PRATIQUE DES FONCTIONS NUMÉRIQUES

TEST 2 - Novembre 2014 - 1h 30 min

CALCULATRICES INTERDITES
LES PORTABLES DOIVENT ÊTRE DÉBRANCHÉS ET RANGÉS.

Exercice 1 - 4 points

1. Donner les éléments caractéristiques (nature, axe de symétrie, sommet, intersections avec les axes) de la courbe $\mathcal{P}$ d'équation $y = x^2 - 6x + 5$. Tracer $\mathcal{P}$ à main levée sur le repère joint en annexe 1.
2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = |x^2 - 6x + 5|$.
   (a) Etudier le signe de $P(x) = x^2 - 6x + 5$, en déduire l'expression de $f(x)$ sans valeur absolue.
   (b) En utilisant le tracé de $\mathcal{P}$, tracer la courbe de f sur le repère de l'annexe 1. Vous expliquerez comment on obtient $\mathcal{C}_f$ à partir de $\mathcal{P}$.

Exercice 2 - 6 points

On considère le polynôme $P(X) = 2X^3 + 3X^2 - 5X - 6$

1. Vérifier que -1 est une racine de $P(X)$. En déduire que $P(X)$ est divisible par un polynôme de degré 1 que vous préciserez.
2. Effectuer la division euclidienne de $P(X)$ par le polynôme $D(X) = X + 1$.
3. En déduire la factorisation de $P(X)$ en un produit de facteurs de degré 1.
4. Résoudre l'inéquation (I_1) : $P(X) \geq 0$ puis l'inéquation (I_2) : $2e^{3x}+3e^{2x}-5e^{x}-6 \geq 0$

Exercice 3 - 5 points

Déterminer les fonctions dérivées des fonctions suivantes définies et dérivables sur D :

$f_1 \;:\; f_1(x) = \dfrac{3x+2}{5} - \dfrac{5}{3x+2}$ sur $D = \left]\dfrac{-2}{3}; +\infty\right[$

