UNIVERSITÉ DE CERGY — **Licence d'Économie finance et Gestion**
U.F.R. Economie et Gestion — **L1 - S1**

PRATIQUE DES FONCTIONS NUMÉRIQUES

TEST 1 - Octobre 2014 - 1h 30 min

CALCULATRICES INTERDITES
LES PORTABLES DOIVENT ÊTRE DÉBRANCHÉS ET RANGÉS.

Exercice 1 - 4 points

Un imprimeur propose le tarif suivant pour les étudiants qui désirent photocopier leurs travaux.
• Les 500 premières photocopies sont au tarif de $0,05$ € par photocopie.
• Les 500 photocopies suivantes sont au tarif de $0,04$ € par photocopie.
• Enfin chaque photocopie supplémentaire à partir de la $1001^{\text{ième}}$ coûte $0,025$ € .

Soient x le nombre de photocopies à réaliser, et $f(x)$ le prix à payer pour x photocopies.

1. Calculer $f(x)$ pour $x = 200$, $x = 800$ et $x = 2000$.
2. Exprimer $f(x)$ en fonction de x, $x \geq 0$.
3. Tracer la courbe représentative de f dans le repère joint en annexe 1. Vous donnerez des points dont les abscisses sont des multiples de 100, afin de représenter $\mathcal{C}_f$.

Exercice 2 - 6 points

On considère les deux fonctions f et g définies respectivement par $f(x) = \dfrac{4}{x-1}$
et $g(x) = x^2 - 6x + 6$. La courbe de f est représentée sur la figure en annexe 2.

1. Déterminer les domaines de définition respectifs de f et de g.
2. Donner les éléments caractéristiques de la courbe représentative $\mathcal{P}_g$ de g (nature, sommet, axe de symétrie, points d'intersection avec les axes). Représenter $\mathcal{P}_g$ sur la figure en annexe 2. (On pourra prendre $\sqrt{3} \approx 1,7$)
3. Justifier que l'équation (E) : $f(x) = g(x)$ est équivalente à (E') : $\dfrac{(5-x)(x^2-2x+2)}{x-1} = 0$
4. Résoudre algébriquement cette équation (E').
5. Résoudre algébriquement l'inéquation (I) : $f(x) \geq g(x)$.

