UNIVERSITÉ DE CERGY

NOM :

U.F.R. Economie et Gestion
Licence d'Économie et Gestion - L1 - S1

GROUPE TD N°

PRATIQUE DES FONCTIONS NUMÉRIQUES

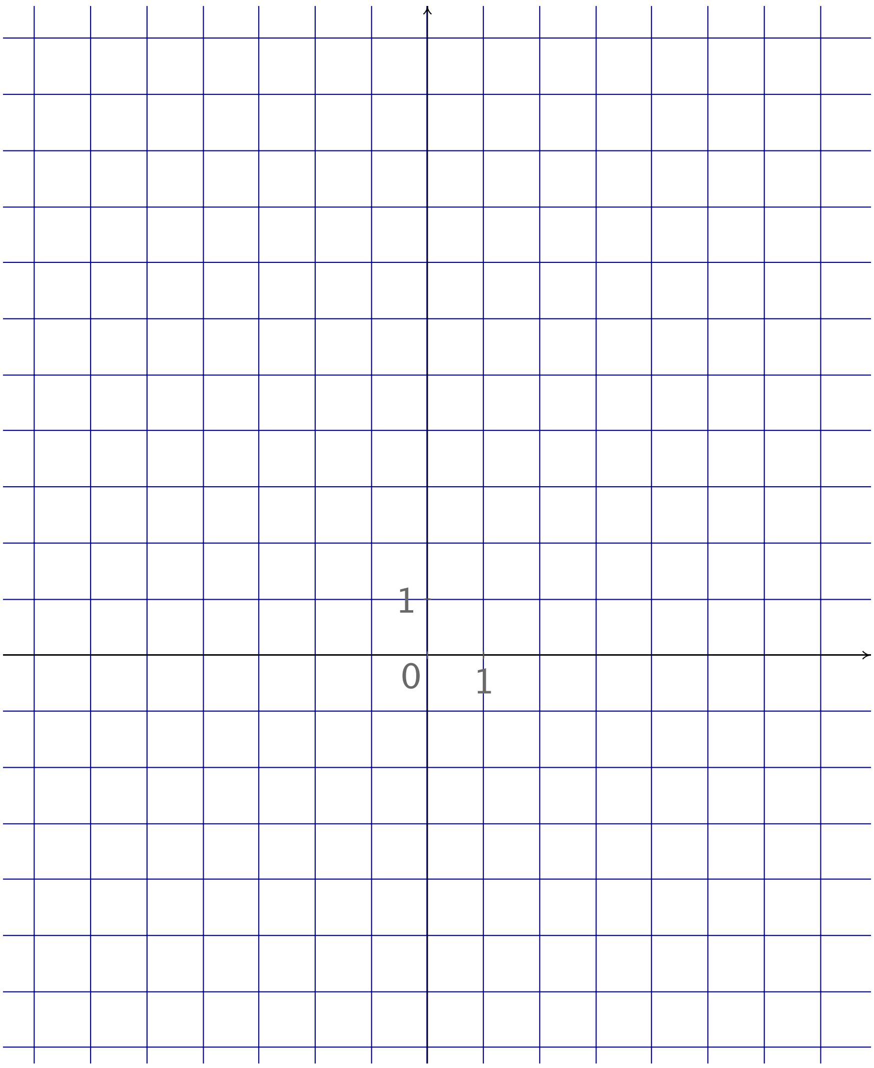
TEST 2 - Mardi 8 novembre 2011 - 1h 30 min

Le barème est indicatif
Il sera tenu compte du soin apporté à la rédaction.
CALCULATRICES INTERDITES
LES PORTABLES DOIVENT ÊTRE DÉBRANCHÉS ET RANGÉS.

Exercice 1 - 4 points

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = |x^2 - x - 6| + x$

Exprimer $f(x)$ sans utiliser la valeur absolue puis tracer $\mathcal{C}_f$ sur l'intervalle $[-4; 4]$ dans le repère ci-dessous : vous expliquerez les étapes de la construction.



Exercice 2 - 4 points

On considère le polynôme $P(X) = 2X^4 + 5X^3 - 6X^2 - 11X + 10$

1. Justifier que 1 et -2 sont deux racines de $P(X)$. En déduire que $P(X)$ est divisible par un polynôme $Q(X)$ de degré 2 que l'on déterminera.
2. Effectuer la division euclidienne de $P(X)$ par le polynôme $X^2 + X - 2$.
3. Terminer la factorisation de $P(X)$ en un produit de facteurs de degrés 1.

