UNIVERSITÉ DE CERGY | Licence d'Économie Finance et Gestion
U.F.R. Economie et Gestion | L1 - S1

PRATIQUE DES FONCTIONS NUMÉRIQUES

TEST 2 - Novembre 2016 - 1h 30 min

CALCULATRICES INTERDITES
LES PORTABLES DOIVENT ÊTRE DÉBRANCHÉS ET RANGÉS.

Exercice 1 - 5 points

1. Donner les éléments caractéristiques (nature, axe de symétrie, sommet, intersections avec les axes) de la courbe $\mathcal{P}$ d'équation $y = -\dfrac{x^2}{2} + 4x - 6$.
   Tracer soigneusement $\mathcal{P}$ sur le repère joint en annexe page suivante.
2. Soit $\mathcal{D}$ la droite d'équation $y = -\dfrac{3}{2}x + 6$. Donner deux points de $\mathcal{D}$: **ces points seront à coordonnées entières et devront être placés sur l'annexe !** Tracer $\mathcal{D}$ sur l'annexe.
3. Résoudre graphiquement l'inéquation $(I)\ :\ -\dfrac{x^2}{2} + 4x - 6 \leq -\dfrac{3}{2}x + 6$ (Rédigez !).
4. Retrouver votre résultat par un calcul.

Exercice 2 - 8 points

Soit le polynôme $P(X) = X^3 - 13X + 12$

1. Déterminer une racine de $P(X)$ dans l'ensemble $\{-2; -1; 0; 1; 2\}$. En déduire que $P(X)$ est divisible par un polynôme de degré 1 que vous préciserez.
2. Effectuer la division euclidienne de $P(X)$ par le polynôme $D(X) = X - 1$.
3. En déduire la factorisation de $P(X)$ en un produit de facteurs de degré 1.
4. Déterminer le signe de $p(x) = x^3 - 13x + 12$.
5. Résoudre l'inéquation $(I_1)\ :\ e^{3x} - 13e^x + 12 \leq 0$
6. Résoudre l'inéquation $(I_2)\ :\ \ln(25 - x^2) + \ln x \leq \ln 12 + \ln(x+1)$ (on prendra soin de préciser le domaine de validité de cette inéquation **avant** de commencer sa résolution)

Exercice 3 - 7 points
Les questions de cet exercice sont indépendantes les unes des autres

1. **• 3 points** Déterminer les fonctions dérivées des fonctions suivantes définies et dérivables sur D (voir tableaux des dérivées page 2) :

   • $f_1\ :\ f_1(x) = \dfrac{-5}{2x^2+1}$ sur $D = \mathbb{R}$ • $f_2\ :\ f_2(x) = \dfrac{x}{(2x+1)^2}$ sur $D = \left]\dfrac{-1}{2}; +\infty\right[$

   •$f_3\ :\ f_3(x) = x^2 e^{1-3x}$ sur $D = \mathbb{R}$ •$f_4\ :\ f_4(x) = \ln(x^2 - x + 1)$ sur $D = \mathbb{R}$

   Pour les questions **2) et 3)**, on donne les valeurs approchées suivantes :
   $\ln 2 \approx 0,7$; $\ln 3 \approx 1,1$ et $\ln 5 \approx 1,6$.

2. **• 2 points** Soit f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = 2\ln x - x$. Déterminer la fonction dérivée de f, puis les variations de f sur son domaine. (valeur exacte puis approchée de l'extremum demandée, limites NON demandées).

3. **• 2 points** Résoudre les équations suivantes (Donner la valeur exacte puis une valeur approchée de chaque solution)

