$. Déterminer la loi conjointe du couple (Z, U) et les lois marginales de Z et U. Les V.A. Z et U sont-elles indépendantes ?

PROBABILITÉS - TEST 2 -ANNEXE

Lois binomiales de paramètre $n = 10$

n	k \ p	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,5
10	0	59874	34868	19687	10737	05631	02825	01346	00605	00253	00098
	1	31512 *91386*	38742 *73610*	34743 *54430*	26844 *37581*	18771 *24403*	12106 *14931*	07249 *08595*	04031 *04636*	02072 *02326*	00977 *01074*
	2	07463 *98850*	19371 *92981*	27590 *82020*	30199 *67780*	28157 *52559*	23347 *38278*	17565 *26161*	12093 *16729*	07630 *09956*	04395 *05469*
	3	01048 *99897*	05740 *98720*	12983 *95003*	20133 *87913*	25028 *77588*	26683 *64961*	25222 *51383*	21499 *38228*	16648 *26604*	11719 *17188*
	4	00096 *99994*	01116 *99837*	04010 *99013*	08808 *96721*	14600 *92187*	20012 *84973*	23767 *75150*	25082 *63310*	23837 *50440*	20508 *37695*
	5	00006 *1*	00149 *99985*	00849 *99862*	02642 *99363*	05840 *98207*	10292 *95265*	15357 *90507*	20066 *83376*	23403 *73844*	24609 *62305*
	6	ϵ *1*	00014 *99999*	00125 *99987*	00551 *99914*	01622 *99649*	03676 *98941*	06891 *97398*	11148 *94524*	15957 *89801*	20508 *82813*
	7	ϵ *1*	00001 *1*	00013 *99999*	00079 *99992*	00309 *99958*	00900 *99841*	02120 *99518*	04247 *98771*	07460 *97261*	11719 *94531*
	8	ϵ *1*	ϵ *1*	00001 *1*	00007 *1*	00039 *99997*	00145 *99986*	00428 *99946*	01062 *99832*	02289 *99550*	04395 *98926*
	9	ϵ *1*	ϵ *1*	ϵ *1*	ϵ *1*	00003 *1*	00014 *99999*	00051 *99997*	00157 *99990*	00416 *99966*	00977 *99902*
	10	ϵ	ϵ	ϵ	ϵ	ϵ	00001	00003	00010	00034	00098

Quelques lois de Poisson

k \ λ	1		2		3		4		5	
	P_k	F_k	P_k	F_k	P_k	F_k	P_k	F_k	P_k	F_k
0	36788		13534		04979		01832		00674	
1	36788	*73576*	27067	*40601*	14936	*19915*	07326	*09158*	03369	*04043*
2	18394	*91970*	27067	*67668*	22404	*42319*	14653	*23810*	08422	*12465*
3	06131	*98101*	18045	*85712*	22404	*64723*	19537	*43347*	14037	*26503*
4	01533	*99634*	09022	*94735*	16803	*81526*	19537	*62884*	17547	*44049*
5	00307	*99941*	03609	*98344*	10082	*91608*	15629	*78513*	17547	*61596*
6	00051	*99992*	01203	*99547*	05041	*96649*	10420	*88933*	14622	*76218*
7	00007	*99999*	00344	*99890*	02160	*98810*	05954	*94887*	10444	*86663*
8	00001	*1*	00086	*99976*	00810	*99620*	02977	*97864*	06528	*93191*
9	ϵ		00019	*99995*	00270	*98890*	01323	*99187*	03627	*96817*
10			00004	*99999*	00081	*99971*	00529	*99716*	01813	*98630*
11			00001	*1*	00022	*99993*	00192	*99908*	00824	*99455*
12			ϵ		00006	*99998*	00064	*99973*	00343	*99798*
13					00001	*1*	00020	*99992*	00132	*99930*
14					ϵ		00006	*99998*	00047	*99977*
15							00002	*1*	00016	*99993*
16							ϵ		00005	*99998*
17									00001	*99999*

