UNIVERSITÉ DE CERGY — Licence d'Économie Finance et Gestion
U.F.R. Economie et Gestion — L1 - S1

PRATIQUE DES FONCTIONS NUMÉRIQUES

TEST 2 - Novembre 2015 - 1h 30 min

CALCULATRICES INTERDITES
LES PORTABLES DOIVENT ÊTRE DÉBRANCHÉS ET RANGÉS.

Exercice 1 - 4 points

1. Donner les éléments caractéristiques (nature, axe de symétrie, sommet, intersections avec les axes) de la courbe $\mathcal{P}$ d'équation $y = -x^2 + 2x + 3$.
   Tracer soigneusement $\mathcal{P}$ sur le repère joint en annexe 1.
2. Tracer la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = 3x + 3$.
3. Résoudre graphiquement l'inéquation $(I)\ :\ -x^2 + 2x + 3 \geq 3x + 3$ (Rédigez !).
4. Retrouver votre résultat par un calcul.

Exercice 2 - 4 points

On considère le polynôme $P(X) = X^3 - 3X^2 - 2X + 4$

1. Déterminer une racine de $P(X)$ dans l'ensemble $\{-2; -1; 0; 1; 2\}$. En déduire que $P(X)$ est divisible par un polynôme de degré 1 que vous préciserez.
2. Effectuer la division euclidienne de $P(X)$ par le polynôme $D(X) = X - 1$.
3. En déduire la factorisation de $P(X)$ en un produit de facteurs de degré 1.
4. Résoudre l'inéquation $P(X) < 0$.

Exercice 3 - 7 points

1. • **2 points** Déterminer les fonctions dérivées des fonctions suivantes définies et dérivables sur D (voir tableaux des dérivées page suivante) :

   • $f_1\ :\ f_1(x) = \dfrac{5-2x}{3} - \dfrac{3}{5-2x}$ sur $D = \left]\dfrac{5}{2}; +\infty\right[$ • $f_2\ :\ f_2(x) = \dfrac{e^{x^2}}{x}$ sur $D = \mathbb{R}_+^*$

2. • **3 points** Soient f et g définie par $f(x) = \ln x$ et $g(x) = 2x^2 + 5x - 3$
   (a) Préciser le domaine de définition de f, puis celui de g.
   (b) Donner l'expression de $h(x)$ et $\ell(x)$ où $h = g \circ f$ et $\ell = f \circ g$. Vous préciserez les domaines de définition respectifs de h et ℓ.
   (c) Déterminer les fonctions dérivées de h et ℓ.

3. • **2 points** Soit f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = x \ln x$. Déterminer la fonction dérivée de f, puis les variations de f sur son domaine. (valeur exacte de l'extremum demandée, limites NON demandées)