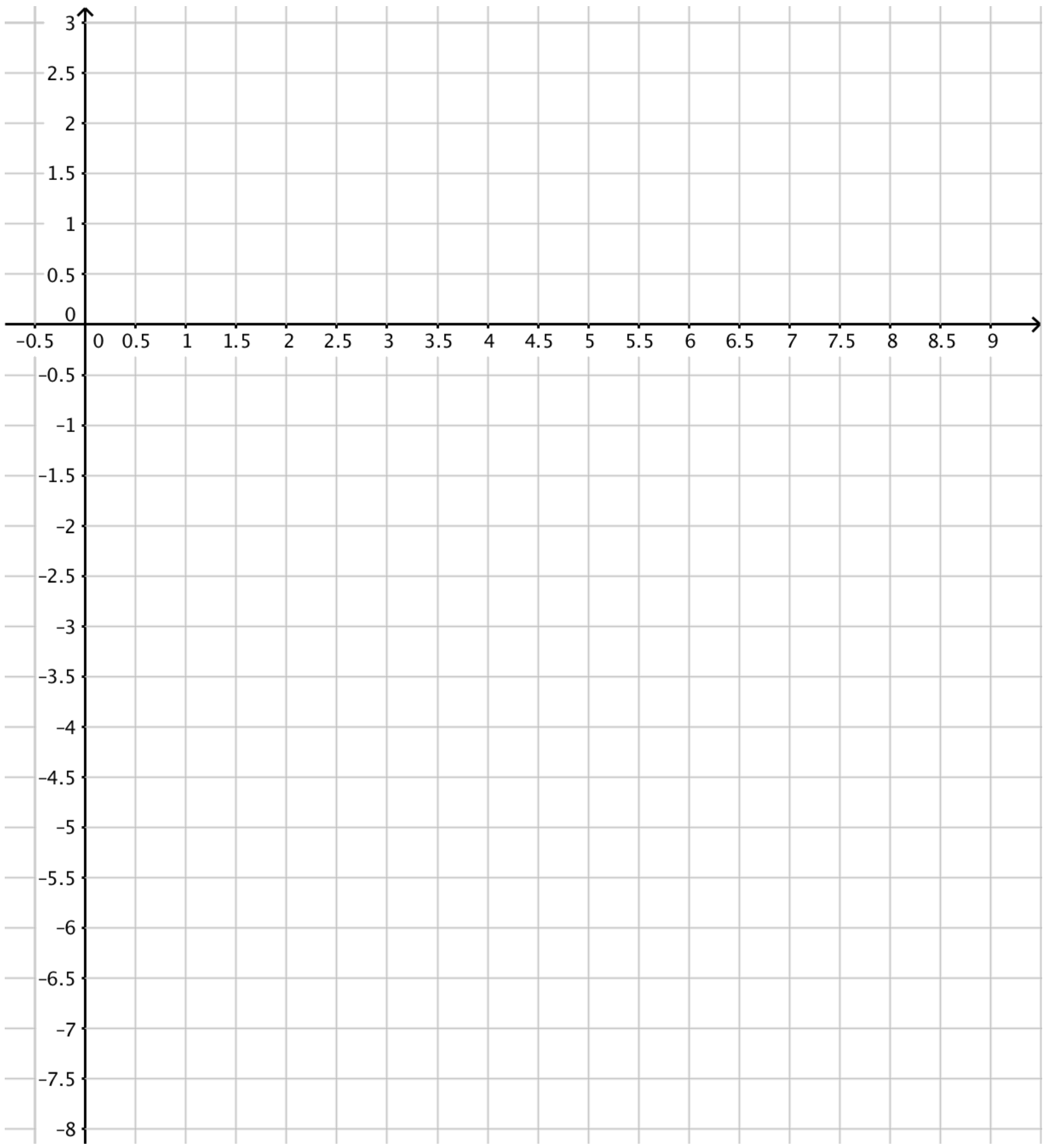
$$(E_1)\ :\ 3^t = \frac{9}{80} \qquad (E_2)\ :\ 2e^{3x} = 9$$

$f\ :\ f(x) = ...$	$f'(x) = ...$	Ensemble de validité
$ax+b$	a	$\mathbb{R}$
$x^n\ (n \in \mathbb{Z}^*)$	nx^{n-1}	$]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$
$\sqrt{x}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0;+\infty[$
$x^\alpha\ (\alpha \in \mathbb{R}^*)$	$\alpha x^{\alpha-1}$	$]0;+\infty[$
e^x	e^x	$\mathbb{R}$
$\ln x$	$\dfrac{1}{x}$	$]0;+\infty[$
$a^x\ (a \in \mathbb{R}_+^*)$	$(\ln a)a^x$	$]0;+\infty[$

Fonction	Dérivée	Condition
$f+g$	$f'+g'$	
$f \times g$	$f' \times g + f \times g'$	
$\dfrac{f}{g}$	$\dfrac{f' \times g - f \times g'}{g^2}$	$\forall x \in I, g(x) \neq 0$
$f^n\ (n \in \mathbb{N}^*)$	$nf' \times f^{n-1}$	
$\ln f$	$\dfrac{f'}{f}$	$\forall x \in I, f(x) > 0$
$\exp(f)$	$f' \times \exp(f)$	

NOM - Numéro d'étudiant - groupe de TD :

ANNEXE à L'EXERCICE 1 : à rendre avec votre copie



UNIVERSITÉ DE CERGY — **Licence d'Économie, finance et Gestion**
U.F.R. Economie et Gestion — **L1 - S1**

