UNIVERSITÉ DE CERGY-PONTOISE
U.F.R. Economie et Gestion **L2 - S3**
Licence d'Économie et Finance / Licence de Gestion

FIN 201 : MATHÉMATIQUES FINANCIÈRES

Partiel seconde session - Juin 2015 - 2H00

CALCULATRICES SANS MODULE DE CALCUL FORMEL AUTORISÉES
FORMULAIRE SANS ANNOTATION AUTORISÉ
LES PORTABLES DOIVENT ÊTRE DÉBRANCHÉS ET RANGÉS.
Le barème est donné à titre indicatif

CONSIGNES DE RÉDACTION : Vous devez présenter vos calculs, en particulier expliquer ce que vous calculez, écrire les formules utilisées avec les données numériques avant d'isoler l'inconnue cherchée (lorsque c'est possible) et de donner votre solution : la notation tiendra compte de ces consignes.

Exercice 1 - 6 points

Les questions de cet exercice sont indépendantes les unes des autres.

1. Un capital de 250 000 € prêté le 13 avril 2015 à 7% (intérêts simples commerciaux) a une valeur acquise à la fin du prêt égale à $253\,062,50$ €. Quelle est la durée (en jours) du prêt ? A quelle date ce prêt a-t-il été remboursé ?
2. Une banque prête à intérêts précomptés au taux de 6% un capital de 300 000 € pendant 8 mois. Calculer le taux effectif de ce placement. (intérêts simples commerciaux)
3. Un investisseur se demande au bout de combien de temps (arrondi au mois près) un capital placé au taux de $2,3\%$ aura doublé de valeur. (intérêts composés commerciaux)
4. Déterminer le taux mensuel proportionnel et le taux mensuel équivalent au taux annuel de $5,25\%$
5. Que vaut-il mieux choisir pour placer son capital : un taux annuel de 4% avec capitalisation annuelle des intérêts, ou bien un taux trimestriel de 1% avec capitalisation trimestrielle des intérêts ? Justifier !
6. Une banque annonce qu'elle pratique un taux annuel de $3,3\%$ pour ses prêts immobiliers. En réalité, les intérêts sont versés mensuellement au taux proportionnel. Quel est le taux annuel équivalent ?

Exercice 2 - 3 points

Je souhaite me constituer un capital, afin d'avoir 60 000 € dans 8 ans.

1. Combien doit-je placer chaque année pour y parvenir, le taux d'intérêt étant de $1,75\%$?
2. De fait, ce montant dépasse mes possibilités et je ne peux économiser que 6 000 € par an. Au bout de combien d'années aurai-je constitué mon capital ? (taux toujours égal à $1,75\%$)
3. Quel devrait-être le taux d'intérêt annuel pour que j'obtienne un capital de 60 000 € au bout de 8 ans en plaçant 6 000 euros par an ?

Exercice 3 - 3 points

La banque me propose un crédit à la consommation d'un montant 50 000 € sur une durée 6 ans au taux annuel de 4%. Le remboursement se fait à mensualités constantes.

1. Calculer le montant de la mensualité théorique.
2. En effet, la banque prélève l'année 0 des frais de dossiers de 120 € et des frais de virement de $0,5$ € à chaque versement d'une mensualité.
   (a) Quel est le montant de la mensualité effective ?
   (b) Quel est le capital effectivement reçu par l'emprunteur ?
   (c) Donner l'équation vérifiée par le TAEG mensuel x.
   (d) A l'aide de votre calculatrice donner x et le taux annuel équivalent.

Exercice 4 - 4 points

Un emprunt de 100 000 € a été contracté sur une durée de 10 ans, au taux annuel de 5%. La première annuité est égale à $A_1 = 33\,921,78$ €, et les 9 annuités suivantes sont toutes égales à A €.

1. Calculer le montant de A.
2. Calculer le montant du capital restant dû après le versement de la 5ième annuité.
3. Compléter sur l'ANNEXE les trois premières lignes d'un tableur donnant le tableau d'amortissement.

