UNIVERSITÉ DE CERGY
U.F.R. Economie et Gestion

Licence d'Économie et Gestion
L1 - S1

PRATIQUE DES FONCTIONS NUMÉRIQUES

TEST 2 - Mardi 13 Novembre 2012 - 1h 30 min

Il sera tenu compte de l'orthographe et du soin apporté à la rédaction.
Le barème est donné à titre indicatif et est susceptible d'être modifié
CALCULATRICES INTERDITES
LES PORTABLES DOIVENT ÊTRE DÉBRANCHÉS ET RANGÉS.

Exercice 1 - 4 points

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \left|\frac{1}{2}x^2 - 2\right| + \frac{1}{2}x^2 - 2x - 1$$

Étudier le signe de $g(x) = \dfrac{1}{2}x^2 - 2$ afin d'exprimer $f(x)$ sans utiliser la valeur absolue.
Tracer la courbe de f dans le repère fourni en annexe au verso : vous devrez expliquer les étapes de la construction.

Exercice 2 - 5 points

Déterminer les fonctions dérivées des fonctions suivantes définies et dérivables sur D :

$f_1\ :\ f_1(x) = \dfrac{3x-1}{x^2+4}$ sur $D = \mathbb{R}$ $\qquad$ $f_2\ :\ f_2(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{3} - \dfrac{3}{x}$ sur $D = \mathbb{R}_+^*$

$f_3\ :\ f_3(x) = (-x^2+7)^3$ sur $D = \mathbb{R}$ $\qquad$ $f_4\ :\ f_4(x) = \dfrac{\ln x}{x}$ sur $D = \mathbb{R}_+^*$

$f_5\ :\ f_5(x) = (5x+2)\mathrm{e}^{-x}$ sur $D = \mathbb{R}$ $\qquad$ $f_6\ :\ f_6(x) = \ln(-x^2+3x-2)$ sur $D =]1;2[$

Exercice 3 - 4 points

On considère le polynôme $P(x) = 2x^2 + x - 10$

1. Résoudre l'équation $(E)\ :\ P(x) = 0$ puis l'inéquation $(I)\ :\ P(x) \leq 0$
2. En déduire la résolution de l'équation $(E_1)\ :\ 2e^{2x} + e^x - 10 = 0$
3. Factoriser $P(x)$ puis résoudre l'inéquation $(I_1)\ :\ 2e^{2x} + e^x - 10 \geq 0$

Exercice 4 - 3 points

Résoudre l'inéquation et l'équation suivantes :
1. $(I)\ :\ \ln(x+3) \geq \ln 2 + \ln(x-2)$ $\qquad$ 2. $(E)\ :\ 3^t = 36 \times 2^t$
On donnera une valeur approchée de la solution de (E) en prenant comme valeurs : $\ln 2 \approx 0,7$ et $\ln 3 \approx 1,1$