Exercice 4 - 5 points

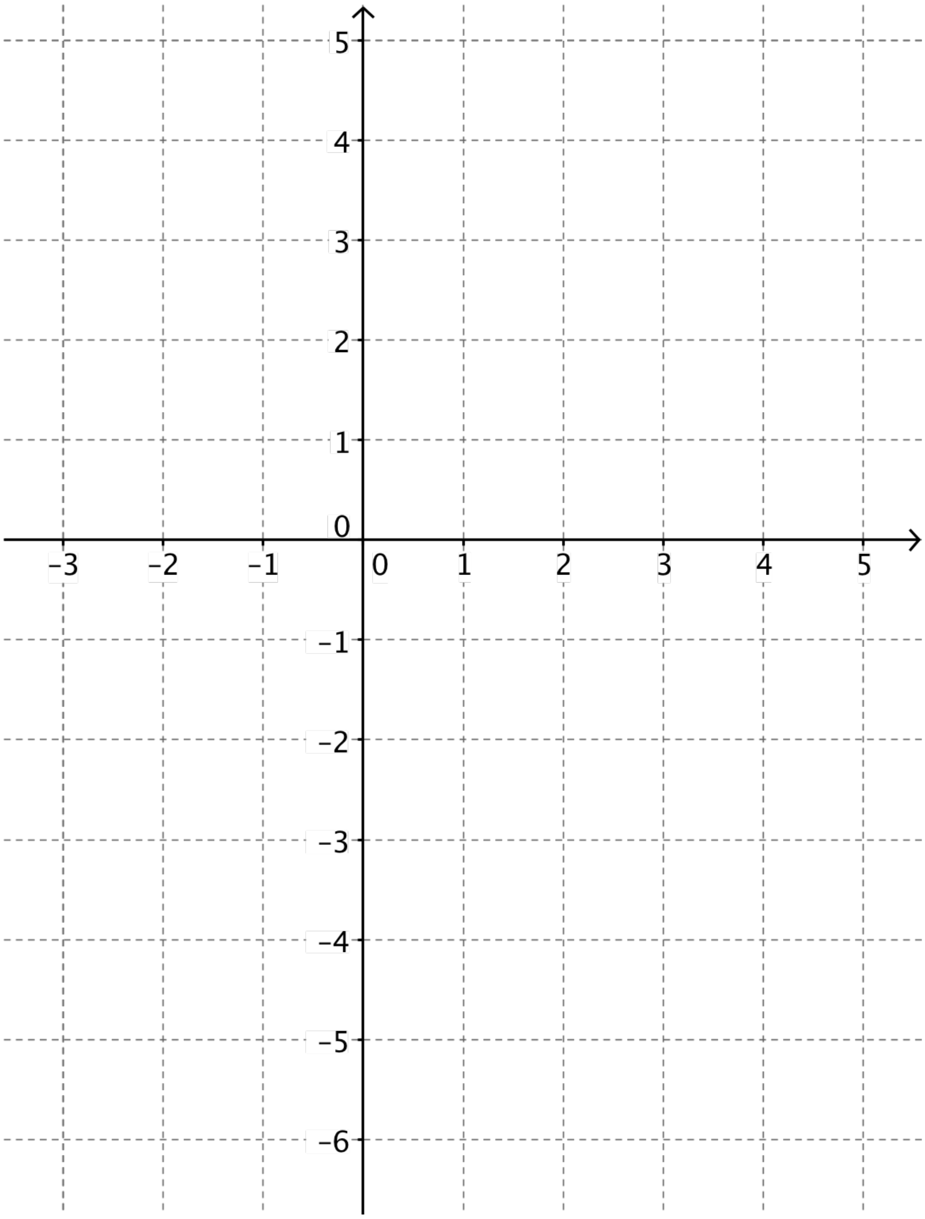
1. Résoudre l'équation $(E_0)\ :\ x^2 - x - 6 = 0$, et l'inéquation $(I_0)\ :\ x^2 - x - 6 > 0$
   En déduire la résolution de $(I_1)\ :\ e^{2x} - e^x - 6 > 0$ puis $(I_2)\ :\ 2\ln x > \ln(x+6)$.
2. On donnera une valeur approchée de la solution de (E_1) en prenant comme valeurs : $\ln 2 \approx 0,7$ et $\ln 3 \approx 1,1$:
   $$(E_1)\ :\ 8^t = 12 \times 3^t$$

$f\ :\ f(x) = ...$	$f'(x) = ...$	Ensemble de validité
$ax+b$	a	$\mathbb{R}$
$x^n\ (n \in \mathbb{Z}^*)$	nx^{n-1}	$]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$
$\sqrt{x}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0;+\infty[$
$x^\alpha\ (\alpha \in \mathbb{R}^*)$	$\alpha x^{\alpha-1}$	$]0;+\infty[$
e^x	e^x	$\mathbb{R}$
$\ln x$	$\dfrac{1}{x}$	$]0;+\infty[$
$a^x\ (a \in \mathbb{R}_+^*)$	$(\ln a)a^x$	$]0;+\infty[$

