

FIN 201 : MATHÉMATIQUES FINANCIÈRES

Partiel session 2 - Juin 2016 - 2H00

**CALCULATRICES SANS MODULE DE CALCUL FORMEL AUTORISÉES
FORMULAIRE SANS ANNOTATION AUTORISÉ
LES PORTABLES DOIVENT ÊTRE DÉBRANCHÉS ET RANGÉS.**

CONSIGNES DE RÉDACTION

Vous devez :

- Présenter vos calculs, en précisant quelle est l'inconnue cherchée.
- Préciser le numéro de la formule utilisée et l'écrire avec les données numériques.
- Isoler l'inconnue cherchée (lorsque c'est possible), ou bien préciser que vous utilisez le solveur de votre calculatrice.
- Donner votre solution : arrondir au centime lorsqu'il s'agit d'une valeur monétaire, arrondir également les taux d'intérêts annuels à deux chiffres après la virgule, comme par exemple 3,14%, et les taux d'intérêts mensuels à quatre chiffres après la virgule

La notation tiendra compte de ces consignes.

Exercice 1 - 3 points

Les questions de cet exercice sont indépendantes les unes des autres.

1. Un capital de 750 000 € prêté le 15 juin 2016 à 8% (intérêts simples commerciaux) a une valeur acquise à la fin du prêt égale à 766 000 €. Quelle est la durée (en jours) du prêt ? A quelle date ce prêt sera-t-il remboursé ?
2. Une banque prête à intérêts précomptés au taux de 9% un capital de 600 000 € pendant 3 mois. Déterminer le montant que reçoit effectivement l'emprunteur. Calculer le taux effectif de ce placement. (intérêts simples commerciaux)
3. Une banque annonce qu'elle pratique un taux annuel de 2,7% pour ses prêts immobiliers. En réalité, les intérêts sont versés mensuellement au taux proportionnel. Quel est le taux annuel équivalent ?

Exercice 2 - 3 points

On désire se constituer un capital en versant 10 000 € chaque semestre sur un compte rémunéré à 5% l'an.

Le premier versement aura lieu le 1er janvier 2016

Le dernier versement aura lieu le 1er juillet 2020

Le capital constitué à la date du 1er juillet 2020 sera laissé sur le compte et continuera de porter intérêt jusqu'au 1er juillet 2022

1. Calculer le montant du capital constitué à la date du 1er juillet 2022, on utilisera un taux semestriel équivalent.
2. De ce capital acquis, on décide de déposer 100 000 € dans une banque concurrente (à cette date du 1er juillet 2022) qui nous promet de verser **à partir du 1er juillet 2024** une rente annuelle constante égale à 20 000 € pendant 7 ans. Calculer le taux actuariel correspondant.

Exercice 3 - 4 points

Mme Dursley vient d'acquérir une action de la Société Wizard pour un montant de 800 €. La Sté Wizard pense verser un dividende de 50 € par action et maintenir la rémunération à ce niveau à l'avenir.

On suppose que Mme Dursley percevra son premier dividende dans exactement un an.

On suppose que la valeur actuelle d'une action est la somme des flux futurs actualisés qu'elle rapporte.

On retiendra dans tout l'exercice un taux d'actualisation de 4%.

1. On suppose que Mme Dursley vendra son action 1 000 € dans exactement 5 ans, juste après le versement du dividende. Quelle est la valeur actuelle de cette action ? Quel est le taux d'intérêt actuariel associé à ce placement ?
2. Mme Dursley pense plutôt conserver indéfiniment cette action, pour la transmettre à son héritier Harry. Quel est dans ce cas la valeur actuelle de cette action ?
3. En fait, on s'aperçoit que le dividende versé pour chaque action augmente de 2% chaque année. Quelle est la valeur actuelle de cette action, en considérant que Mme Dursley conserve indéfiniment cette action ? (**Indication** : on pourra dans un premier temps raisonner sur la valeur actuelle en considérant qu'il y a n versements, puis déterminer une limite)

Exercice 4 - 4 points

En 2010, un particulier a contracté un emprunt immobilier auprès de sa banque une somme de 200 000 € qu'il rembourse par mensualités constantes sur 15 ans au taux annuel de 4,2% (le taux mensuel est alors proportionnel). En 2016, immédiatement après la 72^{ième} mensualité, il renégocie sa dette et compare deux propositions :

- Sa banque lui propose un nouveau taux de 2,7% sans pénalités de remboursement anticipé. La durée de ce nouveau contrat est ramenée à 8 ans.
- Une banque concurrente lui propose un taux de 2,1%, mais dans ce cas il devra payer des pénalités de remboursement à sa banque : ces pénalités, de 3% du capital restant dû, sont incluses dans le prêt accordé par cette seconde banque. La durée est également de 8 ans.