PRATIQUE DES FONCTIONS NUMÉRIQUES

TEST 2 - Corrigé (sur 21,5 points)

Exercice 1 - 5,5 points

1. • **2 points** $\mathcal{P}$ d'équation $y = -\dfrac{x^2}{2} + 4x - 6$ est une parabole ouverte vers le bas **(0,25 pt)** d'axe de symétrie la droite d'équation $x = 4$ **(0,25 pt)** et de sommet $S(4; 2)$ **(0,25 pt)**. $\mathcal{P}$ coupe l'axe des ordonnées en $C(0; -6)$ **(0,25 pt)** et les abscisses des points d'intersection de P avec l'axe (Ox) sont les solutions de l'équation $-\dfrac{x^2}{2} + 4x - 6 = 0$: le discriminant de $P(x) = -\dfrac{x^2}{2} + 4x - 6$ est $\Delta = 4$: il y a deux solutions, donc deux points d'intersection de P avec (Ox) : $A(2; 0)$ et $B(6; 0)$ **(1 pt)**.
2. • **0,25 point** $\mathcal{D}$ d'équation $y = -\dfrac{3}{2}x + 6$ passe (par exemple) par les points $D(4; 0)$ et $E(6; -3)$.
3. • **0,5 point** Les solutions de l'inéquation (I) : $-\dfrac{x^2}{2} + 4x - 6 \leq -\dfrac{3}{2}x + 6$ sont les abscisses des points de $\mathcal{D}$ lorsque celle-ci est sur ou au-dessus de $\mathcal{P}$: on lit $\mathcal{S} =]-\infty; 3] \cup [8; +\infty[$
4. • **1,5 point** (I) : $-\dfrac{x^2}{2} + 4x - 6 \leq -\dfrac{3}{2}x + 6 \iff -\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{11}{2}x - 12 \leq 0 \iff -x^2 + 11x - 24 \leq 0$
   Le discriminant de $Q(x) = -x^2 + 11x - 24$ est $\Delta' = 11^2 - 4 \times 24 = 25$: $Q(x)$ a donc deux racines : $x_1 = 3$ et $x_2 = 8$: on a donc

x		3		8	
Signe de $Q(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

   Donc $\mathcal{S} =]-\infty; 3] \cup [8; +\infty[$

Figure complète : 1,25 point - voir en fin de corrigé

Exercice 2 - 8 points

1. • **0,5 point** Soit $P(X) = X^3 - 13X + 12$, on vérifie que $P(1) = 1 - 13 + 12 = 0$, et donc $P(X)$ est divisible par $D(X) = X - 1$.
2. • **1,5 point** Division euclidienne de $P(X)$ par le polynôme $D(X) = X - 1$.

$$\begin{array}{rrr|l}
X^3 & & -13X \ +12 & X \quad -1 \\ \cline{4-4}
-(X^3 \ -X^2) & & & X^2 \ +X \ -12 \\ \cline{1-2}
& X^2 & -13X & \\
& -(X^2 & -X) & \\ \cline{2-3}
& & -12X \ +12 & \\
& & -(-12X \ +12) & \\ \cline{3-3}
& & 0 &
\end{array}$$

   Conclusion : $P(X) = (X - 1)(X^2 + X - 12)$
3. • **1 point** On factorise $Q(X) = X^2 + X - 12$. Son discriminant est $\Delta = 49$, donc $Q(X)$ possède deux racines $X_1 = -4$ et $X_2 = 3$,
   $Q(X) = (X + 4)(X - 3)$ et $P(X) = (X - 1)(X + 4)(X - 3)$

4. • **1 point** Tableau de signe de $x^3 - 12x + 13$:

x	$-\infty$		-4		1		3		$+\infty$
$(x-1)$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$(x+4)(x-3)$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$x^3 - 13x + 12$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

5. • **2 points** Pour résoudre (I_1) : $e^{3x} - 13e^x + 12 \leq 0$, on pose $X = e^x$ et on utilise la factorisation obtenue à la question précédente : $e^{3x} - 13e^x + 12 = X^3 - 13X + 12 = (X+4)(X-3)(X-1) = (e^x+4)(e^x-3)(e^x-1)$
Comme, pour tout réel x, $e^x + 4 > 0$, $e^{3x} - 13e^x + 12$ est du signe de $(e^x - 3)(e^x - 1)$
• $e^x - 1 > 0 \Longleftrightarrow x > 0$ et $e^x - 3 > 0 \Longleftrightarrow x > \ln 3$

x	$-\infty$		0		$\ln 3$		$+\infty$
$(e^x - 1)$		$-$	0	$+$		$+$	
$(e^x - 3)$		$-$		$-$	0	$+$	
$e^{3x} - 13e^x + 12$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc $\mathcal{S} = [0; \ln 3]$