Fonction	Dérivée	Condition
$f+g$	$f'+g'$	
$f \times g$	$f' \times g + f \times g'$	
$\dfrac{f}{g}$	$\dfrac{f' \times g - f \times g'}{g^2}$	$\forall x \in I, g(x) \neq 0$
$f^n\ (n \in \mathbb{N}^*)$	$nf' \times f^{n-1}$	
$\ln f$	$\dfrac{f'}{f}$	$\forall x \in I, f(x) > 0$
$\exp(f)$	$f' \times \exp(f)$	

NOM - Numéro d'étudiant - groupe de TD :

ANNEXE à L'EXERCICE 1 : à rendre avec votre copie



UNIVERSITÉ DE CERGY
U.F.R. Economie et Gestion

Licence d'Économie, finance et Gestion
L1 - S1

PRATIQUE DES FONCTIONS NUMÉRIQUES

TEST 2 - Corrigé

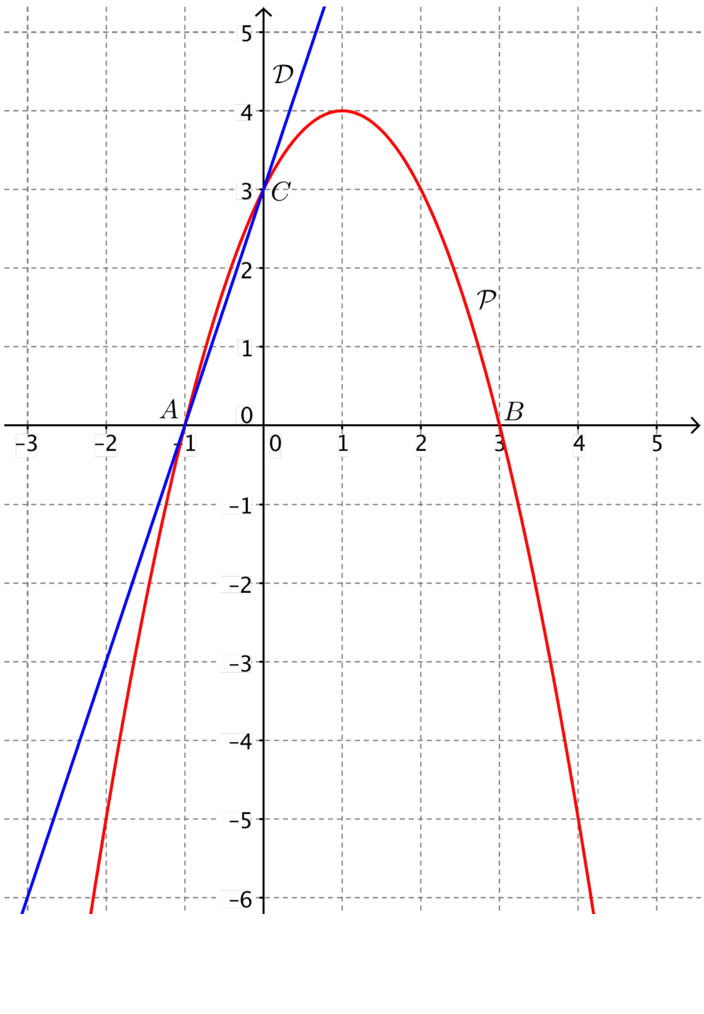
Exercice 1 - 4 points

1. • **1,5 point** $\mathcal{P}$ est une parabole ouverte vers le bas **(0,25 pt)** d'axe de symétrie la droite d'équation $x = 1$ **(0,25 pt)** et de sommet $S(1;4)$ **(0,25 pt)**. P coupe l'axe des ordonnées en $C(0;3)$ **(0,25 pt)** et les abscisses des points d'intersection de P avec l'axe (Ox) sont les solutions de l'équation $-x^2+2x+3=0$: le discriminant de $P(x)$ est $\Delta = 16$: il y a deux solutions, donc deux points d'intersection de P avec (Ox) : $A(-1;0)$ et $B(3;0)$. **(0,5pt)**
2. $\mathcal{D}$ d'équation $y = 3x+3$ passe (par exemple) par les points $C(0;3)$ et $A(-1;0)$.
3. • **0,5 point** Les solutions de l'inéquation (I) : $-x^2+2x+3 \geq 3x+3$ sont les abscisses des points de $\mathcal{D}$ où celle-ci est sur ou en-dessous de $\mathcal{P}$: on lit $\mathcal{S} = [-1;0]$
4. • **1 point** (I) : $-x^2+2x+3 \geq 3x+3 \iff -x^2-x \geq 0 \iff -x(x+1) \geq 0$
   Les racines de $P(x) = -x(x+1)$ sont -1 et 0 : on a donc