1. Calculer le montant de la mensualité du prêt initial contracté par M. X.
2. Déterminer le capital restant dû par M. X. après le versement de la 72^{ième} mensualité.
3. Calculer le montant de la nouvelle mensualité avec la proposition de la banque de M. X.
4. Calculer le montant du capital emprunté, puis le montant de la nouvelle mensualité avec la proposition de la banque concurrente. Que conseillez-vous à M. X ?

Exercice 5 - 6 points

Une entreprise fait un emprunt d'un montant de 1 000 000 € remboursable en 4 annuités constantes, au taux nominal de 7%. La banque prélève à chaque versement une commission de 2,1% du montant du versement.

On rappelle que l'entreprise peut déduire de son résultat, lors du calcul de ses impôts (dont le taux est $T = 33,33\%$), les frais suivants : commission bancaire et intérêts.

Le but des questions suivantes est de vous aider à compléter le tableau en annexe au fur et à mesure des questions.

Dans cet exercice, les valeurs numériques seront arrondies à l'euro près

1. Déterminer l'annuité A versée par l'entreprise à sa banque. Quel montant va-t-elle donc déduire de ses impôts ?
2. Calculer le montant I_1 des intérêts versés par l'entreprise à la fin de l'année 1, puis l'amortissement M_1 .
3. En déduire les valeurs des amortissements M_p , $p \in \llbracket 1, 4 \rrbracket$
4. Calculer le montant réel du décaissement D_p fait par l'entreprise chaque année $p \in \llbracket 1, 4 \rrbracket$.
5. Compléter le tableau en annexe.
6. Déterminer le taux d'intérêt effectif pour l'entreprise.

ANNEXE À L'EXERCICE 5 - à rendre avec votre copie
 Compléter ce tableau avec les valeurs numériques

Période (p)	Capital restant dû en début de période (C_{p-1})	Intérêt de la période (I_p)	Amortissement de la période (M_p)	Annuité de la période (A_p)	Décassement de la période (D_p)	Capital restant dû en fin de période (C_p)
Année 1	1 000 000					
Année 2						
Année 3						
Année 4						

FIN 201 : MATHÉMATIQUES FINANCIÈRES

Corrigé du Partiel - Juin 2016

Exercice 1 - 3 points

1. ● **1 point** Soit j la durée du prêt en jours, on a $C_0 = 750\,000$ € et $C_j = 766\,000$ €. D'après la formule (II.2c), on a :

$$j = \left(\frac{C_j - C_0}{C_0} \right) \left(\frac{360}{r} \right) = \left(\frac{16000}{750000} \right) \left(\frac{360}{0,08} \right) = 96 \text{ jours.}$$

Le prêt sera remboursé le 19 septembre 2016 (15 j. en juin, 31 j. en juillet, 31 j. en août et 19 j. en septembre)

2. ● **1 point** Les intérêts fournis par ce placement sont égaux à $I = 600\,000 \times 0,09 \times \frac{3}{12} = 13\,500$ €. La banque ne prête donc que $C = 600\,000 - 13\,500 = 586\,500$ €, et l'emprunteur remboursera $600\,000$ € dans 3 mois.

Le taux d'intérêt effectif r_e vérifie donc $586\,500 \times r_e \times \frac{3}{12} = 13\,500 \iff r_e = \frac{13\,500}{586\,500 \times 3/12} \approx 0,0921$ soit $r_e = 9,21\%$ environ.

Ou bien, en utilisant directement la formule (II.4) : $r_e = \frac{r}{1 - r \frac{3}{12}} \approx 9,21\%$.

3. ● **1 point** Le taux mensuel proportionnel a un taux annuel de $2,7\%$ est $r_{12} = \frac{0,027}{12} = 0,225\%$

Le taux annuel équivalent est (formule (II.10)) : $r = 1,00225^{12} - 1 \approx 2,73\%$.

