UNIVERSITÉ DE CERGY — **Licence d'Économie Finance et Gestion**
U.F.R. Economie et Gestion — **L1 - S1**

PRATIQUE DES FONCTIONS NUMÉRIQUES

TEST 2 - Mardi 12 Novembre 2013 - 1h 30 min

CALCULATRICES INTERDITES
LES PORTABLES DOIVENT ÊTRE DÉBRANCHÉS ET RANGÉS.

Exercice 1 - 3 points

Donner les éléments caractéristiques de la parabole $\mathcal{P}$ représentative de la fonction f définie par $f(x) = -x^2 + 3x + 4$. Vous préciserez en outre l'équation de la tangente Δ à $\mathcal{P}$ au point $A(0;4)$. Tracer $\mathcal{P}$ et Δ à main levée sur votre copie (repère : un grand carreau ou un cm pour une unité).

Exercice 2 - 4 points

On considère le polynôme $P(X) = 2X^4 - 7X^3 - 2X^2 + 13X + 6$

1. Justifier que 2 est une racine de $P(X)$ et déterminer une autre racine de $P(X)$ dans l'ensemble $\{-2; -1; 0; 1\}$. En déduire que $P(X)$ est divisible par un polynôme $Q(X)$ de degré 2 que vous préciserez.
2. Effectuer la division euclidienne de $P(X)$ par le polynôme $X^2 - X - 2$.
3. Terminer la factorisation de $P(X)$ en un produit de facteurs de degrés 1.

Exercice 3 - 5 points

Déterminer les fonctions dérivées des fonctions suivantes définies et dérivables sur D :

$f_1 \ : \ f_1(x) = \dfrac{2x}{5} - \dfrac{5}{2x}$ sur $D = \mathbb{R}_+^*$ — $f_2 \ : \ f_2(x) = \dfrac{2-x}{3x^2+5}$ sur $D = \mathbb{R}$

$f_3 \ : \ f_3(x) = \sqrt{x^2 + 3x + 7}$ sur $D = \mathbb{R}$ — $f_4 \ : \ f_4(x) = x \ln x - x$ sur $D = \mathbb{R}_+^*$

$f_5 \ : \ f_5(x) = (x+1)\mathrm{e}^{-x^2}$ sur $D = \mathbb{R}$ — $f_6 \ : \ f_6(x) = \ln(-x^2 + x - 2)$ sur $D = \mathbb{R}$

Exercice 4 - 8 points

Résoudre les équations et inéquations suivantes :

1. $(E_0) \ : \ 2x^2 - x - 6 = 0$.
   En déduire la résolution de $(E_1) \ : \ \ln(x-1) + \ln(2x) = \ln(6-x)$
   puis de $(I_1) \ : \ 2e^{2x} - e^x - 6 > 0$
2. On donnera une valeur approchée des solutions de (E_2) et (E_3) en prenant comme valeurs : $\ln 2 \approx 0,7$ et $\ln 3 \approx 1,1$:
   a) $(E_2) \ : \ 2e^{5x} = 9$ — b) $(E_3) \ : \ 6^t = 4 \times 9^t$
3. $(I_2) \ : \ |x-3| > 5$
4. $(E_4) \ : \ x + 1 = |2x-3| - 5$

UNIVERSITÉ DE CERGY **Licence d'Économie, finance et Gestion**
U.F.R. Economie et Gestion **L1 - S1**