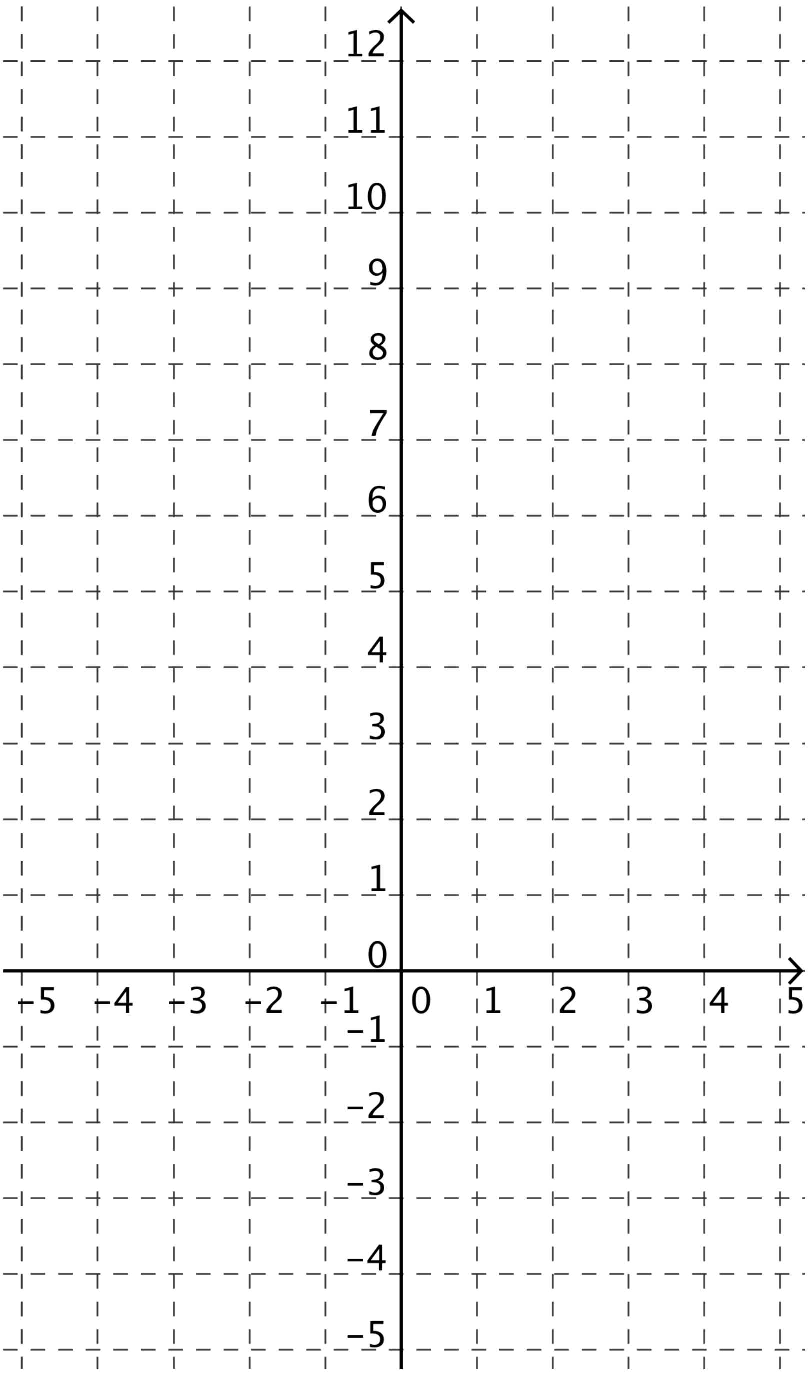
Exercice 5 - 4 points

On considère le polynôme $P(X) = X^3 + 3X^2 + X - 1$

1. Calculer $P(1)$ et $P(-1)$, en déduire que $P(X)$ se factorise par un polynôme $Q(X)$ **de degré 1** que vous préciserez.
2. Effectuer la division euclidienne de $P(X)$ par $Q(X)$.
3. Terminer la factorisation de $P(X)$ en un produit de polynômes de degré 1.

Annexe à l'exercice 1

NOM & Groupe de TD :