Exercice 3 - 7 points

Soit $P(x) = 2x^2 + 5x - 3$

1. Résoudre l'équation $(E) : P(x) = 0$, puis l'inéquation $(I) : P(x) > 0$.
2. En déduire la résolution de l'équation $(E_1) : 2e^{2x} + 5e^x - 3 = 0$ et de l'équation $(E_2) : 2(\ln x)^2 + 5\ln x - 3 = 0$.
3. Résoudre l'équation $(E_3)\ :\ \ln(2x+3) + \ln(x+1) = \ln 6$.
4. Étudier le signe de $u(x) = e^x + 3$ puis de $v(x) = 2e^x - 1$. En déduire la résolution de l'inéquation $(I_1)\ :\ 2e^{2x} + 5e^x - 3 > 0$

Exercice 4 - 2,5 points

Pour un bibelot, une étude statistique montre que la demande y (en milliers d'unités) en fonction du prix unitaire x (en euros) suit la relation : $\ln y = -0,5\ln x + 3$.

1. Démontrer que $y = \dfrac{e^3}{\sqrt{x}}$.
2. En déduire le prix unitaire que l'on doit fixer pour obtenir une demande de 10000 unités. (on prendra $e^3 \approx 20$)

Exercice 5 - 2,5 points

Une entreprise possède deux unités de productions pour lesquelles on a modélisé la production en fonction de l'année t :

Pour l'unité de production $N°1$: $f(t) = 4 \times 1,8^t$

Pour l'unité de production $N°2$: $g(t) = 24 \times 1,2^t$

où $f(t)$ et $g(t)$ sont exprimés en millions de tonnes et t en rang d'année à partir de $t = 1$ pour l'année 2009, ($t \in \{1, \cdot 10\}$).

1. Calculer la production des deux unités de production pour l'année $t = 1$.
2. A partir de quelle année l'unité de production $N°1$ aura-t-elle une production supérieure à l'unité de production $N°2$? (On donne $\ln 2 \approx 0,7$ et $\ln 3 \approx 1,1$).

UNIVERSITÉ DE CERGY — **Licence d'Économie et Gestion**
U.F.R. Economie et Gestion — **L1 - S1**

PRATIQUE DES FONCTIONS NUMÉRIQUES

TEST 2 - Corrigé

Exercice 1 - 4 points

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = |x^2 - x - 6| + x$

On étudie tout d'abord le signe de $P(x) = x^2 - x - 6$. Le discriminant de $P(x)$ est $\Delta = 25$ donc $P(x)$ possède deux racines réelles distinctes $x_1 = -2$ et $x_2 = 3$

On a donc le tableau de signe suivant pour $P(x)$ et aussi l'expression de $f(x)$

x		-2		3	
Signe de $P(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
Expression de $P(x)$	$x^2 - x - 6$		$-x^2 + x + 6$		$x^2 - x - 6$
Expression de $f(x)$	$x^2 - 6$		$-x^2 + 2x + 6$		$x^2 - 6$

On trace la parabole $\mathcal{P}_1$ d'équation $y = x^2 - 6$ (parabole de somme $S_1(0;-6)$ et d'axe de symétrie d'équation $x = 0$) : on ne conserve que les branches correspondantes aux abscisses de $]-\infty;-2]$ et $[3;+\infty[$

On trace la parabole $\mathcal{P}_2$ d'équation $y = -x^2 + 2x + 6$ (parabole de somme $S_2(1;7)$ et d'axe de symétrie d'équation $x = 1$) : on ne conserve que la branche correspondante aux abscisses de $[-2;3]$)

Exercice 2 - 4 points

1. Soit $P(X) = 2X^4 + 5X^3 - 6X^2 - 11X + 10$, on vérifie que $P(1) = P(-2) = 0$ donc $P(X)$ est factorisable par $(X-1)$ et $(X+2)$ donc par leur produit : $Q(X) = (X-1)(X+2) = X^2 + X - 2$.

2. Division euclidienne de $P(X)$ par le polynôme $Q(X)$.

$$\begin{array}{rrrrr|l}
2X^4 & +5X^3 & -6X^2 & -11X & +10 & X^2 \quad +X \quad -2 \\
\cline{6-6}
-(2X^4 & +2X^3 & -4X^2) & & & 2X^2 \quad +3X \quad -5 \\
\cline{1-3}
 & 3X^3 & -2X^2 & -11X & & \\
 & -(3X^3 & +3X^2 & -6X) & & \\
\cline{2-4}
 & & -5X^2 & -5X & +10 & \\
 & & -(-5X^2 & -5X & +10) & \\
\cline{3-5}
 & & & & 0 &
\end{array}$$

Conclusion : $P(X) = (X^2 + X - 2)(2X^3 + 3X - 5)$

3. On factorise $R(X) = 2X^3 + 3X - 5$. Son discriminant est $\Delta = 49$, donc $R(X)$ possède deux racines : $X_1 = 1$ et $X_2 = -\dfrac{5}{2}$ et $R(X) = 2(X-1)(X + \dfrac{5}{2}) = (X-1)(2X+5)$

