UNIVERSITÉ DE CERGY-PONTOISE

U.F.R. Economie et Gestion **L2 - S3**

Licence d'Économie et Finance / Licence de Gestion

FIN 201 : MATHÉMATIQUES FINANCIÈRES

TEST 1 - Novembre 2014 - 1h 30 min

CALCULATRICES SANS MODULE DE CALCUL FORMEL AUTORISÉES
FORMULAIRE SANS ANNOTATION AUTORISÉ
LES PORTABLES DOIVENT ÊTRE DÉBRANCHÉS ET RANGÉS.
Le barème est donné à titre indicatif

CONSIGNE DE RÉDACTION : Vous devez présenter vos calculs, en particulier expliquer ce que vous calculez, écrire les formules utilisées avec les données numériques avant d'isoler l'inconnue cherchée (lorsque c'est possible) et de donner votre solution : la notation tiendra compte de ces consignes.

Questions diverses - 2 points

• **Définition :** Définir ce qu'est remettre une créance à l'escompte.

• **Démonstration :** On considère une suite de n annuités en progression géométrique de raison $q \neq 0$ et de premier terme A_1, le taux d'intérêt de capitalisation étant noté r. Dans le cas où $q \neq 1+r$, démontrer que la valeur acquise de cette suite d'annuité est donnée par la formule **(III.6)**

$$VF_n = A_1 \left(\frac{(1+r)^n - q^n}{1+r-q} \right)$$

Exercice 1 - 4 points

Dans cet exercice, tous les taux d'intérêts considérés sont des taux d'intérêts simples commerciaux.

1. Un capital de 12 000 € prêté le 17 octobre 2014 à 3,3% a une valeur acquise à la fin du prêt de 12 057,20 €. A quelle date le prêt sera-t-il remboursé ?
2. Un capital placé pendant 108 jours à 4% a acquis une valeur de 5 060 €. Quel est le montant de ce capital ?
3. Une banque prête à intérêts précomptés au taux de 8% un capital de 120 000 € pendant 9 mois. Calculer le taux effectif de ce placement.

Exercice 2 - 4 points

Dans cet exercice, tous les taux d'intérêts considérés sont des taux d'intérêts composés.

1. Quelle sera la valeur acquise au bout de 4 ans d'une somme de 500 000 € placée au taux de 3% (capitalisation annuelle) ?
2. Toujours avec un taux d'intérêt de 3%, au bout de combien de temps l'investisseur aura-t-il triplé son capital initial ?
3. Quel devrait-être le taux d'intérêt pour que le capital initial voit sa valeur tripler au bout de 25 ans ?
4. Un établissement financier vous propose de placer 1 000 000 € au taux de 2% pendant 5 ans, puis 7% pendant 10 ans.
   (a) Quelle est la valeur acquise à la fin des cinq premières années, puis au bout de 15 ans ?
   (b) Quel est, sur la période, le taux moyen annuel du placement ?

Exercice 3 - 5 points

Un investisseur dispose d'une fortune évaluée à X euros.

Il décide de l'investir sur trois comptes distincts dont les caractéristiques sont résumées ci-dessous. Peu familier des mathématiques financières, il choisit de placer un montant identique (soit X/3) sur chacun des trois comptes, ceci pour une période de 3 ans.

• Compte N°1 : taux annuel $r_1 = 6\%$, capitalisation annuelle des intérêts

• Compte N°2 : taux trimestriel $r_2 = 1,5\%$, capitalisation trimestrielle des intérêts (taux équivalent)

• Compte N°3 : taux semestriel $r_3 = 3\%$, capitalisation semestrielle des intérêts (taux équivalent)

1. On cherche à comparer les placements sur les comptes N°1 et N°2.
   (a) Sans calculatrice et en utilisant une propriété vue en cours, préciser quel est le placement le plus avantageux. Retrouver votre résultat par un calcul.
   (b) La différence entre les intérêts acquis par les placements sur les comptes N°1 et N°2 s'élève à 8 283, 91 € : Combien l'investisseur a-t-il investi sur chaque compte (arrondir à l'euro près)
2. On cherche à comparer maintenant les placements sur les comptes N°2 et N°3.
   (a) Quel est le taux annuel équivalent au taux semestriel du placement sur le compte N°3 ?
   (b) Calculer la différence entre les intérêts produits par les placements sur les comptes N°2 et N°3.
3. On s'intéresse désormais au placement 3. A quel taux d'intérêt simple le montant investi sur le compte 3 devrait-il être placé pour que, à l'issue de la période de placement, la valeur acquise à intérêts simples soit égale à la valeur acquise à intérêts composés ?

Exercice 4 - 5 points

Deux frères jumeaux Paul et Hugo n'ont pas du tout le même comportement : Paul fume 2 paquets de cigarettes par semaine alors que Hugo décide de placer la somme correspondante sur un compte d'épargne rémunéré à 3%

Hugo commence à épargner le premier janvier de ses 16 ans et retire l'argent le premier janvier de ses 66 ans, juste après le versement.