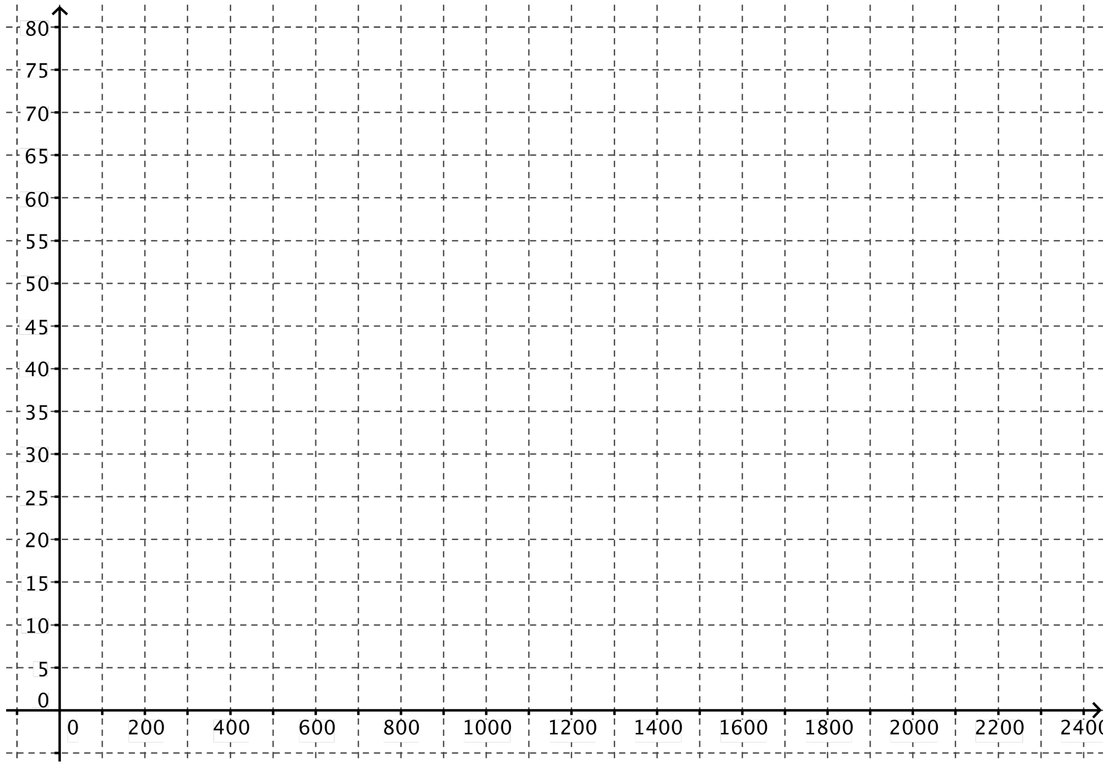
Exercice 3 - Q.C.M - 10 points

Ce Q.C.M. comporte 10 questions. Pour chacune d'entre elles, une seule proposition est juste : cocher **sur la grille de réponses de la couleur de votre énoncé** la case correspondante à l'aide d'un feutre ou d'un stylo noir. A chaque question, correspondent deux lignes de réponses : la seconde ne sera utilisée qu'en cas de « repentir », c-a-d lorsque vous pensez que votre première réponse est fausse, vous pouvez utiliser la seconde ligne pour corriger votre première réponse.

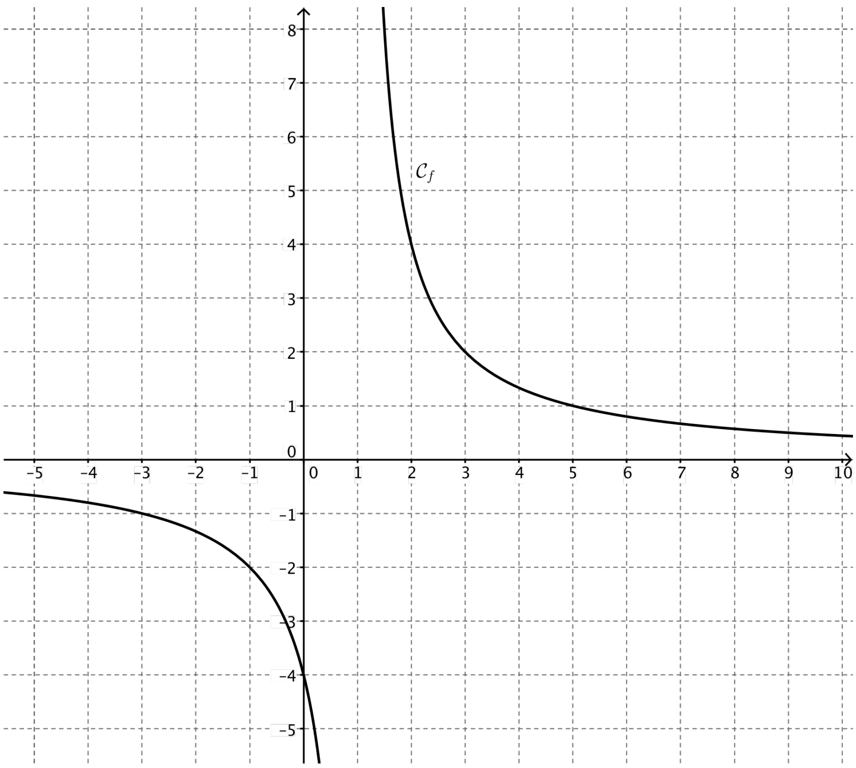
Attention au barème : 1 point par réponse juste, mais $-0,5$ par réponse fausse. L'absence de réponse, ou lorsque toutes les cases d'une question sont cochées est notée 0. En cas de total négatif, la note finale est ramenée à 0/10.

NOM - Numéro d'étudiant - groupe de TD

ANNEXE à L'EXERCICE 1 : à rendre avec votre copie



ANNEXE à L'EXERCICE 2 : à rendre avec votre copie



SUJET BLANC

Question 1

La fonction f définie par $f(x) = -x^2 + 5x$

A. est impaire

B. est paire

C. n'est ni paire ni impaire

Question 2

L'intervalle fermé I centré en -3 et de diamètre 8 est :

A. $I = \Big[-7; 1\Big]$

B. $I = \Big[-1; 7\Big]$

C. $I = \Big[-11; 5\Big]$

D. $I = \Big[-5; 11\Big]$

Question 3

La fonction f définie par $f(x) = \dfrac{x+1}{\sqrt{5-x}}$ a pour ensemble de définition :

A. $\mathcal{D}_f =]5, +\infty[$

B. $\mathcal{D}_f =]-\infty; 5[$

C. $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{5\}$

D. $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{\,-1; 5\}$

Question 4

La somme $\displaystyle\sum_{i=0}^{4} i^2 - i + 1$ est égale à :

