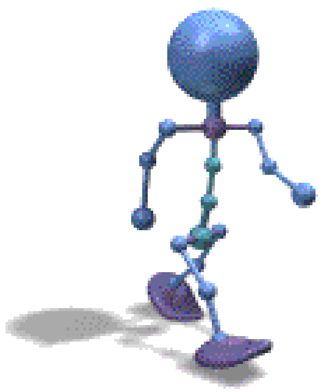
Lundi, 09 Novembre 2015
Planche, Travaux Dirigés N° 4

Fonctions concaves, Fonctions convexes



Exercice 1

Soit C un sous ensemble convexe de $\mathbb{R}^n$

$f : C \longrightarrow \mathbb{R}$, une fonction convexe

$g : C \longrightarrow \mathbb{R}$, une fonction convexe et croissante

Montrons que $gof\ C \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction convexe

Soient $x, y \in C$ et $\lambda \in [0, 1]$

f étant convexe : $f[(1-\lambda)x + \lambda y] \leq (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y)$

g étant croissante, $g\big[f[(1-\lambda)x + \lambda y]\big] \leq g[(1-\lambda)f(x) + \lambda f(y)]$

g étant convexe, $g[(1-\lambda)f(x) + \lambda f(y)] \leq (1-\lambda)g(f(x)) + \lambda g(f(y))$

D'où $gof[(1-\lambda)x + \lambda y] = g\big[f[(1-\lambda)x + \lambda y]\big] \leq g[(1-\lambda)f(x) + \lambda f(y)]$

$$\leq (1-\lambda)g(f(x)) + \lambda g(f(y))$$

$$= (1-\lambda)gof(x) + \lambda gof(y)$$

Exercice 2

Soit C un sous ensemble convexe de $\mathbb{R}^n$

$f\ :C\longrightarrow\mathbb{R}$, une fonction convexe

$\forall\alpha\in\mathbb{R}, S_\alpha=\{x\in C:\ \ f(x)\leq\alpha\}$

Montrons que S_α est un sous ensemble convexe de $\mathbb{R}^n$

Soient $x,y\in S_\alpha$ et $\lambda\in[0,1]$

Posons $\mathrm{z}=(1-\lambda)x+\lambda y$ et montrons que $z\in S_\alpha$

Il suffit de montrer que $f(z)\leq\alpha$

$f(z)=f[(1-\lambda)x+\lambda y]\leq(1-\lambda)f(x)+\lambda f(y)$ car f est convexe

$\leq(1-\lambda)\alpha+\lambda\alpha$ car $x,y\in S_\alpha$ donc $f(x)\leq\alpha$ et $f(y)\leq\alpha$

Donc $f(z)\leq\alpha$ et par conséquent $z\in S_\alpha$

On en déduit que S_α est un sous ensemble convexe de $\mathbb{R}^n$

Exercice 3

Etude de la convexité de la fonction $f\,:\,\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ par :

$$f(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 - xy + 2yz + xz$$

$D = \mathbb{R}^3$ est ouvert convexe et f de classe C^2

La matrice Hessienne (Le Hessien) de f est donnée par :

$$M_f = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y,z) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y,z) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(x,y,z) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y,z) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y,z) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(x,y,z) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}(x,y,z) & \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}(x,y,z) & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x,y,z) \end{bmatrix}$$

Une fonction est convexe sur un ouvert convexe D si le Hessien est semi-définit positif sur D

Théorème de Sylvester $\Longrightarrow$Les mineurs principaux du Hessien sont tous positifs ou nuls sur D

$$M_f = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

Mineurs principaux de 1er ordre : extraction de deux lignes et deux colonnes de mêmes indices

Indices 2,3 : det (2) = 2$>$0 ; indice 1, 3 : det (4)=4 $>$0 ; indice 1, 2 : det (6)=6 $>$0

Mineurs principaux de 2ème ordre : extraction d'une ligne et d'une colonne de même indice

Indice 3 : det$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$=7 $>$0 ; Indice 2 : det$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$=11$>$0 ; Indice 1 : det$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$=20 $>$0

Mineurs principaux de 3ème ordre : Matrice M_f

$$\det\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 6 \end{pmatrix} = 2\,(20) + 1(-8) + 1(-6) = 26 > 0$$

Les mineurs principaux de M_f sont définit positifs donc f est convexe sur $\mathbb{R}^{\,3}$

Exercice 4

On considère $f: \mathbb{R}_{++}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que :

$\forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}_{++}^2, f(x_1, x_2) = x_1^{\alpha} x_2^{\beta}$ où $\alpha > 0$ et $\beta > 0$

Montrons que si $\alpha + \beta$ =1, alors f est concave.

f est concave si :

1. f est définie sur un ouvert convexe

2. f est semi-définit négatif

$\Longrightarrow$Les mineurs principaux du Hessien alternent en signe, les mineurs d'ordre 1 étant négatifs.