UNIVERSITÉ DE CERGY
U.F.R. Economie et Gestion

Licence d'Économie et Gestion
L2 - S3

Corrigé du TEST 2 - Probabilités

Exercice 1 - 4 points

1. La raison de cette série géométrique est $q = \dfrac{2}{5} \in]-1;1[$ donc la série converge et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{3}\left(\frac{2}{5}\right)^n = \frac{1}{3} \times \frac{1}{1-\frac{2}{5}} = \frac{5}{9}$.
2. Voir cours.
3. F_X est définie sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x : $F_X(x) = \mathrm{P}(X \leq x)$

x_i	1	2	3	4
p_i	$0,4$	$0,35$	$0,1$	$0,15$

4. Voir cours

Exercice 2 - 4,5 points

1. On considère l'épreuve de Benouilli : on observe une machine durant un mois : on appelle « succès » : la machine est tombée en panne durant le mois. On a $\mathrm{P}(S) = 0,1$. X la V.A.R. qui dénombre les succès suit alors la loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0,1$. Alors $E(X) = np = 1$ et $V(X) = npq = 0,9$.
2. (a) $\mathrm{P}(X = 2) \approx 0,19371$
   (b) $\mathrm{P}(X > 2) = 1 - \mathrm{P}(X \leq 2) = 1 - F(2) \approx 1 - 0,92981 \approx 0,07019$
   (c) $\mathrm{P}_{(X\leq 5)}(X \geq 2) = \dfrac{\mathrm{P}(2 \leq X \leq 5)}{\mathrm{P}(X \leq 5)} = \dfrac{\mathrm{P}(1 < X \leq 5)}{\mathrm{P}(X \leq 5)} = \dfrac{F(5) - F(1)}{F(5)} \approx \dfrac{0,99985 - 0,73610}{0,99985} \approx 0,26.$
3. (a) $X \hookrightarrow \mathscr{P}(1)$. Alors $E(X) = V(X) = \lambda = 1$
   (b) i. $\mathrm{P}(X = 2) \approx 0,18394$
   ii. $\mathrm{P}(X > 2) = 1 - \mathrm{P}(X \leq 2) = 1 - F(2) \approx 1 - 0,9197 \approx 0,0803$
   iii. $\mathrm{P}_{(X\leq 5)}(X \geq 2) = \cdots = \dfrac{F(5) - F(1)}{F(5)} \approx \dfrac{0,99941 - 0,73576}{0,99941} \approx 0,26.$

Exercice 3 - 7 points

Soit X la V.A. qui compte les tirages effectués pour obtenir la boule noire.

Partie A : On effectue des tirages sans remise

1. $(X = 3) = B_1 \cap B_2 \cap \overline{B_3}$ et $\mathrm{P}(X = 3) = \mathrm{P}(B_1) \times \mathrm{P}_{B_1}(B_2) \times \mathrm{P}_{B_1 \cap B_2}(\overline{B_3}) = \dfrac{4}{5} \times \dfrac{3}{4} \times \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{5}$
2.

x_i	1	2	3	4	5
p_i	1/5	1/5	1/5	1/5	1/5

$X \hookrightarrow \mathscr{U}(\llbracket 1;5 \rrbracket)$

3. $E(X) = 3$ et $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = 11 - 9 = 2$

Partie B : On effectue des tirages avec remise

1. X suit une loi géométrique de paramètre $p = \dfrac{1}{5}$ (c'est la loi du premier succès).
2. $\forall x \in [\![1, +\infty[\![, \mathrm{P}(X = k) = pq^{k-1} = \dfrac{1}{5} \times \left(\dfrac{4}{5}\right)^{k-1}$.
3. On a : $E(X) = \dfrac{1}{p} = 5$ et $V(X) = \dfrac{q}{p^2} = 20$.
4. On résout : $\mathrm{P}(X \leq n) \geq 0,9$ soit $1 - q^n \geq 0,9 \iff q^n \leq 0,1 \iff n \ln q \leq \ln 0,1$
$\iff n \geq \dfrac{\ln 0,1}{\ln\left(\frac{4}{5}\right)} = \dfrac{-\ln 10}{\ln 4 - \ln 5} = \dfrac{-\ln 2 - \ln 5}{2\ln 2 - \ln 5} \approx \dfrac{-2,3}{-0,2} \approx 11,5$
Il faut donc au minimum 12 tirages pour que la probabilité d'obtenir la boule noire soit supérieure à 0,9.

Exercice 4 - 4,5 points

X \ Y	0	1	2	Loi de X
0	1/3	1/6	1/6	2/3
1	1/6	1/6	0	1/3
Loi de Y	1/2	1/3	1/6	1

z_i	0	1	2	3
p_i	1/3	1/3	1/3	0

u_i	0	1	2
p_i	5/6	1/6	0

Z \ U	0	1	Loi de Z
0	1/3	0	1/3
1	1/3	0	1/3
2	1/6	1/6	1/3
Loi de U	5/6	1/6	1

On remarque que $\mathrm{P}\left((Z = 1) \cap (U = 1)\right) = 0$ et $\mathrm{P}(Z = 1) \times \mathrm{P}(U = 1) = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{1}{6} = \dfrac{1}{18} \neq \mathrm{P}\left((Z = 1) \cap (U = 1)\right)$: donc les V.A. Z et U ne sont pas indépendantes.