Maths gestion CC novembre 2016 corrigé

Ex. 1.

$$\begin{cases} \Delta V = +10 \\ \Delta M = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} -2a + 0{,}5b = 10 \\ a - b = 0 \end{cases}$$

1,5 pts

$$\begin{cases} -2b + 0{,}5b = 10 \\ a = b \end{cases} \qquad \begin{cases} -1{,}5b = 10 \\ a = b \end{cases} \qquad \begin{cases} b = -\frac{10}{1{,}5} \simeq -6{,}67 \\ a = b = -\frac{10}{1{,}5} \simeq -6{,}67 \end{cases}$$

1,5 pts

La stratégie consiste à baisser le prix de 6,67 euros, en le portant à $40 - 6{,}67 = 33{,}33$ euros ;

et à baisser la qualité de 6,67 points dans l'échelle, en la portant à $15 - 6{,}67 = 8{,}33$ points.

1 pt

Tot. 4 pts

Ex. 3

$$\begin{cases} 2x + 3y + z = 0 \\ x - y = 0 \\ x + 4y + z = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x - y = 0 \\ 2x + 3y + z = 0 \\ x + 4y + z = 0 \end{cases} \quad L_2 \downarrow L_1$$

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ 5y + z = 0 \\ 5y + z = 0 \end{cases} \qquad \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{matrix}$$

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ 5y + z = 0 \end{cases}$$

libre

pivot

infinité de solutions

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ 5y + z = 0 \end{cases}$$

libre

pivot

infinité de solutions

2 pts

$$\begin{cases} x = y = -\frac{1}{5} z \\ y = -\frac{1}{5} z \end{cases}$$

1 pt

$$\mathcal{S} = \left\{ \left(-\frac{1}{5} z, -\frac{1}{5} z, z \right), z \in \mathbb{R} \right\}$$

2. $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ qui est de rang 2, car on a montré en 1) que le système a 2 pivots. 1 pt

3. $\mathrm{rk}\, A = 2 < 3$ donc A n'est pas inversible. 1 pt

Ex. 2.

$$S_0 = \begin{array}{c} \\ M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ M_4 \\ M_5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} f & g & b & m \end{array} \\ \begin{pmatrix} 10 & 15 & 9 & 12 \\ 20 & 14 & 8 & 5 \\ 16 & 8 & 15 & 6 \\ 25 & 15 & 7 & 16 \\ 5 & 12 & 20 & 18 \end{pmatrix} \end{array}$$

1 pt

$$S_1 = S_0 + D = \begin{pmatrix} 14 & 18 & 14 & 14 \\ 20 & 23 & 14 & 6 \\ 21 & 15 & 17 & 12 \\ 37 & 17 & 11 & 24 \\ 14 & 18 & 23 & 23 \end{pmatrix}$$

1 pt

c) $S_2 = S_1 - E = \begin{pmatrix} 14 & 18 & 14 & 14 \\ 20 & 23 & 14 & 6 \\ 21 & 15 & 17 & 12 \\ 37 & 17 & 11 & 24 \\ 14 & 18 & 23 & 13 \end{pmatrix} - E = \begin{pmatrix} 6 & 6 & 8 & 5 \\ 10 & 12 & 6 & 3 \\ 6 & 9 & 8 & 5 \\ 16 & 3 & 6 & 6 \\ 8 & 7 & 10 & 14 \end{pmatrix}$

1 pt

d) $P = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 60 \\ 40 \\ 25 \\ 90 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} f \\ g \\ b \\ m \end{array}$

$V = S_2 P = \begin{pmatrix} 6 & 6 & 8 & 5 \\ 10 & 12 & 6 & 3 \\ 6 & 9 & 8 & 5 \\ 16 & 3 & 6 & 6 \\ 8 & 7 & 10 & 14 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 60 \\ 40 \\ 25 \\ 90 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1250 \\ 1500 \\ 1370 \\ 1770 \\ 2270 \end{pmatrix}$

1 pt

(val. totale 8160)

e) les prix deviennent

$60 \xrightarrow{-20\%} 60 \times 0{,}8 = 48$

$40 \xrightarrow{-10\%} 40 \times 0{,}9 = 36$

$25 \xrightarrow{-10\%} 25 \times 0{,}9 = 22{,}5$

$90 \xrightarrow{-15\%} 90 \times 0{,}85 = 76{,}5$

$P_1 = \begin{pmatrix} 48 \\ 36 \\ 22{,}5 \\ 76{,}5 \end{pmatrix}$

$V_1 = S_2 P_1 = \begin{pmatrix} 1066{,}5 \\ 1276{,}5 \\ 1174{,}5 \\ 1470 \\ 1932 \end{pmatrix}$

1 pt

(val. tot. 6 919,5)

Ex. 4.

	S_1	S_2	X	B
S_1	2	4	10	4
S_2	5	6	20	9
X	10	20		
V	3	10		

a) Prod. tot : $X = (10, 20)$

Val. ajoutée : $V = (3, 10)$

1,5 pts

b) Pour la matrice des coeff. techniques, $c_{ij} = \dfrac{a_{ij}}{x_j}$

on trouve $A = \begin{pmatrix} \frac{2}{10} & \frac{4}{20} \\ \frac{5}{10} & \frac{6}{20} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,2 \\ 0,5 & 0,3 \end{pmatrix}$

1 pt

c) la production totale devient :

$$X = \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 19 \end{pmatrix}$$

donc la quantité disponible pour la demande finale est

$$B = X - AX = \begin{pmatrix} 12 \\ 19 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0,2 & 0,2 \\ 0,5 & 0,3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 12 \\ 19 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 19 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6,2 \\ 11,7 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 5,8 \\ 7,3 \end{pmatrix}$$

1,5 pts

d) si la demande finale devient $B = \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix}$

alors il faut une production totale X t.q.

$$X = AX + B \iff (I-A)X = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix} \iff X = (I-A)^{-1}\begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Or, $I-A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}2 \\ 0{,}5 & 0{,}3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}8 & -0{,}2 \\ -0{,}5 & 0{,}7 \end{pmatrix}$

$$(I-A)^{-1} = \frac{1}{0{,}46}\begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}2 \\ 0{,}5 & 0{,}8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}52 & 0{,}43 \\ 1{,}09 & 1{,}74 \end{pmatrix}$$

et $(I-A)^{-1} = \begin{pmatrix} 1{,}52 & 0{,}43 \\ 1{,}09 & 1{,}74 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12{,}609 \\ 20{,}434 \end{pmatrix}$.

2 pts

<u>Ex. 5.</u>

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ L_3 \\ \updownarrow L_2 \end{array}$$

la matrice a rang 3.

1 pt

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

A est inversible car $\operatorname{rk} A = 3$.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 + 2L_3 \\ \ \end{array}$$

2,5 pts

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \leftarrow -L_1 \\ \ \\ L_3 \leftarrow -L_3 \end{array}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

3. le premier système :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}}_{B}$$

donc $X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ $\left\{\begin{array}{l} x = 1 \\ y = 4 \\ z = -2 \end{array}\right.$

le deuxième système $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

1,5 pts

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \left\{\begin{array}{l} x = 1 \\ y = 4 \\ z = -1 \end{array}\right.$$