Exercice 2 - 3 points

1. **1,5 point** Soit V le capital acquis au 1er juillet 2020 : il y a 10 versements, donc d'après la formule (III.4) on a (avec le taux semestriel $r_2 = 1,05^{1/2} - 1 \approx 2,46951\%$).

$$V = 10000 \times \frac{(1 + r_2)^{10} - 1}{r_2} = 10000 \times \frac{1,05^5 - 1}{r_2} = 111\,877,18$$

Soit V_1 le capital acquis au 1er Juillet 2022 : $V_1 = V \times 1,05^2 = 123\,344,59$ €.

2. **1,5 point** On égalise les flux au 1er juillet 2024, le taux d'intérêt annuel r vérifie donc :

$$100\,000(1 + r)^2 = 20\,000 \times \frac{1 - (1 + r)^{-7}}{r} \iff \frac{(1 + r)^{-2} - (1 + r)^{-9}}{r} = 5$$

Le solveur de la calculatrice est nécessaire pour trouver la solution : $r \approx 5,88\%$

Exercice 3 - 4 points

1. ● 2 points

(1 pt) La valeur actuelle V de cette action est la valeur actualisée des flux futurs : il y aura 5 dividendes égaux à 50€ et le produit de la vente égal à 1 000€ dans 5 ans.

$$\begin{aligned} \text{Donc } V &= \frac{50}{1,04} + \frac{50}{1,04^2} + \frac{50}{1,04^3} + \frac{50}{1,04^4} + \frac{1050}{1,04^5} = \frac{50}{1,04} \times \frac{1 - 1,04^{-5}}{1 - 1,04^{-1}} + \frac{1000}{1,04^5} \\ &= 50 \times \frac{1 - 1,04^{-5}}{0,04} + \frac{1000}{1,04^5} = 1044,52 \text{ €}. \end{aligned}$$

(1 pt) Soit r le taux actuariel de ce placement : r égalise flux entrants et flux sortants actualisés à la date 0

$$\begin{aligned} 800 &= \frac{50}{1+r} + \frac{50}{(1+r)^2} + \frac{50}{(1+r)^3} + \frac{50}{(1+r)^4} + \frac{1050}{(1+r)^5} \\ &= 50 \times \frac{1 - (1+r)^{-5}}{r} + \frac{1000}{(1+r)^5} \end{aligned}$$

Donc r vérifie :

$$\frac{1 - (1+r)^{-5}}{r} + \frac{20}{(1+r)^5} - 16 = 0$$

Le solveur (ou la fonction TRI) de la calculatrice permet de trouver une valeur approchée de $r \approx 10,32\%$

2. ● 0,5 point On se trouve dans le cadre d'une rente « perpétuelle » :

(Formule (III.8)) : $VA_0(RP) = \frac{50}{0,04} = 1250 \text{ €}$.

3. ● 1,5 point

(1 pt) Si on considère que les dividendes de cette action sont versés n années : la valeur actuelle $VA_0^{(n)}$ de cette action est alors : (Formule (III.6)) :

$$VA_0^{(n)} = \frac{50}{1,04^n} \left(\frac{1,02^n - 1,04^n}{1,02 - 1,04} \right) = 2500 \times \left(1 - \left(\frac{1,02}{1,04} \right)^n \right)$$

(0,5 pt) On fait tendre n vers $+\infty$, comme $0 < \frac{1,02}{1,04} < 1$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1,02}{1,04} \right)^n = 0$ et $VA_0^{+\infty} = 2500 \text{ €}$.

Exercice 4 - 4 points

1. ● 0,5 point Calcul du montant de la mensualités du premier prêt avec le taux proportionnel $r_{12} = \frac{0,042}{12} = 0,0035$, et avec la formule (IV.9)

$$M = \frac{0,0035 \times 200\,000}{1 - (1,0035)^{-180}} = 1499,50 \text{ €}.$$

2. ● 1 point Calcul du capital restant dû après le versement de la 72^{ième} mensualité

(IV.15) $C_{72} = 200\,000 \times \left(\frac{1,0035^{180} - 1,0035^{72}}{1,0035^{180} - 1} \right) = 134\,662,50 \text{ €}$.