Exercice 5 - 4 points

Un emprunt obligataire est émis le 1er janvier 2012 aux conditions suivantes :

- Nombre d'obligations $N = 1\,000\,000$
- Valeur nominale : $V_N = 100$ €
- Valeur d'émission : $V_E = 99,5$ €
- Remboursement au pair sur $n = 8$ ans par annuités (presque) constantes .
- Taux d'intérêt nominal : $r = 9\%$

1. Calculer le montant de l'annuité théorique constante.
2. En déduire le nombre d'obligations amorties la première et la seconde année.
3. Calculer le taux de rendement (ou taux actuariel) à l'émission pour l'obligataire.
4. Le 1er janvier 2015, immédiatement après le détachement du coupon, le taux du marché passe à 5%. Quelle est à cette date la valeur de l'obligation, en supposant qu'elle sera remboursée la dernière année ?

ANNEXE À L'EXERCICE 4

A rendre avec votre copie

Vous pouvez noter un code sur la première page de votre copie et le reporter ici :

	A	B	C	D	E	F
1	Période **(p)**	Capital restant dû (CRD) en début de période $(\mathbf{C_{p-1}})$	Intérêt de la période $(\mathbf{I_p})$	Amortissement de la période $(\mathbf{M_p})$	Annuité de la période $(\mathbf{A_p})$	Capital restant dû en fin de période $(\mathbf{C_p})$
2	*Année* 1					
3	*Année* 2					
3	*Année* 3					
4	…					

UNIVERSITÉ DE CERGY-PONTOISE
U.F.R. Economie et Gestion **L2 - S3**
Licence d'Économie et Finance / Licence de Gestion

FIN 201 : MATHÉMATIQUES FINANCIÈRES

Corrigé du Partiel - Seconde session - Juin 2015

Exercice 1 - 6 points

1. • **1 point** Soit j la durée du prêt en jours, on a $C_0 = 250\,000$ € et $C_j = 253\,062,50$ €. D'après la formule **(II.2c)**, on a :
$j = \left(\dfrac{C_j - C_0}{C_0}\right)\left(\dfrac{360}{r}\right) = \left(\dfrac{3062,50}{250000}\right)\left(\dfrac{360}{0,07}\right) = 63$ jours. Le prêt a été remboursé le 15 juin 2015 (17 j. en avril, 31 j. en mai et 15 j. en juin)

2. • **1 point** Les intérêts fournis par ce placement sont égaux à $I = 300\,000 \times 0,06 \times \dfrac{8}{12} = 12\,000$€. La banque ne prête donc que $C = 300\,000 - 12\,000 = 288\,000$€, et l'emprunteur remboursera 300 000 € dans 8 mois. Le taux d'intérêt effectif r_e vérifie donc $288\,000 \times r_e \times \dfrac{8}{12} = 12\,000 \iff r_e = \dfrac{12\,000}{288\,000 \times 8/12} = 0,0625$ soit $r_e = 6,25\%$
Ou bien, en utilisant directement la formule **(II.3)** : $r_e = \dfrac{r}{1 - r\frac{8}{12}} = 6,25\%$.

3. • **1 point** Soit C_0 le capital initial. Avec la formule **(II.6d)**, on cherche n (en années) tel que $C_n = 2C_0 \iff C_0 \times 1,023^n = 2C_0 \iff n = \dfrac{\ln 2}{\ln 1,023} \approx 30,4821$ soit environ 30 ans et 6 mois.

4. • **1 point** Le taux mensuel proportionnel est (formule **(II.9)**) : $\dfrac{5,25}{12} = 0,4375\%$ et le taux équivalent est (formule **(II.8)**) : $r_e = 1,0525^{1/12} - 1 \approx 0,4273\%$

5. • **1 point** On peut donner une justification directement en rappelant que le taux proportionnel est inférieur au taux équivalent : donc le taux annuel équivalent à un taux trimestriel de 1% est supérieur à un taux annuel proportionnel à un taux trimestriel de 1% (i.e. 4%) : il vaut mieux choisir le second placement.
Ou bien, on peut calculer le capital acquis au bout d'un an avec ces deux placements : Soit C_0 le capital initial. Avec le premier placement, on obtient au bout d'un an : $C_0 \times 1,04$ et avec le second placement $C_0 \times 1,01^4 \approx C_0 \times 1,0406$: le second placement est le plus intéressant.