x		-1		0	
Signe de $P(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

Donc $\mathcal{S} = [-1;0]$

Figure complète : 1 point



Exercice 2 - 4 points

1. • **0,5 point** Soit $P(X) = X^3 - 3X^2 - 2X + 4$, on vérifie que $P(1) = 1 - 3 - 2 + 4 = 0$, et donc $P(X)$ est divisible par $D(X) = X - 1$.
2. • **1,5 point** Division euclidienne de $P(X)$ par le polynôme $D(X) = X + 1$.

$$\begin{array}{rrrr|l}
X^3 & -3X^2 & -2X & +4 & X \quad -1 \\ \cline{5-5}
-(X^3 & -X^2) & & & X^2 \; -2X \; -4 \\ \cline{1-2}
 & -2X^2 & -2X & & \\
 & -(-2X^2 & +2X) & & \\ \cline{2-3}
 & & -4X & +4 & \\
 & & -(-4X & +4) & \\ \cline{3-4}
 & & & 0 &
\end{array}$$

Conclusion : $P(X) = (X-1)(X^2 - 2X - 4)$

3. • **1 point** On factorise $Q(X) = X^2 - 2X - 4$. Son discriminant est $\Delta = 20$, donc $Q(X)$ possède deux racines $X_1 = \dfrac{2 - 2\sqrt{5}}{2} = 1 - \sqrt{5}$ et $X_2 = 1 + \sqrt{5}$,
$Q(X) = \left(X - (1 - \sqrt{5})\right)\left(X - (1 + \sqrt{5})\right)$ et $P(X) = (X-1)\left(X - 1 + \sqrt{5}\right)\left(X - 1 - \sqrt{5}\right)$
4. • **1 point** Tableau de signe de $x^3 - 3x^2 - 2x + 4$:

x	$-\infty$		$1-\sqrt{5}$		1		$1+\sqrt{5}$		$+\infty$
$(x-1)$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$(x-(1-\sqrt{5}))(x-(1+\sqrt{5}))$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$P(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

$S = \left]-\infty; 1 - \sqrt{5}\right[\cup \left]1; 1 + \sqrt{5}\right[$

Exercice 3 - 8 points

1. • **2 points** Dérivées des fonctions suivantes :

1 point f_1 : $f_1(x) = \dfrac{5 - 2x}{3} - \dfrac{3}{5 - 2x}$ $\quad \forall x \in \left]\dfrac{5}{2}; +\infty\right[$, $f_1'(x) = \dfrac{-2}{3} - \dfrac{6}{(5-2x)^2}$

1 point f_2 : $f_2(x) = \dfrac{e^{x^2}}{x}$ $\quad \forall x > 0$, $f_2'(x) = \dfrac{2xe^{x^2} \times x - e^{x^2}}{x^2} = \dfrac{e^{x^2}(2x^2 - 1)}{x^2}$