Exercice 4

$\mathbb{R}^2_{++}$ est évidemment un ouvert, montrons qu'il est convexe

Soient $\mathrm{X} = (x_1, x_2), \mathrm{Y} = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2_{++}$ et $\lambda \in [0, 1]$

Montrons que : $(1-\lambda)\mathrm{X} + \lambda\mathrm{Y} \in \mathbb{R}^2_{++}$

$(1-\lambda)\mathrm{X} + \lambda\mathrm{Y} = \big((1-\lambda)x_1 + \lambda y_1, (1-\lambda)x_2 + \lambda y_2\big)$

$\lambda \in [0, 1] \implies (1-\lambda) > 0$ ou $\lambda > 0$

Or $x_1 > 0$ et $y_1 > 0 \implies (1-\lambda)x_1 > 0$ ou $\lambda\, y_1 > 0$

Par conséquent : $(1-\lambda)x_1 + \lambda y_1 > 0$

De même, on montre que : $(1-\lambda)x_2 + \lambda y_2 > 0$

Conclusion : $(1-\lambda)\mathrm{X} + \lambda\mathrm{Y} \in \mathbb{R}^2_{++}$ donc $\mathbb{R}^2_{++}$ est convexe

Il existe une propriété qui permet de montrer facilement la convexité de $\mathbb{R}^2_{++}$ laquelle?

$\forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2_{++}, f(x_1, x_2) = x_1^{\alpha} x_2^{\beta}$ $où$ $\alpha > 0$ et $\beta > 0$, avec $\alpha +$ β =1

f de classe C^2 et la matrice Hessienne (Le Hessien) de f est donnée par :

$$M_f = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x_1, x_2) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 x_2}(x_1, x_2) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 x_1}(x_1, x_2) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x_1, x_2) \end{bmatrix}$$

$$M_f = \begin{bmatrix} \alpha(\alpha - 1) x_1^{\alpha-2} x_2^{\beta} & \alpha\beta x_1^{\alpha-1} x_2^{\beta-1} \\ \alpha\beta x_1^{\alpha-1} x_2^{\beta-1} & \beta(\beta - 1) x_1^{\alpha} x_2^{\beta-2} \end{bmatrix}$$

$$\det(M_f) = det\begin{bmatrix} \alpha(\alpha-1)x_1^{\alpha-2}x_2^{\beta} & \alpha\beta x_1^{\alpha-1}x_2^{\beta-1} \\ \alpha\beta x_1^{\alpha-1}x_2^{\beta-1} & \beta(\beta-1)x_1^{\alpha}x_2^{\beta-2} \end{bmatrix}$$

$$= \left(\alpha(\alpha-1)x_1^{\alpha-2}x_2^{\beta}\right)\left(\beta(\beta-1)x_1^{\alpha}x_2^{\beta-2}\right) - \left(\alpha\beta x_1^{\alpha-1}x_2^{\beta-1}\right)\left(\alpha\beta x_1^{\alpha-1}x_2^{\beta-1}\right)$$

$$= \alpha\beta(\alpha-1)(\beta-1)x_1^{2\alpha-2}x_2^{2\beta-2} - (\alpha\beta)^2x_1^{2\alpha-2}x_2^{2\beta-2}$$

$$= \alpha\beta(\alpha-1)(\beta-1)x_1^{2\alpha-2}x_2^{2\beta-2} - (\alpha\beta)^2x_1^{2\alpha-2}x_2^{2\beta-2}$$

$$= [\alpha\beta(\alpha-1)(\beta-1) - (\alpha\beta)^2]x_1^{2\alpha-2}x_2^{2\beta-2}$$

$$= [(\alpha-1)(\beta-1) - \alpha\beta]\alpha\beta x_1^{2\alpha-2}x_2^{2\beta-2}$$

$$= [1-\alpha-\beta]\alpha\beta x_1^{2\alpha-2}x_2^{2\beta-2} \quad or \quad \alpha + \beta = 1 \Longrightarrow 1-\beta-\alpha = 0$$

$$\det(M_f) = 0, \forall(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2_{++}$$

