3 L3 Éco 06.2013

Université Cergy-Pontoise
L3 Économétrie
Examen. 14 juin 2013 2h

Il vous est conseillé de lire une première fois l'ensemble du sujet avant de commencer.
Les documents ne sont pas autorisés.
L'ensemble des réponses devra être justifié.

Cours 1 (4 points)

Soit le modèle :

$$\underset{(T,1)}{y} = \underset{(T,K+1)}{X}\beta + \underset{(T,p)}{Z}\gamma + \epsilon \tag{1}$$

Énoncer le théorème de Frisch-Waugh appliqué à ce modèle.

Cours 2 (3 points)

Qu'appelle t-on estimateur BLUE ? Sous quelles hypothèses est il obtenu ?

Exercice 1 : 6 points

On considère le modèle :

$$\underset{(T,1)}{y} = \underset{(T,K+1)}{X}\underset{(K+1,1)}{\beta} + \underset{(T,1)}{\epsilon} \tag{2}$$

Ainsi que les hypothèses :

- H_1 : $E(\underset{(T,1)}{\epsilon}) = \underset{(T,1)}{0}$
- H_2 : La matrice $\underset{(T,K+1)}{X}$ est certaine.
- H_3 : la matrice $\underset{(T,K+1)}{X}$ est de plein rang colonne.
- H_4 : $E(\underset{(T,1)}{\epsilon}\,.\,\underset{(1,T)}{\epsilon'}) = \sigma^2 \underset{(T,T)}{I_T}$

1. Donner l'expression de l'estimateur $\hat{\beta}$ des MCO de β associé au modèle 3.
2. Quelle(s) hypothèse(s), parmi les hypothèses H_1 à H_4, permet(tent) d'obtenir un estimateur unique $\hat{\beta}$?
3. Calculer, l'espérance de $\hat{\beta}$, en précisant, parmi les hypothèses H_1 à H_4, celles que vous utilisez pour calculer l'espérance.
4. Calculer, la variance de $\hat{\beta}$, en précisant, parmi les hypothèses H_1 à H_4, celles que vous utilisez pour calculer la variance.

On introduit maintenant l'hypothèse :

- $H_6 : \epsilon \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, \sigma^2 I_T)$

1. Donner la loi de $\hat{\beta}$
2. Donner un estimateur sans biais de σ^2 et sa loi.
3. Montrer que les ϵ_t sont indépendants deux à deux.

Exercice 4 : 7 points

On veut estimer une fonction de production de type Cobb-Douglas

$$Y = A_0 K_t^{\alpha} L^{\beta} \quad (3)$$

- Y : le niveau de production
- K : le niveau de capital
- L : l'emploi

1-En transformant le modèle 4, faire apparaître le modèle linéaire suivant :

$$log(Y_t) = \gamma + \alpha log(K_t) + \beta log(L_t) + \epsilon_t \quad (4)$$

2-Que représente la variable ϵ_t ?

On effectue la régression correspondant au modèle 5 sur un échantillon de $T = 360$ mois de 1970 à 1999. On obtient les résultats suivants :

$$\widehat{log(Y_t)} = \underset{(0.022)}{-0.112} + \underset{(0.017)}{0.317} log(K_t) + \underset{(0.034)}{0.545} log(L_t) \quad t = 1970:1, 1999:12 \quad (5)$$

$$R^2 = 0.901 \qquad SCR = 3.421$$

3-Expliquer pourquoi les valeurs entre parenthèses, sous les coefficients estimés, sont les écarts-types estimés des coefficients estimés.

4-Effectuer, en détail, le test $H_0 : \alpha = 0$.

5-Effectuer, en détail, le test de Fisher de significativité globale des coefficients.

On souhaite maintenant tester l'hypothèse de constance des rendements d'échelle.

6-Montrer que tester cette hypothèse revient à tester l'hypothèse $H_0 : \omega = 0$ sur le modèle suivant :

$$log(y_t) = \delta + \lambda log(k_t) + \omega log(L_t) + \epsilon_t \quad (6)$$

- $y = \frac{Y}{L}$: le niveau de production par tête
- $k = \frac{K}{L}$: le niveau de capital par tête
- L : l'emploi

Le modèle estimé donne :

$$\widehat{log(y_t)} = \underset{(0.120)}{-0.398} + \underset{(0.089)}{0.304}log(k_t) - \underset{(0.009)}{0.031}log(L_t) \quad t = 1970:1, 1999:12 \tag{7}$$

$$R^2 = 0.987 \qquad SCR = 4.987$$

7-Conclure quant à la nature des rendements d'échelle.