UNIVERSITÉ DE CERGY
U.F.R. Economie et Gestion

Licence d'Économie et Gestion
L1 - S1

PRATIQUE DES FONCTIONS NUMÉRIQUES

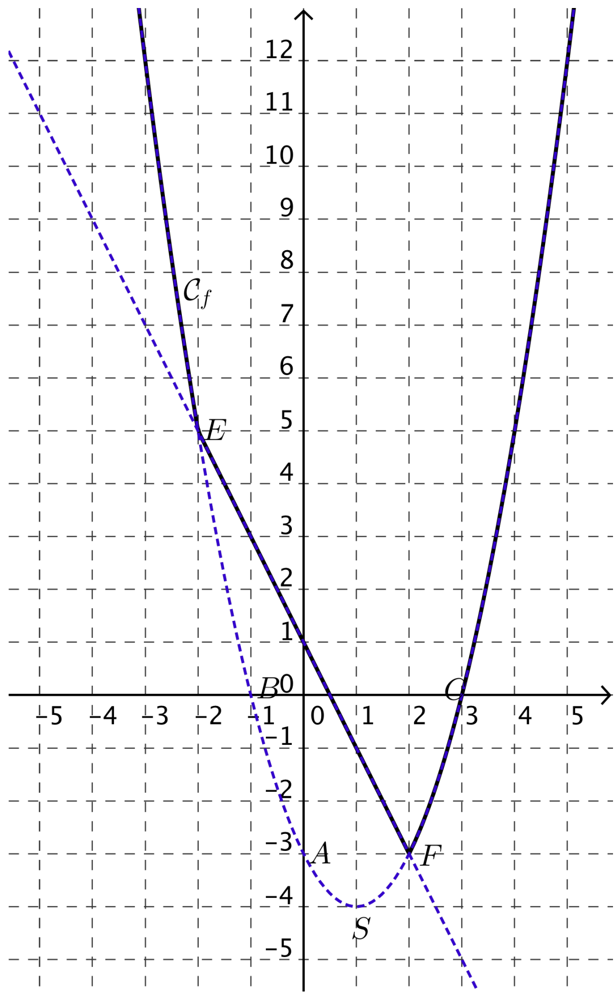
TEST 2 - Corrigé

Exercice 1 - 4 points

Étude du signe de $g(x) = 0,5x^2 - 2 = 0,5(x^2 - 4) = 0,5(x-2)(x+2)$:

• **1,5 point : 0,5 pt pour les racines de g, 0,5 pt pour le signe de $g(x)$, et 0,5 pt pour l'expression de $f(x)$**

x		-2		2	
signe de $0,5x^2-2$	$+$	0	$-$	0	$+$
Expression de $0,5x^2-2$	$0,5x^2-2$		$-0,5x^2+2$		$0,5x^2-2$
Expression de $f(x)$	x^2-2x-3		$-2x+1$		x^2-2x-3



• **1 point avec la courbe :** Ainsi, C_f est la parabole $\mathcal{P}$ d'équation $y = x^2 - 2x - 3$ sur $]-\infty; -2]$ et sur $[2; +\infty[$ et le segment de droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = -2x + 1$ sur $[-2; 2]$

• **1 point** Pour construire $\mathcal{P}$: c'est une parabole ouverte vers le haut, d'axe de symétrie d'équation $x = 1$, et de sommet $S(1; -4)$, et dont les intersections avec les axes sont :

• $A(0; -3)$ avec l'axe (Oy)

• On résout l'équation $x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = -1$ ou $x = 3$ pour connaître les deux points d'intersection avec l'axe (Ox) : $B(-1; 0)$ et $C(3; 0)$.

• **0,5 point** Pour construire $\mathcal{D}$: $\mathcal{D}$ passe par $E(-2; 5)$ et $F(2; -3)$: ce sont les deux potins d'intersection de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{P}$.

Exercice 2 - 5 points

• **1 point** $\forall x \in \mathbb{R},\ f_1'(x) = \dfrac{3(x^2+4) - 2x(3x-1)}{(x^2+4)^2} = \dfrac{-3x^2+2x+12}{(x^2+4)^2}$

• **1 point** $\forall x > 0,\ f_2'(x) = \dfrac{1}{6\sqrt{x}} + \dfrac{3}{x^2}$

• **0,5 point** $\forall x \in \mathbb{R},\ f_3'(x) = 3(-2x)(-x^2+7)^2 = -6x(-x^2+7)^2$

• **1 point** $\forall x > 0,\ f_4'(x) = \dfrac{1/x \times x - \ln x}{x^2} = \dfrac{1 - \ln x}{x^2}$

• **1 point** $\forall x \in \mathbb{R},\ f_5'(x) = 5\mathrm{e}^{-x} + (5x+2) \times (-\mathrm{e}^{-x}) = (-5x+3)\mathrm{e}^{-x}$

• **0,5 point** $\forall x \in]1; 2[,\ f_6'(x) = \dfrac{-2x+3}{-x^2+3x-2}$

Exercice 3 - 4 points

1. • **1,5 point : 1 pt pour (E) et 0,5 pt pour (I) :** Le discriminant Δ de $P(x) = 2x^2 + x - 10$ est $\Delta = 1 - 4 \times 2 \times (-10) = 81 = 9^2$, $P(x)$ possède donc deux racines réelles : $x_1 = \dfrac{-5}{2}$ et $x_2 = 2$.

   D'où $(E)\ :\ P(x) = 0 \Longleftrightarrow x = \dfrac{-5}{2}$ ou $x = 2$.

   et $(I)\ :\ P(x) \leq 0 \Longleftrightarrow x \in \left[\dfrac{-5}{2}; 2\right]$.