Mineur de 2ème Ordre : $\det(M_f) = 0 \geq 0$

Mineur de 1er Ordre

$$M_f(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} \alpha(\alpha-1)x_1^{\alpha-2}x_2^{\beta} & \alpha\beta x_1^{\alpha-1}x_2^{\beta-1} \\ \alpha\beta x_1^{\alpha-1}x_2^{\beta-1} & \beta(\beta-1)x_1^{\alpha}x_2^{\beta-2} \end{bmatrix}$$

Indice 2 : $\det\left(\alpha(\alpha-1)x_1^{\alpha-2}x_2^{\beta}\right) = \alpha(\alpha-1)x_1^{\alpha-2}x_2^{\beta} \leq 0 \quad \forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}_{++}^2$

Indice 1 : $\det\left(\beta(\beta-1)x_1^{\alpha}x_2^{\beta-2}\right) = \beta(\beta-1)x_1^{\alpha}x_2^{\beta-2} \leq 0 \quad \forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}_{++}^2$

$M_f(x_1, x_2)$ est semi-définit négative $\forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}_{++}^2$
Donc f est concave sur $\mathbb{R}_{++}^2$

2) On suppose que : $\alpha + \beta < 1$, montons que f est strictement concave.

Il suffit de montrer que $M_f(x_1, x_2)$ est définit négative $\forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2_{++}$

$\det(M_f) = [1-\alpha-\beta]\alpha\beta x_1^{2\alpha-2} x_2^{2\beta-2}$ $\quad or \quad \alpha + \beta < 1 \Longrightarrow 1-\beta-\alpha > 0$

$\det(M_f) > 0, \forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2_{++}$

Mineur de 1er Ordre

Indice 2 : $\det\left(\alpha(\alpha-1)x_1^{\alpha-2}x_2^{\beta}\right) = \alpha(\alpha-1)x_1^{\alpha-2}x_2^{\beta}, \quad \forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2_{++}$

Or $\alpha + \beta < 1 \Leftrightarrow \alpha - 1 < -\beta < 0$ (A noter que : $\beta > 0$)

Donc $\alpha(\alpha-1) < 0$ et enfin $\alpha(\alpha-1)x_1^{\alpha-2}x_2^{\beta} < 0, \quad \forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2_{++}$

Indice 1 : $\det\left(\beta(\beta-1)x_1^{\alpha}x_2^{\beta-2}\right) = \beta(\beta-1)x_1^{\alpha}x_2^{\beta-2}, \quad \forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2_{++}$

On montre de même que : $\beta(\beta-1)x_1^{\alpha}x_2^{\beta-2} < 0, \quad \forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2_{++}$

M_f est définie négatif donc f est strictement concave

Exercice 5

$f: \mathbb{R}^2_{++} \longrightarrow \mathbb{R},\ f(x_1, x_2) = x_1^{\alpha} + \mu x_2^{\beta}$

1) Montrons que si $\alpha, \beta \in \,]0,1[$, alors f est strictement concave

- $\mathbb{R}^2_{++}$ ouvert convexe
- f est de classe C^2
- Calcul de $M_f(x)$

$$M_f(x) = \begin{pmatrix} \alpha(\alpha-1)x_1^{\alpha-2} & 0 \\ 0 & \mu\beta(\beta-1)x_2^{\beta-2} \end{pmatrix}$$

Calcul des mineurs

Mineur d'ordre 2

- $\det\left(M_f(x)\right) = det\begin{pmatrix} \alpha(\alpha-1)x_1^{\alpha-2} & 0 \\ 0 & \mu\beta(\beta-1)x_2^{\beta-2} \end{pmatrix}$

$$= \mu\alpha\beta(\alpha-1)(\beta-1)x_1^{\alpha-2}x_2^{\beta-2} > 0$$

Mineurs d'ordre 1

- $\det(\alpha(\alpha-1)x_1^{\alpha-2}) = \alpha(\alpha-1)x_1^{\alpha-2} < 0;\ \ \forall(x_1, x_2) \in \mathbb{R}_{++}^2$
- $\det\left(\mu\beta(\beta-1)x_2^{\beta-2}\right) = \mu\beta(\beta-1)x_2^{\beta-2} < 0;\ \ \forall(x_1, x_2) \in \mathbb{R}_{++}^2$

$M_f(x)$ est définie négative $\forall(x_1, x_2) \in \mathbb{R}_{++}^2$ donc f est strictement concave