1. On suppose que le prix du paquet de cigarettes reste constant égal à 6 € pendant toute la durée du placement.
   (a) Hugo place la somme correspondante chaque premier janvier, soit $A = 624$€ Exprimer le capital acquis en fonction de A. Calculer ce capital acquis.
   (b) En se renseignant, Hugo trouve une banque qui lui propose une capitalisation mensuelle (au taux proportionnel), il décide donc de placer le premier jour de chaque mois 52 €. De quelle somme disposera-t-il le premier janvier de ses 66 ans ?
2. Afin d'ajuster son estimation, Hugo estime que le prix du paquet de cigarettes va augmenter de 6% par an
   (a) Il place chaque premier janvier la somme correspondante. Calculer le capital acquis.
   (b) Il place chaque début de mois la somme correspondante. Calculer le capital acquis (**en utilisant des taux équivalents**).

UNIVERSITÉ DE CERGY-PONTOISE

U.F.R. Economie et Gestion **L2 - S3**

Licence d'Économie et Finance / Licence de Gestion

Corrigé du TEST 1 - Mathématiques Financières

Questions diverses - 2 points

• **Définition : 0,5 point** Un créancier remet une créance qu'il possède à l'escompte s'il vend cette créance à une banque (ou organisme financier) qui lui rachète sa créance mais prélève des agios (dont le montant total correspond à l'escompte bancaire).

• **Démonstration : 1,5 point** On considère une suite de n annuités en progression géométrique de raison $q \neq 0$ et de premier terme A_1, le taux d'intérêt de capitalisation étant noté r. Dans le cas où $q \neq 1 + r$, démontrer que la valeur acquise de cette suite d'annuité est donnée par la formule

$$VF_n = A_1 \left(\frac{(1+r)^n - q^n}{1+r-q} \right)$$

Preuve :

$$\begin{aligned}
VF_n &= \sum_{k=1}^{n} A_1 q^{k-1}(1+r)^{n-k} = A_1(1+r)^{n-1} \sum_{k=1}^{n} q^{k-1}(1+r)^{1-k} \\
&= A_1(1+r)^{n-1} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{q}{1+r} \right)^{k-1} \\
&= A_1(1+r)^{n-1} \left(\frac{1 - \left(\frac{q}{1+r}\right)^n}{1 - \frac{q}{1+r}} \right) \\
&= A_1(1+r)^{n} \left(\frac{1 - \left(\frac{q}{1+r}\right)^n}{1+r-q} \right) = A_1 \left(\frac{(1+r)^n - q^n}{1+r-q} \right)
\end{aligned}$$

Exercice 1 - 4 points

1. • **1 point** Soit j la durée du prêt en jours, on a $C_0 = 12\,000$ € et $C_j = 12\,057,20$ €. D'après la formule **(II.2c)**, on a : $j = \left(\frac{C_j - C_0}{C_0}\right)\left(\frac{360}{r}\right) = \left(\frac{57,20}{12000}\right)\left(\frac{360}{0,33}\right) = 52$ jours. Le prêt a été remboursé le 08 décembre 2014 (14 j. en octobre, 30j. en novembre et 8 j. en décembre)
2. • **1 point** Ici $r = 0,04$, $j = 108$ et $C_j = 5\,060$ €. On cherche le montant du capital C_0 qui vérifie la formule **(II.2b)** : $C_0 = \frac{C_j}{1 + j\frac{r}{360}} = \frac{5\,060}{1 + 0,04 \times 108/360} = 5\,000$ €.
3. • **2 points** Les intérêts fournis par ce placement sont égaux à $I = 120\,000 \times 0,08 \times \frac{9}{12} = 7\,200$ €. La banque ne prête donc que $C = 120\,000 - 7\,200 = 112\,800$ €, et l'emprunteur remboursera $120\,000$ € dans 9 mois. Le taux d'intérêt effectif r_e vérifie donc $112\,800 \times r_e \times \frac{9}{12} = 7\,200 \iff r_e = \frac{7\,200}{112\,800 \times 9/12} \approx 0,0851$ soit $r_e \approx 8,51\%$

Exercice 2 - 4 points

1. **• 0,5 point** D'après la formule **(II.6)**, $C_4 = 500000 \times 1,03^4 = 562\,754,41$ €
2. **• 1 point** On cherche n (en années) tel que $C_n = 3C_0 \iff 3C_0 = C_0 \times 1,03^n \iff$ $n = \dfrac{\ln 3}{\ln 1,03} \approx 37,17$ soit 37 ans et 2 mois environ
3. **• 0,5 point** On cherche le taux d'intérêt r tel que $3 = (1+r)^{25} \iff r = 3^{1/25} - 1 = 0,0449$ soit $4,49\%$ environ.
4. **• 1 point** La valeur acquise au bout de cinq ans est $C_5 = 1000000 \times 1,02^5 = 1\,104\,080,80$ € et au bout de 15 ans : $C_{15} = 1\,104\,080,80 \times 1,07^{10} = 2\,171\,894,05$ €.