2. • **3,5 points** Soient f et g définie par $f(x) = \ln x$ et $g(x) = 2x^2 + 5x - 3$.
   (a) **0,5 point** $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}_+^*$ et $\mathcal{D}_g = \mathbb{R}$.
   (b) **2 points** $h(x) = (g \circ f)(x) = g(\ln x) = 2(\ln x)^2 + 5\ln x - 3$ **(0,5 pt)**
   et $\ell(x) = (f \circ g)(x) = \ln\left(2x^2 + 5x - 3\right)$ **(0,5 pt)**.
   On a immédiatement $\mathcal{D}_h = \mathbb{R}_+^*$ **(0,25 pt)**
   ℓ est définie en x si et seulement si $2x^2 + 5x - 3 > 0$: on calcule le discriminant de $g(x) = 2x^2 + 5x - 3$: $\Delta = 49$ et $g(x)$ possède deux racines $x_1 = \dfrac{1}{2}$ et $x_2 = -3$, d'où $\mathcal{D}_\ell =]-\infty; -3[\cup \left]\dfrac{1}{2}; +\infty\right[$ **(0,75 pt)**
   (c) **1 point** $\forall x > 0$, $h'(x) = \dfrac{4\ln x}{x} + \dfrac{5}{x}$ **(0,5 pt)** et $\forall x \in \mathcal{D}_\ell$, $\ell'(x) = \dfrac{4x + 5}{2x^2 + 5x - 3}$ **(0,5 pt)**

3. • **2,5 points** Soit f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = x \ln x$.

1 point Pour tout $x > 0$, $f'(x) = \ln x + x \times \dfrac{1}{x} = \ln x + 1$.

0,5 point On résout : $\ln x + 1 > 0 \iff \ln x > -1 \iff x > \dfrac{1}{e}$

0,5 point $f\left(\dfrac{1}{e}\right) = \dfrac{1}{e} \ln\left(\dfrac{1}{e}\right) = \dfrac{-1}{e}$

0,5 point Tableau des variations de f :

x	0		$1/e$		$+\infty$
$f'(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\Vert$	$\searrow$	$-1/e$	$\nearrow$	

Exercice 4 - 5 points

1. • **3,5 points**

• **1 point** (E_0) : $x^2 - x - 6 = 0$: le discriminant est $\Delta = 25$, (E_0) possède deux solutions : $x_1 = -2$ et $x_2 = 3$: $\mathcal{S}_0 = \{\,-2; 3\}$

D'après ce qui précède, (I_0) : $x^2 - x - 6 > 0$ a pour ensemble solution

$\mathcal{S}_0' =]-\infty; -2[\, \cup]3; +\infty[$

• **1,5 point** (I_1) : $e^{2x} - e^x - 6 > 0$:

Posons $X = e^x$, alors $e^{2x} - e^x - 6 = X^2 - X - 6 = (X+2)(X-3) = (e^x + 2)(e^x - 3)$

Comme pour tout réel x, $e^x + 2 > 0$, alors $e^{2x} - e^x - 6$ est du signe de $e^x - 3$

et $(I_1) \iff e^x - 3 > 0 \iff e^x > 3 \iff x > \ln 3$, donc $\mathcal{S}_1 =]\ln 3; +\infty[$

• **1 point** (I_2) : $2\ln x > \ln(x+6)$ est définie en x si et seulement si $x > 0$ et $x + 6 > 0$, soit $x > 0$

$$\begin{array}{rcl} (I_2) & : & 2\ln x > \ln(x+6) \\ & \iff & \ln x^2 > \ln(x+6) \quad \text{et } x > 0 \\ & \iff & x^2 > x + 6 \quad \text{et } x > 0 \\ & \iff & x^2 - x - 6 > 0 \quad \text{et } x > 0 \end{array}$$

D'après l'étude de (I_0) , on a $\mathcal{S}_2 =]3;\ +\infty[$

2. • **1,5 point**

$$\begin{array}{rcl} (E_1) & : & 8^t = 12 \times 3^t \iff \left(\dfrac{8}{3}\right)^t = 12 \iff t \ln\left(\dfrac{8}{3}\right) = \ln 12 = 2\ln 2 + \ln 3 \\ & \iff & t = \dfrac{2\ln 2 + \ln 3}{3\ln 2 - \ln 3} \end{array}$$

Soit $t \approx \dfrac{1,4 + 1,1}{2,1 - 1,1}$, i.e. $t \approx 2,5$