A. 22

B. 23

C. 24

D. 25

Question 5

On considère la fonction affine f définie par : $f(x) = \dfrac{x+1}{3}$. La droite représentative de f passe par les points M_1 et M_2 de coordonnées :

A. $M_1(-1; 0)$ et $M_2(0; 1)$

B. $M_1(5; 2)$ et $M_2(3; 1)$

C. $M_1(2; 1)$ et $M_2(-1; 0)$

D. $M_1(-4; -1)$ et $M_2(1; 3)$

Question 6

Soit f la fonction affine vérifiant $f(-1) = -10$ et $f(1) = 50$, alors l'expression de $f(x)$ est :

A. $f(x) = -30x - 40$

B. $f(x) = 30x + 20$

C. $f(x) = 40x + 30$

D. $f(x) = -40x - 50$

Question 7

On considère les deux fonctions f et g définies par $f(x) = 2x + 1$ et $g(x) = x^2 - 2x + 2$. Alors la composée $g \circ f$ est définie par :

A. $g \circ f(x) = 2x^2 - 4x + 5$

B. $g \circ f(x) = 4x^2 + 4x + 1$

C. $g \circ f(x) = 4x^2 - 4x + 1$

D. $g \circ f(x) = 4x^2 + 1$

Question 8

Les solutions de l'inéquation (I) : $\dfrac{x+1}{x} \leq 0$ sont :

A. $]-\infty; -1] \cup]0; +\infty[$

B. $]-\infty; 0[\cup [1; +\infty[$

C. $[-1; 0[$

D. $]0; 1[$

Question 9

Soit f une fonction strictement croissante sur $[-5; 4]$. Alors :

A. $f(-3) \geq f(5)$

B. $f(0) \leq f(1)$

C. Pour tout réel $x \in [-5; 4]$, $f(x) \leq 0$

D. Pour tout réel $x \in [-4; 2]$, $f(x) \leq f(-4)$

Question 10

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = |x| + x$.

A. f est croissante sur $\mathbb{R}$

B. f est décroissante sur $\mathbb{R}$

C. f est constante sur $\mathbb{R}$

D. f n'est pas monotone sur $\mathbb{R}$

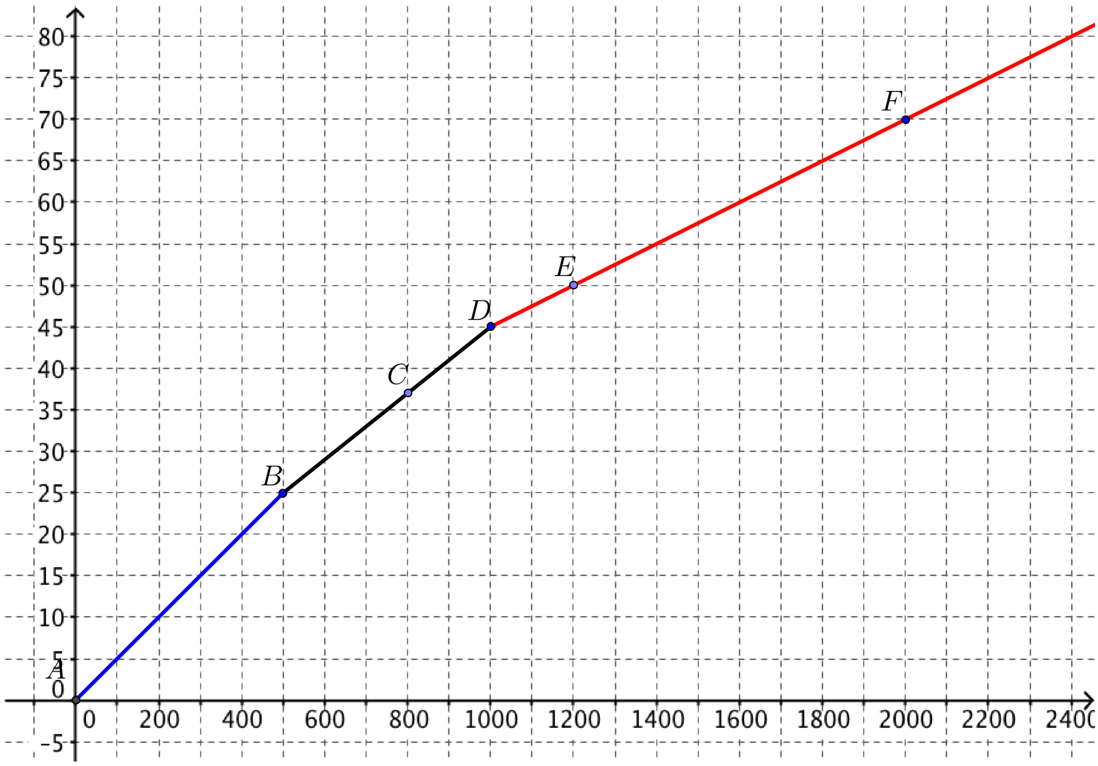
UNIVERSITÉ DE CERGY **Licence d'Économie, finance et Gestion**
U.F.R. Economie et Gestion **L1 - S1**