   • 1 point Le taux moyen r vérifie :

   $1\,000\,000 \times (1+r)^{15} = 2\,171\,894,05 \iff r = \left(\dfrac{2\,171\,894,05}{1\,000\,000}\right)^{1/15} - 1 \approx 5,31\%$

Exercice 3 - 5 points

1. On cherche à comparer les placements sur les placements N°1 et N°2.
   (a) **• 1,5 point** Il faut pouvoir comparer les taux trimestriels des placements 1 et 2 : sur le compte N°1, le taux trimestriel proportionnel est de 1,5 % : or le taux équivalent est inférieur au taux proportionnel : le taux trimestriel équivalent au taux annuel de 6% est donc inférieur à 1,5% : le compte N°2 est donc plus avantageux.

   Le taux annuel équivalent au taux trimestriel du compte N°2 est $r = 1,015^4 - 1 \approx 0,0613636$ soit $6,14\%$ environ qui est en effet supérieur au taux de rémunération du placement N°1.

   (b) **• 1 point** Les intérêts acquis (au bout de 3 ans) sur le compte N°1 sont égaux à $I_1 = \dfrac{X}{3}\left(1,06^3 - 1\right)$ et sur le compte N°2 : $I_2 = \dfrac{X}{3}\left(1,015^{12} - 1\right)$. La différence est donc $I_2 - I_1 = \dfrac{X}{3}\left(1,015^{12} - 1,06^3\right) = 8\,283,91 \iff X = 3 \times \dfrac{8\,283,91}{1,015^{12} - 1,06^3} = 5\,400\,000$, soit $1\,800\,000$ € sur chacun des trois comptes.
2. Comparons maintenant les placements sur les comptes N°2 et N°3.
   (a) **• 0,5 point** $r = (1,03)^2 - 1 \approx 0,0609$, soit $6,09\%$

   (b) **• 1 point** On a $I_2 = 1\,800\,000 \times \left(1,015^{12} - 1\right) = 352\,112,71$ €

   et $I_3 = 1\,800\,000 \times \left(1,03^6 - 1\right) = 349\,294,13$ €,

   donc la différence est $I_3 - I_2 = 2\,818,58$ €
3. **• 1 point** On cherche le taux d'intérêt r tel que $1\,800\,000 \times r \times 3 = 349\,294,13 \iff$ $r \approx 0,064684$ soir $r \approx 6,468\%$

Exercice 4 - 5 points

Hugo commence à épargner le premier janvier de ses 16 ans et retire l'argent le premier janvier de ses 66 ans, juste après le versement : il y a donc 51 versements annuels et 612 versements mensuels.

1. On suppose que le prix du paquet de cigarettes reste constant égal à 6 € pendant toute la durée du placement.
   (a) Hugo place la somme correspondante chaque premier janvier, soit $A = 624$€
   • 1 point D'après la formule **(III. 4)**,
   $VF = A \times \dfrac{(1+r)^n - 1}{r} = 624 \times \dfrac{1,03^{51} - 1}{0,03} = 73\,120,80$ €
   (b) **• 1 point** Hugo place le premier jour de chaque mois 52 €.
   Le taux proportionnel est égal à $r'_{12} = \dfrac{3}{12} = 0,25\%$
   Le capital acquis est alors égal à $VF' = 52 \times \dfrac{1,0025^{612} - 1}{0,0025} = 75\,074,85$ €
2. Afin d'ajuster son estimation, Hugo estime que le prix du paquet de cigarettes va augmenter de 6% par an.
   (a) **• 1 point** Il place chaque premier janvier la somme correspondante : d'après la formule **(III.6)**,
   $$VF'' = A\left(\frac{(1+r)^n - q^n}{1+r-q}\right) = 624 \times \frac{1,03^{51} - 1,06^{51}}{1+0,03-1,06} = 312\,206,76€$$
   (b) **• 2 points** Il place chaque début de mois la somme correspondante (taux équivalents $r_{12} = 1,03^{1/12} - 1 \approx 0,00246627$ et $q_{12} = 1,06^{1/12} \approx 1,00486755$) :
   $$VF''' = A\left(\frac{(1+r_{12})^n - q_{12}^n}{1+r_{12}-q_{12}}\right) = 52 \times \frac{1,00246627^{612} - 1,0048676^{612}}{1,00246627 - 1,0048676} = 325\,041,91€$$

Remarque : Sur les 20 dernières années, l'augmentation du prix du paquet de cigarettes a effectivement été d'environ 6% par an

Si vous pensez qu'un taux de placement de 3% est excessif, essayer de refaire l'exercice avec $r = 1\%$: la valeur du capital acquis reste tout de même impressionnante !