6. • **1 point** Le taux mensuel proportionnel a un taux annuel de $3,3\%$ est $r_{12} = \dfrac{0,033}{12} = 0,275\%$
Le taux annuel équivalent est (formule **(II.10)**) : $r = 1,00275^{12} - 1 \approx 3,35\%$.

Exercice 2 - 3 points

1. **• 1 point** On doit déterminer l'annuité constante A qui permet de constituer une valeur finale VF_n de 60 000 € au bout de $n = 8$ ans au taux annuel : $r = 1,75\%$: D'après la formule **(III.4)**, A vérifie : $VF_n = A\times\left(\dfrac{(1+r)^n - 1}{r}\right)$, soit $60000 = A\times\left(\dfrac{1,0175^8 - 1}{0,0175}\right) \iff A = 60000\times\left(\dfrac{0,0175}{1,0175^8 - 1}\right) = 7052,58$ €

2. **• 1 point** On cherche n tel que :
$60000 = 6000 \times \left(\dfrac{1,0175^n - 1}{0,0175}\right) \iff \dfrac{60000}{6000} \times 0,0175 + 1 = 1,0175^n$
$\iff 1,175 = 1,0175^n \iff n = \dfrac{\ln(1,175)}{\ln 1,0175} \approx 9,30$ années soit 9 ans et 108 jours environ

3. **• 1 point** Si je souhaite néanmoins obtenir 60 000 € au bout de 8 ans, il faut trouver une banque qui propose le taux r vérifiant :
$60000 = 6000 \times \left(\dfrac{(1+r)^8 - 1}{r}\right) \iff \dfrac{(1+r)^8 - 1}{r} = 10$: il faut s'aider du solveur de la calculatrice : $r \approx 6,29\%$

Exercice 3 - 3 points

1. **• 1 point** Il s'agit d'un prêt à la consommation, le taux d'intérêt mensuel est donc un taux mensuel équivalent (formule **(II.8)**) : $r_{12} = 1,04^{1/12} - 1 \approx 0,327374\%$

   Calcul de la mensualité (formule **(IV.9)**) : $A = \dfrac{50000 \times r_{12}}{1 - (1+r_{12})^{-72}} = 780,63$ €

2. (a) **• 0,5 point** La mensualité, impliquant les frais de virement est donc : $780,63 + 0,5 = 781,13$ €

   (b) **• 0,5 point** Le montant reçu en date 0 : $50\,000 - 120 = 49\,880$ €

   (c) **• 0,5 point** Le taux d'intérêt effectif global x vérifie donc l'équation :

$$49\,880 = 781,13\frac{1-(1+x)^{-72}}{x}$$

   (d) **• 0,5 point** Le solveur de la calculatrice donne : $x \approx 0,3360762\%$
   On convertit ce taux en taux annuel (Formule du taux équivalent) :
   $r = (1 + 0,003360762)^{12} - 1 \approx 4,11\%$

Exercice 4 - 4,5 points

1. **2 points** On applique la règle fondamentale N°2 « la valeur actuelle de la suite des annuités est égale au montant du capital emprunté » (formule **(IV.6a)**)

$$A_1 \times 1,05^{-1} + A_2 \times 1,05^{-2} + \cdots + A_9 \times 1,05^{-9} + A_{10} \times 1,05^{-10} = 100\,000$$

$$\iff \quad 33\,921,78 \times 1,05^{-1} + A\left(1,05^{-2} + \cdots + 1,08^{-10}\right) = 100\,000$$

$$\iff \quad 32\,306,46 + A \times 1,05^{-2}\left(\frac{1-1,05^{-9}}{1-1,05^{-1}}\right) = 100\,000$$

$$\iff \quad A \times 1,05^{-1}\left(\frac{1-1,05^{-9}}{0,05}\right) = 67\,693,54$$

