UNIVERSITÉ DE CERGY-PONTOISE

U.F.R. Economie et Gestion **L2 - S3**

Licence d'Économie et Finance / Licence de Gestion

FIN 201 : MATHÉMATIQUES FINANCIÈRES

TEST - Novembre 2015 - 1h30

CALCULATRICES SANS MODULE DE CALCUL FORMEL AUTORISÉES
FORMULAIRE SANS ANNOTATION AUTORISÉ
LES PORTABLES DOIVENT ÊTRE DÉBRANCHÉS ET RANGÉS.
Le barème est donné à titre indicatif

CONSIGNE DE RÉDACTION : Vous devez présenter vos calculs, en particulier expliquer ce que vous calculez, écrire les formules utilisées avec les données numériques avant d'isoler l'inconnue cherchée (lorsque c'est possible) et de donner votre solution : la notation tiendra compte de ces consignes.

Exercice 1 - 2,5 points

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{-2}{3} \right\}$ par $f(x) = \frac{2x+1}{3x+2}$. Etudier les variations de f sur $[0;1]$. En déduire que pour tout $x \in [0;1]$, $f(x) \in [0,1]$.
2. On considère la suite (u_n) définie par récurrence :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} u_0 & = & 0 \\ u_{n+1} & = & \dfrac{2u_n+1}{3u_n+2} \end{array} \right.$$

Démontrer par récurrence que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0;1]$.

Exercice 2 - 3,5 points

Dans cet exercice, tous les taux d'intérêts considérés sont des taux d'intérêts simples commerciaux (sauf question 2). Les questions sont indépendantes les unes des autres :

1. Calculer le montant des intérêts produits par un placement de 24 000 € à 6% du 10 avril au 7 septembre 2015.
2. La différence entre intérêt commercial et intérêt civil d'un capital placé à 7,3% pendant 108 jours est égal 1,26 €. Calculer ce capital.
3. Un capital de 18 000 € prêté le 13 novembre 2015 à 2,2% a une valeur acquise à la fin du prêt de 18 053,90 €. A quelle date le prêt sera-t-il remboursé ?
4. Une banque prête à intérêts précomptés au taux de 6% un capital de 28 000 000 € pendant 21 jours. Déterminer le taux effectif de ce placement.

Exercice 3 - 6 points

Dans cet exercice, tous les taux d'intérêts considérés sont des taux d'intérêts composés. Les questions sont indépendantes les unes des autres :

1. Quelle sera la valeur acquise au bout de 4 ans d'une somme de 100 000 € placée au taux de $2,4\%$ (capitalisation annuelle) ? Même question lorsque la capitalisation est trimestrielle au taux proportionnel.
2. Au bout de combien d'années un investisseur aura-t-il doublé son capital initial si le taux est toujours de $2,4\%$ (capitalisation annuelle). Même question si la capitalisation est trimestrielle au taux proportionnel.
3. Quel devrait-être le taux d'intérêt annuel pour que le capital initial voit sa valeur doubler au bout de 25 ans ?
4. Un établissement financier vous propose de placer 100 000 € au taux de 5% pendant 4 ans, puis 6% les 3 années suivantes et enfin de $6,5\%$ les 3 dernières années.
   (a) Quelle est la valeur acquise à la fin des 10 années ?
   (b) Quel est, sur la période, le taux moyen annuel du placement ?
5. On dépose à la banque 10 000 €. Un an après on retire 6 000 €. Encore un an après, on dispose sur notre compte de $4\,105,56$ €. Calculer le taux d'intérêt associé à ce compte.

Exercice 4 - 4 points

1. Rappeler la définition de « Remettre un effet à l'escompte »
2. Le 22 octobre 2015 un effet commercial à échéance du 30 janvier 2016 et de nominal égal à 18 000 € est remis à l'escompte, au taux d'escompte 5%. Calculer l'escompte commercial et la valeur actuelle commerciale de cet effet.
3. Deux capitaux, de valeurs nominales respectives 50 000 € et 100 000 € et d'échéances respectives les 01/01/2017 et 01/01/2019 sont remis à l'escompte le 01/01/2015. L'escompte commercial total de ces deux capitaux retenu par la banque est de $27\,242,85$ €. Calculer le taux d'actualisation de négociation appliqué par la banque.

Exercice 5 - 4 points

Madame Y souhaite se constituer un capital de 30 000 € dans 4 ans.