PRATIQUE DES FONCTIONS NUMÉRIQUES

TEST 1 - Corrigé

Exercice 1 - 4 points

1. • **1 point (= 2 * 0,25 pt + 0,5)** $f(200) = 200 \times 0,05 = 10$ € .
   $f(800) = 500 \times 0,05 + 300 \times 0,04 = 25 + 12 = 37$ € .
   $f(2000) = 500 \times 0,05 + 500 \times 0,04 + 1000 \times 0,025 = 25 + 20 + 25 = 70$ €.
2. • **1,5 point (= 0,5 pt par morceau)** La fonction f est affine par morceaux :
   $$f(x) = \begin{cases} 0,05x & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 500 \\ 25 + 0,04(x - 500) & \text{si} \quad 501 \leq x \leq 1000 \\ 45 + 0,025(x - 1000) & \text{si} \quad x \geq 1001 \end{cases}$$
   $$\iff f(x) = \begin{cases} 0,05x & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 500 \\ 0,04x + 5 & \text{si} \quad 501 \leq x \leq 1000 \\ 0,025x + 20 & \text{si} \quad x \geq 1001 \end{cases}$$
3. • **1,5 point (= 0,5 pt par "portion" de la courbe : explication & tracé)**
   Pour la première partie de la courbe : on peut utiliser $A(0;0)$ et $B(500;25)$
   Pour la seconde partie : $C(800;37)$ et $D(1000;45)$
   Enfin, pour la troisième partie, $E(1200;50)$ et $F(2000;70)$ (voir courbe ci-dessous)



Exercice 2 - 6 points

1. **• 0,5 point (= 2 * 0,25 pt)** $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ et $\mathcal{D}_g = \mathbb{R}$
2. **• 2 points (1,5 point)** $\mathcal{P}_g$ est une parabole ouverte vers le haut **(0,25 pt)**, d'axe de symétrie la droite d'équation $x = 3$ **(0,25 pt)** et de somme $S(3; -3)$ **(0,25 pt)**. En résolvant l'équation $x^2 - 6x + 6 = 0$, on justifie que $\mathcal{P}_f$ possède deux points d'intersection avec l'axe (Ox) : $A(3 - \sqrt{3}; 0)$ et $B(3 + \sqrt{3}; 0)$ **(0,5 pt)**, Enfin $\mathcal{P}_f$ et (Oy) se coupent en $C(0; 6)$ **(0,25 pt)**
   Tracé de $\mathcal{P}_g$: 0,5 point
3. **• 1 point**
$$\begin{aligned} f(x) = g(x) &\iff \frac{4}{x-1} = x^2 - 6x - 6 \\ &\iff \frac{4 - (x-1)(x^2 - 6x + 6)}{x-1} = 0 \\ &\iff \frac{4 - (x^3 - 6x^2 + 6x - (x^2 - 6x + 6))}{x-1} = 0 \\ &\iff \frac{-x^3 + 7x^2 - 12x + 10}{x-1} = 0 \quad \textbf{(0,5 pt)} \end{aligned}$$
   Enfin, on développe $(5 - x)(x^2 - 2x + 2) = 5x^2 - 10x + 10 - x^3 + 2x^2 - 2x = -x^3 + 7x^2 - 12x + 10$ afin de conclure **(0,5 pt)**.
4. **• 1 point**
   $f(x) = g(x) \iff \dfrac{(5-x)(x^2 - 2x + 2)}{x-1} = 0 \iff (5-x)(x^2 - 2x + 2) = 0$ et $x \neq 1$
   $\iff 5 - x = 0$ ou $x^2 - 2x + 2 = 0$ **(0,5 pt)**
   Le discriminant de $P(x) = x^2 - 2x + 2$ est égal à $-4 < 0$: $P(x)$ n'a pas de racine **(0,25 pt)**
   Conclusion : $f(x) = g(x) \iff x = 5$ donc $\mathcal{S} = \{5\}$ **(0,25 pt)**
5. **• 1,5 point** $f(x) \geq g(x) \iff f(x) - g(x) \geq 0 \iff \dfrac{(5-x)(x^2 - 2x + 2)}{x-1} \geq 0.$
   On utilise un tableau de signes : **(0,25 pt par ligne du tableau et 0,5 pour la conclusion)**

x	$-\infty$		1		5		$+\infty$
$5 - x$		$+$		$+$	0	$-$	
$x^2 - 2x + 2$		$+$		$+$		$+$	
$x - 1$		$-$	0	$+$		$+$	
$fraction$		$-$	$\|\|$	$+$	0	$-$	