Donc $P(X) = (X-1)^2(X+2)(2X+5)$

Exercice 3 - 7 points

Soit $P(x) = 2x^2 + 5x - 3$

1. Le discriminant de $P(x)$ est $\Delta = 25 - 4 \times 2 \times (-3) = 49 = 7^2$ donc (E) possède deux solutions réelles $x_1 = -3$ et $x_2 = \dfrac{1}{2}$. Enfin (I) : $P(x) > 0 \Longleftrightarrow x \in \left]-\infty, -3\right[\cup \left]\dfrac{1}{2}, +\infty\right[$
2. Pour résoudre (E_1) : $2e^{2x} + 5e^x - 3 = 0$, on pose $X = e^x$ puis on résout $2X^2 + 5X - 3 = 0$ soit $X = -3$ ou $X = \dfrac{1}{2}$: on a donc $e^x = -3$ ce qui est impossible et
   $e^x = \dfrac{1}{2} \Longleftrightarrow x = \ln\left(\dfrac{1}{2}\right) = -\ln 2$. Donc $\mathcal{S}_1 = \{-\ln 2\}$.
   (E_2) : $2(\ln x)^2 + 5\ln x - 3 = 0$ est définie sur $\mathbb{R}^{+*}$: pour $x > 0$, on pose $X = \ln x$ puis on résout $2X^2 + 5X - 3 = 0$ soit $X = -3$ ou $X = \dfrac{1}{2}$: on a donc $\ln x = -3 \Longleftrightarrow x = e^{-3}$ et $\ln x = \dfrac{1}{2} \Longleftrightarrow x = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$. Donc $\mathcal{S}_2 = \left\{e^{-3}; \sqrt{e}\right\}$.
3. L'équation (E_3) : $\ln(2x+3) + \ln(x+1) = \ln 6$ est définie si et seulement si $2x + 3 > 0$ et $x + 1 > 0$, soit $x > \dfrac{-3}{2}$ et $x > -1$, donc $\mathcal{D} =]-1, +\infty[$
   $(E_3) \Longleftrightarrow \ln\left((2x+3)(x+1)\right) = \ln 6$ et $x \in \mathcal{D} \Longleftrightarrow 2x^2 + 5 + 3 = 6$ et $x \in \mathcal{D}$
   $(E_3) \Longleftrightarrow 2x^2 + 5 - 3 = 0$ et $x \in \mathcal{D}$
   Donc $\mathcal{S}_3 = \left\{\dfrac{1}{2}\right\}$.
4. $\forall x \in \mathbb{R}, u(x) = e^x + 3 > 3 > 0$, de plus $2e^x - 1 > 0 \Longleftrightarrow e^x > \dfrac{1}{2} \Longleftrightarrow x > -\ln 2$,
   (I_1) : $2e^{2x}+5e^x-3 > 0 \Longleftrightarrow (e^x - 3)\left(e^x + \dfrac{1}{2}\right) > 0 \Longleftrightarrow x > -\ln 2$ donc $\mathcal{S}' =]-\ln 2, +\infty[$.

Exercice 4 - 2,5 points

1. On a $\ln y = -0,5\ln x + 3 \Longleftrightarrow y = e^{-0,5\ln x + 3} \Longleftrightarrow y = e^3 \times e^{\ln x^{-0,5}} \Longleftrightarrow y = \dfrac{e^3}{\sqrt{x}}$
2. $y = \dfrac{e^3}{\sqrt{x}} \Longleftrightarrow x = \left(\dfrac{e^3}{y}\right)^2$
   On a : $x = \left(\dfrac{e^3}{10}\right)^2 \approx 2^2$. On devra fixer le prix de vente à 4 euros pour réaliser une vente de 10000 bibelots.

Exercice 5 - 2,5 points

1) En 2009, pour $t = 1$:
Pour l'unité de production 1 : $f(t) = 4 \times 1,8 = 7,2$ millions de tonnes.
Pour l'unité de production 2 : $g(t) = 24 \times 1,2 = 28,8$ millions de tonnes.
2) On résout $f(t) > g(t) \Longleftrightarrow 4 \cdot 1,8^t > 24 \cdot 1,2^t \Longleftrightarrow \left(\dfrac{1,8}{1,2}\right)^t > 6 \Longleftrightarrow \left(\dfrac{3}{2}\right)^t > 6$

$\Longleftrightarrow t\ln\left(\dfrac{3}{2}\right) > \ln 6 \Longleftrightarrow t > \dfrac{\ln 6}{\ln \frac{3}{2}} = \dfrac{\ln 3 + \ln 2}{\ln 3 - \ln 2} \approx \dfrac{1,8}{0,4}$ soit $t > 4,5$.

L'unité de production $N°1$ aura une production supérieure à l'unité $N°2$ dès la $5^{\text{ième}}$ année, soit en 2013.

Figure de l'exercice 1