PRATIQUE DES FONCTIONS NUMÉRIQUES

TEST 2 - Corrigé

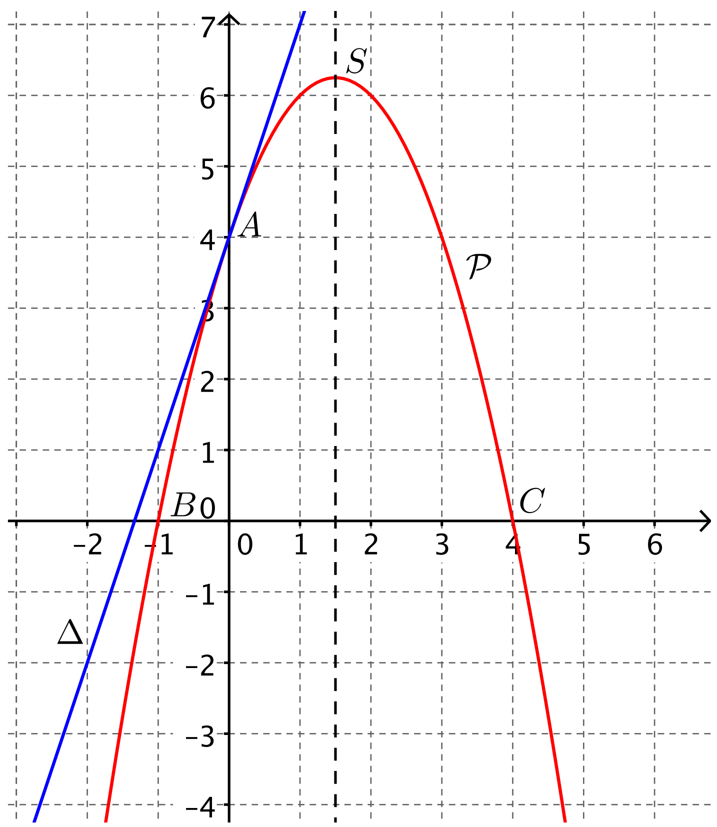
Exercice 1 - 3 points

• **0,75 point** La parabole $\mathcal{P}$ est ouverte vers le bas (car $a = -1 < 0$) et a pour axe de symétrie la droite d'équation $x = \dfrac{3}{2}$. Son sommet est $S\left(\dfrac{3}{2}; \dfrac{25}{4}\right)$

• **0,75 point** Elle coupe l'axe des ordonnées en $A(0;4)$ et l'axe des abscisses en $B(-1;0)$ et $C(4;0)$ car l'équation $-x^2 + 3x + 4$ possède deux solutions réelles $x_1 = -1$ et $x_2 = 4$

• **0,5 point** La tangente à $\mathcal{P}$ au point $A(0;4)$ a pour équation $y = f'(0)(x-0) + f(0)$ où $f'(x) = -2x + 3$ d'où $\Delta : y = 3x + 4$

• **1 point** Courbe :



Exercice 2 - 4,5 points

1. • **1,5 point** Soit $P(X) = 2X^4 - 7X^3 - 2X^2 + 13X + 6$, on vérifie que $P(2) = 2 \times 2^4 - 7 \times 2^3 - 2 \times 2^2 + 13 \times 2 + 6 = 32 - 56 - 8 + 26 + 6 = 0$, de même $P(-1) = 0$, et donc $P(X)$ est factorisable par $(X+1)$ et $(X-2)$ donc par leur produit : $Q(X) = (X+1)(X-2) = X^2 - X - 2$.

   2. • **2 points** Division euclidienne de $P(X)$ par le polynôme $Q(X)$.

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
2X^4 & -7X^3 & -2X^2 & +13X & +6 & X^2 \quad -X \quad -2 \\
\cline{6-6}
-(2X^4 & -2X^3 & -4X^2) & & & 2X^2 \quad -5X \quad -3 \\
\cline{1-3}
 & -5X^3 & +2X^2 & +13X & & \\
 & -(-5X^3 & +5X^2 & +10X) & & \\
\cline{2-4}
 & & -3X^2 & +3X & +6 & \\
 & & -(-3X^2 & +3X & +6) & \\
\cline{3-5}
 & & & & 0 &
\end{array}
$$

   Conclusion : $P(X) = (X^2 - X - 2)(2X^3 - 5X - 3)$

   3. • **1 point** On factorise $R(X) = 2X^3 - 5X - 3$. Son discriminant est $\Delta = 49$, donc $R(X)$ possède deux racines : $X_1 = 3$ et $X_2 = -\dfrac{1}{2}$ et $R(X) = 2(X-3)(X+\dfrac{1}{2}) = (X-3)(2X+1)$

   Donc $P(X) = (X+1)(X-2)(X-3)(2X+1)$

Exercice 3 - 5 points

• **1 point** $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f_1'(x) = \dfrac{2}{5} - \dfrac{-5}{2x^2} = \dfrac{2}{5} + \dfrac{5}{2x^2}$

• **1 point** $\forall x \in \mathbb{R},\ f_2'(x) = \dfrac{-(3x^2+5) - 6x(2-x)}{(3x^2+5)^2} = \dfrac{3x^2 - 12x - 5}{(3x^2+5)^2}$

• **0,5 point** $\forall x \in \mathbb{R},\ f_3'(x) = \dfrac{2x+3}{2\sqrt{x^2+3x+7}}$

• **1 point** $\forall x > 0,\ f_4'(x) = \ln x + x \times \dfrac{1}{x} - 1 = \ln x$

• **1 point** $\forall x \in \mathbb{R},\ f_5'(x) = \mathrm{e}^{-x^2} + (x+1) \times (-2x\mathrm{e}^{-x^2}) = (-2x^2 - 2x + 1)\mathrm{e}^{-x^2}$

• Le sujet comporte une erreur : f_6 n'est pas définie sur $\mathbb{R}$! !