1. Combien doit-elle placer chaque année pour y parvenir, le taux d'intérêt étant de $2,3\%$?
2. Elle s'aperçoit que ce montant dépasse ses possibilités et qu'elle ne peut économiser que 5 000 € par an. Au bout de combien d'années aura-t-elle constitué son capital ? (taux toujours égal à $2,3\%$)
3. Quel devrait-être le taux d'intérêt annuel pour que Madame Y. puisse acquérir un capital de 30 000 € au bout de 5 ans en plaçant 5000 euros par an ?
4. Une autre banque annonce un taux annuel de $2,3$ % mais les intérêts sont versés mensuellement au taux proportionnel : expliquer pourquoi Mme Y. devrait changer de banque : retrouver votre résultat en calculant le taux annuel effectif proposé par cette seconde banque.

UNIVERSITÉ DE CERGY-PONTOISE

U.F.R. Economie et Gestion **L2 - S3**

Licence d'Économie et Finance / Licence de Gestion

FIN 201 : MATHÉMATIQUES FINANCIÈRES

Corrigé du TEST 1 - Novembre 2015

Exercice 1 - 2,5 points

1. • **1 point** Pour tout $x \neq \frac{-2}{3}, f'(x) = \frac{1}{(3x+2)^2}$ donc f est strictement croissante sur $\left]-\infty, \frac{-2}{3}\right[$ et sur $\left]\frac{-2}{3}, +\infty\right[$, en particulier sur $[0;1]$. Ainsi , si $0 \leq x \leq 1$, alors $f(0) \leq f(x) \leq f(1)$ i.e. $f(x) \in \left[\frac{1}{2}; \frac{3}{5}\right] \subset [0;1]$
2. • **1,5 point** $P(n)$: $u_n \in [0;1]$
   • Initialisation : $u_0 = 0 \in [0;1]$ et $P(0)$ est vraie.
   • Hérédité : soit $p \in \mathbb{N}$ tel que $u_p \in [0;1]$, montrons alors que $u_{p+1} \in [0;1]$: or d'après la question 1, si $u_p \in [0;1]$, alors $u_{p+1} = f(u_p) \in [0;1]$: donc $P(p+1)$ est vraie.
   • Conclusion : La propriété est vraie pour $n = 0$ et est héréditaire, donc d'après le principe de démonstration par récurrence, cette propriété est vraie pour tout entier n, i.e. $u_n \in [0;1]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 2 - 3,5 points

1. • **1 point** La durée du prêt est exactement de 150 jours (20 en avril car on ne prend pas en compte le 1er jour, 31 en mai, 30 en juin, 31 en juillet et Août et 7 en septembre). Les intérêts I sont égaux à (formule **(II.1c)**) : $I = 24\,000 \times 0,06 \times \frac{150}{360} = 600$ €.
2. • **1 point** Soit C_0 le capital placé. On note I l'intérêt commercial et I' intérêt civil. On a alors (formules **(II.1c)** et **(II.1d)**) :
$$I - I' = C_0 \times 0,073 \times 108 \left(\frac{1}{360} - \frac{1}{365}\right)$$
   soit $1,26 = C_0 \times 0,0003$ et $C_0 = 4200$ €.
3. • **1 point** Soit j la durée du prêt en jours, on a $C_0 = 18\,000$ € et $C_j = 18\,053,90$ €. D'après la formule **(II.2c)**, on a : $j = \left(\frac{C_j - C_0}{C_0}\right)\left(\frac{360}{r}\right) = \left(\frac{53,90}{18000}\right)\left(\frac{360}{0,022}\right) = 49$ jours. Le prêt sera remboursé le 01 janvier 2016 (17 j. en novembre, 31 j. en décembre et 1 j. en janvier)
4. • **0,5 point** D'après la formule **(II.3)**, le taux d'intérêt effectif r_e vérifie $r_e = \frac{r}{1 - r \times j/360} = \frac{0,06}{1 - 0,06 \times 21/360} \approx 6,021\%$