2. Montrons que si $\alpha > 1 \; et \; \beta > 1$, alors f est strictement convexe

$\mathbb{R}^2_{++}$ ouvert convexe et f est de classe C^2

Mineur d'ordre 2

- $\det\left(M_f(x)\right) = \mu\alpha\beta(\alpha - 1)(\beta - 1)x_1^{\alpha-2}x_2^{\beta-2} > 0; \quad \forall(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2_{++}$

Mineurs d'ordre 1

- $\det(\alpha(\alpha - 1)x_1^{\alpha-2}) = \alpha(\alpha - 1)x_1^{\alpha-2} > 0; \;\; \forall(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2_{++}$
- $\det\left(\mu\beta(\beta - 1)x_2^{\beta-2}\right) = \mu\beta(\beta - 1)x_2^{\beta-2} > 0; \;\; \forall(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2_{++}$

$M_f(x)$ est définie positive $\forall(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2_{++}$ donc f est strictement convexe

Exercice 6

$f: \mathbb{R}^2_{++} \longrightarrow \mathbb{R}$, fonction de classe C^2, homogène de degré 1

1. Montrons que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2_{++}, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = -\frac{y}{x}\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) \quad et \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = -\frac{x}{y}\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)$$

Rappel (Théorème d'Euler)

Si f: $\mathbb{R}^2_{++} \longrightarrow \mathbb{R}$, est une fonction de classe C^1, alors f est homogène de degré k si et seulement si :

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x,y) = kf(x)$$

f homogène de degré 1, d'après le théorème d'Euler, on a :

$$x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)+y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=f(x,y)\ \ ,\forall(x,y)\in\mathbb{R}_{++}^{2}$$

$$\Rightarrow\ \frac{\partial}{\partial x}\left[x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)+y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right]=\frac{\partial}{\partial x}[f(x,y)]$$

$$\Rightarrow\ \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)+x\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)+y\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y)=\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$$

$$\Rightarrow\ x\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)+y\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y)=0$$

$$\Rightarrow\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)=-\frac{y}{x}\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y),\forall(x,y)\in\mathbb{R}_{++}^{2}$$

On montre de la même façon que : $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)=-\frac{x}{y}\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y),\forall(x,y)\in\mathbb{R}_{++}^{2}$

A noter que f est $C^2\Rightarrow\forall(x,y)\in\mathbb{R}_{++}^{2},\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y)$

Montrons que f concave $\Leftrightarrow$ $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2_{++}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)$

Matrice Hessien $M_f(x,y)$ de f pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2_{++}$

$$M_f = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{y}{x}\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) & -\frac{x}{y}\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) \end{bmatrix} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) \begin{bmatrix} -\frac{y}{x} & 1 \\ 1 & -\frac{x}{y} \end{bmatrix}$$

Mineur d'ordre 2

$$\det\left(M_f(x)\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)\left[\left(-\frac{y}{x}\right)\left(-\frac{x}{y}\right) - 1 \times 1\right] = 0 \geq 0, \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2_{++}$$

Mineurs d'ordre 1

- $\det\left(-\frac{y}{x}\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)\right) = -\frac{y}{x}\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y); \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2_{++}$

- $\det\left(-\frac{x}{y}\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)\right) = -\frac{x}{y}\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y); \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2_{++}$

Montrons que f concave $\Leftrightarrow M_f(x,y)\ s.d.n.\ \forall(x,y) \in \mathbb{R}^2_{++}$

Or mineur d'ordre 2 $= \det\left(M_f(x)\right) = 0 \geq 0, \forall(x,y) \in \mathbb{R}^2_{++}$

Donc f est s. d. n. $\Leftrightarrow$ Mineur d'ordre $1 \leq 0$

$$\Leftrightarrow \det\left(-\frac{y}{x}\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)\right) \leq 0 \text{ et } \det\left(-\frac{x}{y}\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)\right) \leq 0 \,; \quad \forall(x,y) \in \mathbb{R}^2_{++}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{y}{x}\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) \leq 0 \quad \text{et} \quad -\frac{x}{y}\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) \leq 0 \,; \quad \forall(x,y) \in \mathbb{R}^2_{++}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) \geq 0 \,; \quad \forall(x,y) \in \mathbb{R}^2_{++} \ \text{ car : } -\frac{y}{x} < 0 \ \text{ et } -\frac{x}{y} < 0; \forall(x,y) \in \mathbb{R}^2_{++}$$

Fin

Merci Pour Votre Attention