3. ● **1 point** Montant des 96 mensualités avec la proposition de sa banque : au taux proportionnel $r'_{12} = \frac{0,027}{12} = 0,00225$, et (avec la formule (IV.9))

$$M' = \frac{0,00225 \times 134662,50}{1 - (1,00225)^{-96}} = 1\,561,25 \text{ €}.$$
4. ● **1,5 point** M. X doit emprunter $134\,662,50 \times 1,03 = 138\,702,38 \text{ €}$ auprès de la banque concurrente.
 Montant des 96 mensualités avec la proposition de la seconde banque : au taux proportionnel $r''_{12} = 0,00175$, on a : $M'' = \frac{0,00175 \times 138\,702,38}{1 - (1,00175)^{-96}} = 1\,570,84 \text{ €}$
 M. X n'a donc pas intérêt à changer de banque ...

Exercice 5 - 6 points

1. ● **1,5 point** D'après la formule (IV.9), l'annuité « théorique » : $A' = \frac{1000000 \times 0,07}{1 - (1,07)^{-4}} = 295\,228,12 \text{ €}$
 L'entreprise verse donc chaque année à sa banque : $A = A' \times 1,021 \approx 301\,428 \text{ €}$
 L'entreprise va donc déduire chaque année de ses impôts :
 $295\,228,12 \times 0,021 \times 0,3333 \approx 2\,066 \text{ €}$
 De plus, les intérêts versés la première année sont : $I_1 = 1\,000\,000 \times 0,07 = 70\,000 \text{ €}$, donc l'entreprise peut également déduire $70\,000 \times 0,3333 = 23\,331 \text{ €}$
 Elle déduira donc $25\,397 \text{ €}$ de ses impôts la première année.
2. ● **0,5 point** $I_1 = 1\,000\,000 \times 0,07 = 70\,000 \text{ €}$, donc $M_1 = A' - I_1 \approx 225\,228 \text{ €}$.
3. ● **1 point** La suite des amortissements est une suite géométrique de raison $q = 1,07$ (formule (IV.11)). On a donc :
 $M_1 \approx 225\,228 \text{ €}$, $M_2 \approx 240\,994 \text{ €}$, $M_3 \approx 257\,864 \text{ €}$ et $M_4 \approx 275\,914 \text{ €}$
 D'où $I_p = A' - M_p$
 $I_1 = 70\,000 \text{ €}$, $I_2 \approx 54\,234 \text{ €}$, $I_3 \approx 37\,364 \text{ €}$ et $I_4 \approx 19\,313 \text{ €}$
4. ● **1 point** Décaissements réels de l'entreprise compte tenu de la déduction qu'elle effectue sur ses impôts :

$$D_p = A - 2\,066 - I_p \times 0,3333 = A - 2\,066 - (A - M_p) \times 0,3333$$

$$D_1 = 301\,428 - 2\,066 - 70\,000 \times 0,3333 \approx 276\,031 \text{ €}$$

$$D_2 = 301\,428 - 2\,066 - 54\,234 \times 0,3333 \approx 281\,286 \text{ €}$$

$$D_3 = 301\,428 - 2\,066 - 37\,364 \times 0,3333 \approx 286\,909 \text{ €}$$

$$D_4 = 301\,428 - 2\,066 - 19\,313 \times 0,3333 \approx 292\,925 \text{ €}$$

5. ● **1 point** Voir tableau page suivante.
6. ● **1 point** A la date 0 : l'entreprise touche $1\,000\,000 \text{ €}$
 Aux dates $p, p \in \llbracket 1, 4 \rrbracket$, l'entreprise débourse D_p :
 On cherche x t.q. :

$$1\,000\,000 = \frac{276\,031}{1+x} + \frac{281\,286}{(1+x)^2} + \frac{286\,909}{(1+x)^3} + \frac{292\,925}{(1+x)^4}$$

Solution : $x \approx 5,29\%$ coût réel net de l'emprunt pour l'entreprise.

ANNEXE À L'EXERCICE 5

Période (P)	Capital restant dû en début de période (C _{P-1})	Intérêt de la période (I _P)	Amortissement de la période (M _P)	Annuité de la période (A _P)	Décassement de la période (D _P)	Capital restant dû en fin de période (C _P)
Année 1	1 000 000	70 000	225 228	301 428	276 031	774 772
Année 2	774 772	54 234	240 994	301 428	281 286	533 778
Année 3	533 778	37 364	257 864	301 428	286 909	275 914
Année 4	275 914	19 313	275 914	301 428	292 925	0