$f_2 \;:\; f_2(x) = \dfrac{x}{x^2+x+1}$ sur $D = \mathbb{R}$

$f_3 \;:\; f_3(x) = \sqrt{7x^2+3x+1}$ sur $D = \mathbb{R}$

$f_4 \;:\; f_4(x) = xe^x - x^2$ sur $D = \mathbb{R}$

$f_5 \;:\; f_5(x) = \ln(x^2 - 2x + 5)$ sur $D = \mathbb{R}$

$f_6 \;:\; f_6(x) = \left(x - e^{-x^2}\right)^3$ sur $D = \mathbb{R}$

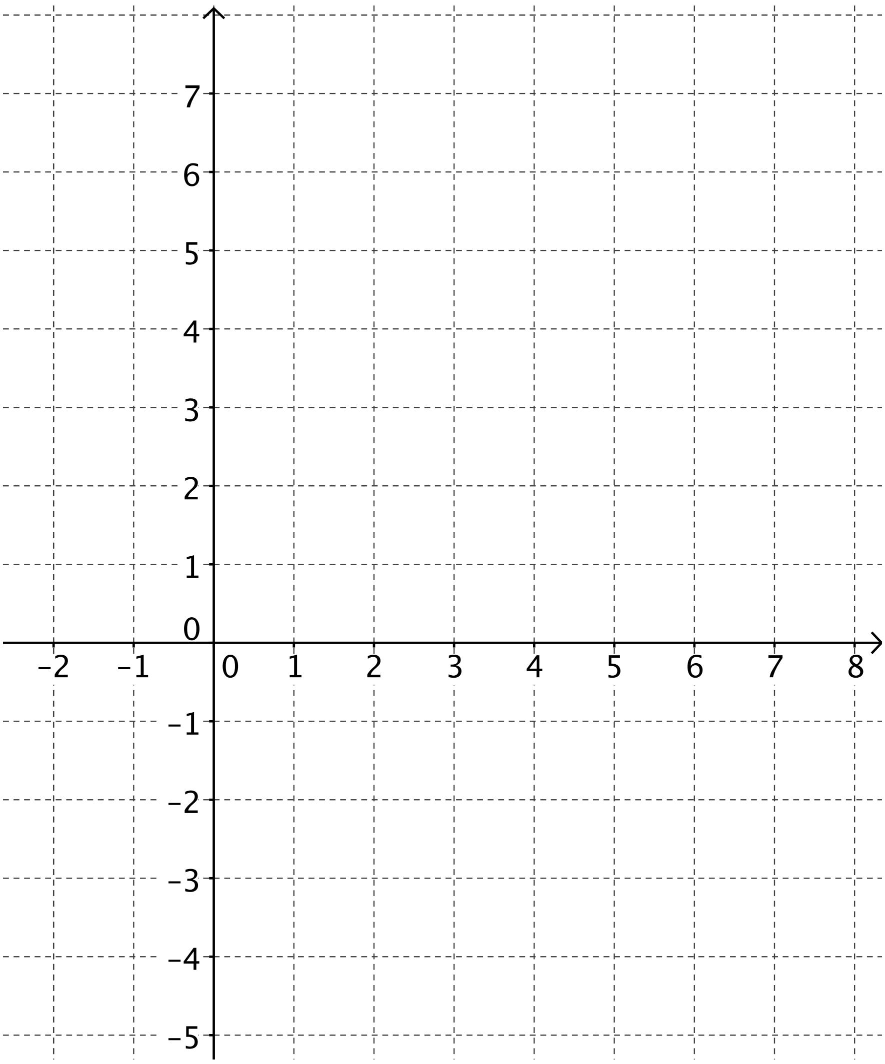
Exercice 4 - 5 points

Résoudre les équations suivantes :

1. **• 2 points** $(E_1)\;:\; 2\ln x + \ln 2 = \ln(x+3)$
2. **• 3 points** On donnera une valeur approchée des solutions de (E_2) et (E_3) en prenant comme valeurs : $\ln 2 \approx 0,7$ et $\ln 5 \approx 1,6$:
   a) $(E_2)\;:\; 4e^{3x} = 25$ b) $(E_3)\;:\; 2^t = 20 \times 5^t$

NOM - Numéro d'étudiant - groupe de TD :

ANNEXE à L'EXERCICE 1 : à rendre avec votre copie



UNIVERSITÉ DE CERGY **Licence d'Économie, finance et Gestion**
U.F.R. Economie et Gestion **L1 - S1**

PRATIQUE DES FONCTIONS NUMÉRIQUES

TEST 2 - Corrigé

Exercice 1 - 4 points

1. • **1,5 point** $\mathcal{P}$ est une parabole ouverte vers le haut **(0,25 pt)** d'axe de symétrie la droite d'équation $x = 3$ **(0,25 pt)** et de sommet $S(3;-4)$ **(0,25 pt)**. P coupe l'axe des ordonnées en $C(0;5)$ **(0,25 pt)** et les abscisses des points d'intersection de P avec l'axe (Ox) sont les solutions de l'équation $x^2 - 6x + 5 = 0$: le discriminant de $P(x)$ est $\Delta = 16$: il y a deux solutions, donc deux points d'intersection de P avec (Ox) : $A(1;0)$ et $B(5;0)$. **(0,5 pt)**
2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = |x^2 - 6x + 5|$.
   (a) • **1 point** On détermine le signe de $P(x) = x^2 - 6x + 5$ connaissant ses deux racines : $x_1 = 1$ et $x_2 = 5$.

Signe de $P(x)$	$+$	1	$-$	5	$+$
Expression de $f(x) = \lvert P(x) \rvert$	$x^2 - 6x + 5$		$-x^2 + 6x - 5$		$x^2 - 6x + 5$

   (b) **Figure complète 1 point - explication de la construction de $\mathcal{C}_f$: 0,5 point**
   $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{P}$ sont confondues sur les intervalles $]-\infty;1]$ et $[5;+\infty[$. $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{P}$ sont symétriques par rapport à l'axe (Ox) sur $[1;5]$ - Voir figure en fin de corrigé

Exercice 2 - 6 points

1. • **0,5 point** Soit $P(X) = 2X^3 + 3X^2 - 5X - 6$, on vérifie que $P(-1) = -2 + 3 + 5 - 6 = 0$, et donc $P(X)$ est divisible par $D(X) = X + 1$.
2. • **1,5 point** Division euclidienne de $P(X)$ par le polynôme $D(X) = X + 1$.

$$
\begin{array}{rrrr|l}
2X^3 & +3X^2 & -5X & -6 & X \quad +1 \\ \cline{5-5}
-(2X^3 & +2X^2) & & & 2X^2 \quad +X \quad -6 \\ \cline{1-2}
 & X^2 & -5X & & \\
 & -(X^2 & +X) & & \\ \cline{2-3}
 & & -6X & -6 & \\
 & & -(-6X & -6) & \\ \cline{3-4}
 & & & 0 &
\end{array}
$$

   Conclusion : $P(X) = (X + 1)(2X^2 + X - 6)$
3. • **1 point** On factorise $Q(X) = 2X^2 + X - 6$. Son discriminant est $\Delta = 49$, donc $Q(X)$ possède deux racines $X_1 = -2$ et $X_2 = \dfrac{3}{2}$, donc $Q(X) = 2\left(X - \dfrac{3}{2}\right)(X + 2)$ et $P(X) = 2(X + 1)\left(X - \dfrac{3}{2}\right)(X + 2)$