0,5 point si l'étudiant donne $f_6'(x) = \dfrac{-2x+1}{-x^2+x-2}$, mais **1 point** si l'étudiant fait cette remarque pertinente !

Exercice 4 - 8 points

1. • **0,5 point** Le discriminant de $P(x) = 2x^2 - x - 6$ est $\Delta = 49$, $P(x)$ possède donc deux racines $x_1 = \dfrac{1-7}{4} = \dfrac{-3}{2}$ et $x_2 = \dfrac{1+7}{4} = 2$. Donc $\mathcal{S}_0 = \left\{ \dfrac{-3}{2} ; 2 \right\}$

   • **1,5 point** Le domaine de validité de (E_1) : $\ln(x-1) + \ln(2x) = \ln(6-x)$ vérifie :

$$
\left\{ \begin{array}{lcl} x-1 & > & 0 \\ 2x & > & 0 \\ 6-x & > & 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{lcl} x & > & 1 \\ x & > & 0 \\ x & < & 6 \end{array} \right. \iff x \in \mathcal{D}_1 =]1;6[
$$

   Alors, $(E_1) \iff \ln[(x-1)2x] = \ln(6-x) \iff 2x(x-1) = 6 - x$ et $x \in \mathcal{D}_1 \iff 2x^2 - 2x = 6 - x$ et $x \in \mathcal{D}_1 \iff 2x^2 - x - 6 = 0$ et $x \in \mathcal{D}_1$

D'après la résolution de (E_0), on en déduit $\mathcal{S}_1 = \{2\}$

• **1,5 point** Pour résoudre $(I_1)\ :\ 2e^{2x} - e^x - 6 > 0$, on pose $X = e^x$, (I_1) devient $(I_1')\ :\ 2X^2 - X - 6 > 0$
D'après la résolution de (E_0), on peut factoriser le polynôme $2X^2 - X - 6 = 2\left(X + \dfrac{3}{2}\right)(X-2)$, et donc $2e^{2x} - e^x - 3 = 2\left(e^x + \dfrac{3}{2}\right)(e^x - 2)$.
Pour tout réel x, $e^x + \dfrac{3}{2} > 0$, donc $2e^{2x} - e^x - 6$ est du signe de $e^x - 2$
Enfin, $e^x - 2 > 0 \Longleftrightarrow e^x > 2 \Longleftrightarrow x > \ln 2$
Donc $\mathcal{S}_1' =]\ln 2; +\infty[$

2. a) • **1 point** $(E_2)\ :\ 2e^{5x} = 9 \Longleftrightarrow \ln\left(2e^{5x}\right) = \ln 9 \Longleftrightarrow \ln 2 + 5x = \ln 9 = \ln 3^2 = 2\ln 3 \Longleftrightarrow x = \dfrac{2\ln 3 - \ln 2}{5} \approx \dfrac{2,2 - 0,7}{5} \approx 0,3$

   b) • **1,5 point** $(E_3)\ :\ 6^t = 4\times 9^t \Longleftrightarrow e^{t\ln 6} = 4\times e^{t\ln 9} \Longleftrightarrow t\ln 6 = \ln 4 + t\ln 9 \Longleftrightarrow t(\ln 6 - \ln 9) = \ln 4 \Longleftrightarrow t = \dfrac{\ln 4}{\ln 6 - \ln 9} = \dfrac{2\ln 2}{\ln 2 + \ln 3 - 2\ln 3} \approx \dfrac{1,4}{-0,4} \approx \dfrac{-7}{2}$

3. • **0,5 point** $(I_2)\ :\ |x - 3] > 5 \Longleftrightarrow x \in]-\infty; -2[\ \cup]8; +\infty[$

4. • **1,5 point** $(E_4)\ :\ x + 1 = |2x - 3| - 5$
   On résout (E_4) en deux étapes
   Si $x \geq \dfrac{3}{2}$, $2x - 3 \geq 0$ donc $|2x-3| = 2x - 3$
   et (E_4) devient $x + 1 = 2x - 3 - 5 \Longleftrightarrow x = 9 \geq \dfrac{3}{2}$
   Si $x \leq \dfrac{3}{2}$, $2x - 3 \leq 0$ donc $|2x-3| = -(2x-3)$
   et (E_4) devient $x + 1 = -(2x-3) - 5 \Longleftrightarrow x = -1 \leq \dfrac{3}{2}$
   Donc $\mathcal{S}_4 = \{-1; 9\}$