6. • **2 points** (I_2) : $\ln(25 - x^2) + \ln x \leq \ln 12 + \ln(x+1)$ est définie en x si et seulement si

$$\left\{\begin{array}{ccc} 25 - x^2 & > & 0 \\ x & > & 0 \\ x+1 & > & 0 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{ccc} -5 < & x & < 5 \\ x & > & 0 \\ x & > & -1 \end{array}\right. \Longleftrightarrow x \in]0;5[$$

$$\begin{array}{rcl} (I_2) & \Longleftrightarrow & \ln(x(25-x^2)) \leq \ln(12(x+1)) \ \text{ et } \ x \in]0;5[\\ & \Longleftrightarrow & x(25-x^2) \leq 12(x+1) \ \text{ et } \ x \in]0;5[\\ & \Longleftrightarrow & 25x - x^3 \leq 12x + 12 \ \text{ et } \ x \in]0;5[\\ & \Longleftrightarrow & 0 \leq x^3 - 13x + 12 \ \text{ et } \ x \in]0;5[\\ & \Longleftrightarrow & x \in [-4;1] \cup [3;+\infty[\ \text{ et } \ x \in]0;5[\end{array}$$

Donc $\mathcal{S} =]0;1] \cup [3;5[$

Exercice 3 - 8 points

1. • **3 points** Dérivées des fonctions suivantes :

(0,5 pt) f_1 : $f_1(x) = \dfrac{-5}{2x^2+1}$. $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_1'(x) = -5\left(\dfrac{-4x}{(2x^2+1)^2}\right) = \dfrac{20x}{(2x^2+1)^2}$

(1 pt) f_2 : $f_2(x) = \dfrac{x}{(2x+1)^2}$. $\forall x > \dfrac{-1}{2}$, $f_2'(x) = \dfrac{(2x+1)^2 - x \times 2 \times 2 \times (2x+1)}{(2x+1)^4} = \dfrac{-2x+1}{(2x+1)^3}$

(1 pt) f_3 : $f_3(x) = x^2 e^{1-3x}$. $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_3'(x) = 2xe^{1-3x} - 3x^2e^{1-3x} = (2x - 3x^2)e^{1-3x}$

(0,5 pt) f_4 : $f_4(x) = \ln(x^2 - x + 1)$. $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_4'(x) = \dfrac{2x-1}{x^2-x+1}$

2. • **2 points** Soit f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = 2\ln x - x$.
(0,5 pt) Pour tout $x > 0$, $f'(x) = \dfrac{2}{x} - 1 = \dfrac{2-x}{x}$.
(0,5 pt) Sur $\mathbb{R}_+^*$, $f'(x)$ est du signe de $2 - x$. Et : $2 - x > 0 \Longleftrightarrow 0 < x < 2$
(0,5 pt) $f(2) = 2\ln 2 - 2 \approx 1,4 - 2 \approx -0,6$
(0,5 pt) Tableau des variations de f :

x	0		2		$+\infty$
$f'(x)$	$\Vert$	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$\Vert$	$\nearrow$	$2\ln 2 - 2$	$\searrow$	

3. • **3 points**

(1,5 pt) (E_1) :

$$3^t = \frac{9}{80} \iff e^{t\ln 3} = \frac{9}{80} \iff t\ln 3 = \ln\left(\frac{9}{80}\right) = \ln 9 - \ln 80$$

$$\iff \quad t\ln 3 = 2\ln 3 - (\ln 16 + \ln 5) = 2\ln 3 - 4\ln 2 - \ln 5$$

$$\iff \quad t = \frac{2\ln 3 - 4\ln 2 - \ln 5}{\ln 3} = 2 - \frac{4\ln 2 + \ln 5}{\ln 3}$$

Soit $t \approx 2 - \dfrac{2,8 + 1,6}{1,1}$, i.e. $t \approx -2$

(1,5 pt) (E_2) :

$$2e^{3x} = 9 \iff e^{3x} = \frac{9}{2} \iff 3x = \ln(9/2)$$

$$\iff \quad x = \frac{1}{3}(\ln 9 - \ln 2) = \frac{1}{3}(2\ln 3 - \ln 2)$$

Soit $x \approx \dfrac{1}{3}(2,2 - 0,7)$, i.e. $x \approx 0,5$

Figure de l'Exercice 1 (1,25 point)