4. • **3 points** (**1,5 point**) On étudie le signe de $P(X)$ dans un tableau de signes.

x	$-\infty$		-2		-1		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$(X+1)$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$(X+2)$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$\left(X-\frac{3}{2}\right)$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$P(X)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

$S=[-2;-1]\cup\left[\frac{3}{2};+\infty\right[$

(**1,5 point**) Pour (I_2), on pose $X=e^x$, ainsi :
$2e^{3x}+3e^{2x}-5e^x-6=2X^3+3X^2-5X-6=P(X)=2(X+1)\left(X-\frac{3}{2}\right)(X+2)$
$=2(e^x+1)\left(e^x-\frac{3}{2}\right)(e^x+2)$
Or pour tout réel x, $e^x+1>0$ et $e^x+2>0$, donc le signe de $2e^{3x}+3e^{2x}-5e^x-6$ est celui de $e^x-\frac{3}{2}$
On résout : $e^x-\frac{3}{2}\geq 0 \iff e^x\geq\frac{3}{2}\iff x\geq\ln\left(\frac{3}{2}\right)$. Donc l'ensemble solution de (I_2) est $\left[\ln\left(\frac{3}{2}\right);+\infty\right[$

Exercice 3 - 5 points

- **1 point** $\forall x>\frac{-2}{3},\ f_1'(x)=\frac{3}{5}+\frac{15}{(3x+2)^2}$
- **1 point** $\forall x\in\mathbb{R},\ f_2'(x)=\frac{(x^2+x+1)-x(2x+1)}{(x^2+x+1)^2}=\frac{-x^2+1}{(x^2+x+1)^2}$
- **0,5 point** $\forall x\in\mathbb{R},\ f_3'(x)=\frac{14x+3}{2\sqrt{7x^2+3x+1}}$
- **1 point** $\forall x\in\mathbb{R},\ f_4'(x)=e^x+xe^x-2x$
- **0,5 point** $\forall x\in\mathbb{R},\ f_5'(x)=\frac{2x-2}{x^2-2x+5}$
- **1 point** $\forall x\in\mathbb{R},\ f_6'(x)=3\left(1+2xe^{-x^2}\right)\left(x-e^{-x^2}\right)^2$

Exercice 4 - 5 points

Résoudre les équations et inéquations suivantes :

1. • **2 points** $(E_1)\ :\ 2\ln x+\ln 2=\ln(x+3)$
   (E_1) est définie en x si et ssi. $\left\{\begin{array}{ccc} x & > & 0 \\ x+3 & > & 0\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{ccc} x & > & 0 \\ x & > & -3\end{array}\right. \iff x>0$
   $(E_1)\iff \ln 2x^2=\ln(x+3)\iff 2x^2=x+3$ et $x>0\iff 2x^2-x-3>0$ et $x>0$
   Le polynôme $P(x)=2x^2-x-3$ possède deux racines réelles $x_1=-1\not>0$ et $x_2=\frac{3}{2}>0$ donc $\mathcal{S}=\left\{\frac{3}{2}\right\}$.

2. • **1,5 *2 = 3 points**

$$\begin{aligned}(E_2) \quad &: \quad 4e^{3x} = 25\\ &\Longleftrightarrow \quad e^{3x} = \frac{25}{4}\\ &\Longleftrightarrow \quad 3x = \ln\left(\frac{25}{4}\right) = \ln 25 - \ln 4\\ &\Longleftrightarrow \quad x = \frac{\ln 25 - \ln 4}{3} = \frac{2\ln 5 - 2\ln 2}{3}\end{aligned}$$

Soit $x \approx \dfrac{3,2-1,4}{3}$ c-a-d. $x \approx 0,6$

$$\begin{aligned}(E_3) \quad &: \quad 2^t = 20 \times 5^t\\ &\Longleftrightarrow \quad \left(\frac{2}{5}\right)^t = 20\\ &\Longleftrightarrow \quad t\ln\left(\frac{2}{5}\right) = \ln 20\\ &\Longleftrightarrow \quad t = \frac{\ln 20}{\ln(2/5)} = \frac{2\ln 2 + \ln 5}{\ln 2 - \ln 5}\end{aligned}$$

Soit $t \approx \dfrac{1,4+1,6}{0,7-1,6} = \dfrac{3}{-0,9}$ c-a-d. $t \approx \dfrac{-10}{3}$

FIGURE de L'EXERCICE 1