Exercice 3 - 6 points

1. • **1,5 point** D'après la formule **(II.6)**, $C_4 = 100000 \times 1,024^4 = 109\,951,16$ €. Le taux propositionnel trimestriel est $r_4 = \dfrac{2,4}{4} = 0,6\%$ et la capitalisation acquise au bout de 16 trimestres est alors de $C_4' = 100000 \times 1,006^{16} = 110\,044,34$ €.
2. • **1 point** On cherche n (en années) tel que $C_n = 2C_0$. On résout (dans $\mathbb{R}$) $2C_0 = C_0 \times 1,024^x \iff x = \dfrac{\ln 2}{\ln 1,024} \approx 29,22$ soit 29 ans et 3 mois environ.
   Si la capitalisation est trimestrielle au taux $0,6\%$, on résout : $2C_0 = C_0 \times 1,006^x \iff x = \dfrac{\ln 2}{\ln 1,006} = 115,87$ soit 116 trimestres environ : donc 29 ans environ.
3. • **0,5 point** On cherche le taux d'intérêt r tel que :
   $2 = (1+r)^{25} \iff r = 2^{1/25} - 1 = 0,02811$ soit $2,81\%$ environ.
4. • **1 point** La valeur acquise au bout des 10 années est :
   $C_{10} = 100\,000 \times 1,05^4 \times 1,06^3 \times 1,065^3 = 174\,873,34$ €.

   • **0,5 point** Le taux moyen r vérifie :
   $100\,000 \times (1+r)^{10} = 174\,873,34 \iff r = \left(\dfrac{174\,873,34}{100\,000}\right)^{1/10} - 1 \approx 5,748\%$
5. • **1,5 point** Soit r le taux d'intérêt cherché :
   r vérifie $(10000 \times (1+r) - 6000)(1+r) = 4105,56$. En posant $X = 1+r$, on est ramené à résoudre l'équation : $10\,000x^2 - 6000x - 4105,56 = 0 \iff 10x^2 - 6x - 4,10556 = 0$, de discriminant $\Delta = 200,2224$. Cette équation possède une unique solution positive : $X = 1,0075$. Ainsi $r = 0,75\%$. Bref, on a simplement déposé nos économies sur un livret A.

Exercice 4 - 4 points

1. • **1 point** Un créancier possédant une créance la négocie à la banque qui en contre-partie garde une commission (= escompte).
2. • **1 point** Il y a exactement 100 jours entre le 22/10/2015 et le 30/01/2016 : l'escompte commercial est donc égal à (formule **(II.1c)**) $e = 18000 \times 0,05 \times \dfrac{100}{360} = 250$ € et la valeur actuelle (au 22/10/2015) de cet effet est donc 17 750 €.
3. • **2 points** Soit r le taux d'intérêt retenu. r vérifie : (formules **(II.13)** et **(II.14)**)

   $$50\,000(1+r)^{-2} + 100\,000(1+r)^{-4} = 150\,000 - 27\,242,85 = 122\,757,15$$

   On pose $X = (1+r)^{-2}$ et on résout l'équation : $2X^2 + X - 2,455143 = 0$. Le discriminant est $\Delta = 20,641144$. Cette équation a une seule racine positive : $X = 0,885813145$. On résout alors $(1+r)^{-2} = 0,885813145$, soit $r \approx 6,25\%$

Exercice 5 - 4 points

1. • **1 point** On doit déterminer l'annuité constante qui permet de constituer une VA de 30 000€ au bout de 4 ans au taux annuel : 2,3% : A vérifie (formule **(III.4)**) $30000 = A \times \left(\dfrac{1,023^4 - 1}{0,023}\right) \Longleftrightarrow A = 30000 \times \left(\dfrac{0,023}{1,023^4 - 1}\right) = 7246,15$€
2. • **1 point** On cherche n tel que $30000 = 5000 \times \left(\dfrac{1,023^n - 1}{0,023}\right) \Longleftrightarrow \dfrac{30000}{5000} \times 0,023 + 1 = 1,023^n \Longleftrightarrow n = \dfrac{\ln(1 + 0,023 \times 30/5)}{\ln 1,023} \approx 5,68$ années soit 5 ans et 247 jours
3. • **1 point** Si Mme Y. souhaite néanmoins obtenir 30000€ au bout de 5 ans, il faut qu'elle trouve une banque qui lui propose le taux r vérifiant : $30000 = 5000 \times \left(\dfrac{(1+r)^5 - 1}{r}\right) \Longleftrightarrow \dfrac{(1+r)^5 - 1}{r} = 6$: il faut s'aider du solveur de la calculatrice $r \approx 9,13\%$
4. • **1 point** Le taux proportionnel est supérieur au taux équivalent : donc le taux effectif annuel proposé par cette seconde banque est supérieur à 2,3%

   Le taux mensuel proportionnel a un taux annuel de 2,3% est (formule **(II.9)**) $r_{12} = \dfrac{0,023}{12} = 0,19167\%$

   Le taux annuel équivalent est (formule **(II.10)**) $r = 1,0019167^{12} - 1 \approx 2,324\%$