   Conclusion, $\mathcal{S}_I =]1; 5]$: on vérifie sur le graphique que $\mathcal{C}_f$ est au dessus de $\mathcal{P}_g$ sur cet intervalle.

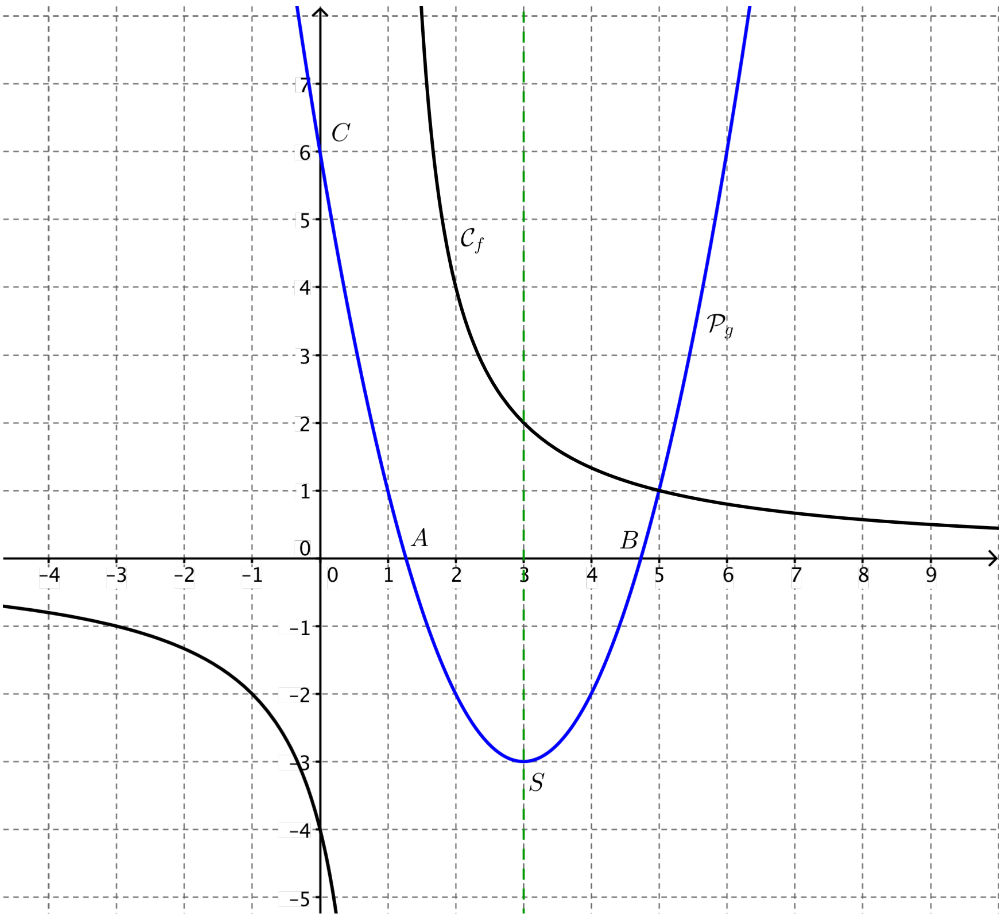
Exercice 3 - Q.C.M - 10 points

SUJET BLANC : 1 C / 2 A / 3 B / 4 D / 5 C / 6 B / 7 D / 8 C / 9 B / 10 A

SUJET JAUNE : 1 C / 2 C / 3 A / 4 B / 5 A / 6 D / 7 B / 8 A / 9 A / 10 B

SUJET ROSE : 1 C / 2 B / 3 B / 4 D / 5 A / 6 C / 7 C / 8 D / 9 B / 10 B

SUJET VERT : 1 C / 2 D / 3 C / 4 B / 5 D / 6 A / 7 B / 8 B / 9 A / 10 A



C
$\mathcal{C}_f$
$\mathcal{P}_g$
A
B
S
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
7
6
5
4
3
2
1
0
−1
−2
−3
−4
−5