2. • **1 point** Pour résoudre $(E_1)\ :\ 2e^{2x} + e^x - 10 = 0$, on pose $X = e^x > 0$, et (E_1) devient $(E_1')\ :\ 2X^2 + X - 10 = 0 \Leftrightarrow X = \dfrac{-5}{2}$ ou $X = 2$: $X = \dfrac{-5}{2}$ ne donne pas de solution et $X = 2 \Leftrightarrow x = \ln 2$. (E_1) possède donc une unique solution : $x = \ln 2$

3. • **1,5 point** D'après le cours, $P(x) = 2\left(x - \dfrac{-5}{2}\right)(x-2) = 2\left(x + \dfrac{5}{2}\right)(x-2)$

   D'où $(I_1)\ :\ 2e^{2x} + e^x - 10 \geq 0 \Longleftrightarrow 2\left(e^x + \dfrac{5}{2}\right)(e^x - 2) \geq 0$

   Or pour tout réel x, $2\left(e^x + \dfrac{5}{2}\right) > 0$, et $e^x - 2 > 0 \Longleftrightarrow x \geq \ln 2$. D'où le tableau de signes :

x	$-\infty$		$\ln 2$		$+\infty$
Signe de $2\left(e^x+\dfrac{5}{2}\right)$		$+$		$+$	
Signe de e^x-2		$-$	0	$+$	
Signe de $2e^{2x}+e^x-10$		$-$	0	$+$	

Donc $\mathcal{S}=[\ln 2;+\infty[$

Exercice 4 - 3 points

1. • **1,5 point : 0,5 pt pour le domaine de validité, 0,5 pt pour l'expression $\ln A=\ln B$ et 0,5 pt pour la solution :** $(I)\ :\ \ln(x+3)\geq \ln 2+\ln(x-2)$ est définie en x si et seulement si $x>-3$ et $x>2$ donc (I) est définie sur $D_1=]2;+\infty[$

$$\begin{aligned}(I)\ &\Leftrightarrow\ \ln(x+3)\geq\ln\big(2(x-2)\big)\ \text{ et }\ x\in D_1\\ &\Leftrightarrow\ x+3\geq 2x-4\ \text{ et }\ x\in D_1\\ &\Leftrightarrow\ 7\geq x\ \text{ et }\ x\in D_1\end{aligned}$$

D'où $S=]2;7]$

2. • **1,5 point dont 0,5 pt pour la valeur approchée de la solution**

$$(E)\ :\ 3^t=36\times 2^t \iff \left(\frac{3}{2}\right)^t=36 \iff t\ln\left(\frac{3}{2}\right)=\ln 36 \iff t=\frac{\ln 36}{\ln(3/2)}$$

Enfin, $\dfrac{\ln 36}{\ln(3/2)}=\dfrac{\ln 9+\ln 4}{\ln 3-\ln 2}=\dfrac{2\ln 3+2\ln 2}{\ln 3-\ln 2}\approx\dfrac{3,6}{0,4}$. D'où $t\approx 9$

Exercice 5 - 4 points

$P(X)=X^3+3X^2+X-1$

1. • **1 point** $P(1)=4$ et $P(-1)=0$, donc $P(X)$ se factorise par le polynôme $Q(X)=X+1$.

2. • **1 point**

$$\begin{array}{rrrr|l}
X^3 & +3X^2 & +X & -1 & X \quad +1\\ \cline{5-5}
-(X^3 & +X^2) & & & X^2\ +2X\ -1\\ \cline{1-2}
 & 2X^2 & +X & & \\
 & -(2X^2 & +2X & & \\ \cline{2-3}
 & & -X & -1 & \\
 & & -(-X & -1) & \\ \cline{3-4}
 & & & 0 &
\end{array}$$

• **0,5 point** Conclusion : $P(X)=(X+1)(X^2+2X-1)$

3. • **1 point** Posons $P_1(X)=X^2+2X-1$. Le discriminant de $P_1(X)$ est $\Delta=22-4(-1)=8=\left(2\sqrt{2}\right)^2$

$P_1(X)$ possède deux racines distinctes $X_1=\dfrac{-2-2\sqrt{2}}{2}=-1-\sqrt{2}$ et $X_2=-1+\sqrt{2}$

• **0,5 point** D'où $P_1(X)=(X-(-1-\sqrt{2}))(X-(-1+\sqrt{2}))=(X+1+\sqrt{2})(X+1-\sqrt{2})$ et $P(X)=(X+1)(X+1+\sqrt{2})(X+1-\sqrt{2})$