$$\iff \quad A = 10\,000 \text{ €}$$

2. • **1 point** On utilise la Règle N°3 « Le capital restant dû après versement de la 5$^{\text{ième}}$ annuité est la différence entre la valeur acquise à la période 5 par le capital emprunté et la somme des valeurs acquises à cette même date par les 5 annuités déjà versées » (formule **(IV.7)**) :

$$\begin{aligned}
C_5 &= C_0(1+r)^5 - \sum_{k=1}^{5} A_k(1+r)^{5-k} \\
&= 100\,000 \times 1,05^5 - \left(33\,921,78 \times 1,05^4 + \sum_{k=2}^{5} 10\,000 \times 1,05^{5-k}\right) \\
&= 86\,396,02 - 10\,000\left(\frac{1-1,05^4}{-0,05}\right) \\
&= 86\,396,02 - 43\,101,25 = 43\,294,77 \text{ €}
\end{aligned}$$

3. • **1,5 point**

	A	B	C	D	E	F
1	Période **(p)**	Capital restant dû (CRD) en début de période $(\mathbf{C_{p-1}})$	Intérêt de la période $(\mathbf{I_p})$	Amortissement de la période $(\mathbf{M_p})$	Annuité de la période $(\mathbf{A_p})$	Capital restant dû en fin de période $(\mathbf{C_p})$
2	*Année* 1	100 000	$= B2 \star 0,05$	$= E2 - C2$	33 921, 78	$= B2 - D2$
3	*Année* 2	$= F2$	$= B3 \star 0,05$	$= E3 - C3$	10 000	$= B3 - D3$
3	*Année* 3	$= F3$	$= B4 \star 0,05$	$= E4 - C4$	$= \$E\$3$	$= B4 - D4$
4	⋮					

Exercice 5 - 6 points

1. • **1 point** Soit A l'annuité constante « théorique »(dans le sens où l'on doit amortir un nombre entier d'obligations). La formule **(V.9)** donne :
   $A = N \times V_N \times \left(\dfrac{r}{1-(1+r)^{-n}}\right) = 100\,000\,000 \times \left(\dfrac{0,09}{1-1,09^{-8}}\right) \approx 18\,067\,437,78$ €

2. • **1 point** Nombre d'obligations amorties la première année (formule **(V.11)**) :
   $\mu_1 = 1\,000\,000 \times \left(\dfrac{0,09}{1,09^8 - 1}\right) \approx 90\,674,38$. Soit $\mu_1 = 90\,674$ (à l'unité près !)

   • Seconde année : La suite (μ_p) est une suite géométrique de raison $q = 1+r = 1,09$, donc $\mu_2 = 98\,835$.

3. **2 points** Soit t le taux de rendement actuariel pour l'obligataire à l'émission : on compare à la date 0 les sommes versées et la valeur actuelle de la suite des annuités évaluées au taux t (formule **(V.15)**) :
   $$1\,000\,000 \times 99,5 = \sum_{k=1}^{8} A_k(1+t)^{-k} = A \times \left(\frac{1-(1+t)^{-8}}{t}\right)$$
   $$= 1\,000\,000 \times 100 \times \left(\frac{0,09}{1-1,09^{-8}}\right) \times \left(\frac{1-(1+t)^{-8}}{t}\right)$$
   $$\Longleftrightarrow 99,5 = 18,06743778 \times \left(\frac{1-(1+t)^{-8}}{t}\right)$$
   On résout : $\dfrac{1-(1+t)^{-8}}{t} \approx 5,50714502$, avec le solveur de la calculatrice $t \approx 9,1351\%$

4. • **2 points** Le 1[er] janvier 2015, juste après le détachement du coupon, trois amortissements ont eu lieu.
   « la valeur d'une obligation est égale à la somme des flux futurs actualisés qu'elle dégage (coupons & valeur de remboursement) »
   A cette date, la valeur actualisée d'une obligation, en supposant qu'elle sera remboursée la dernière année, est :
   $VA = \displaystyle\sum_{k=1}^{5} A_k(1+r)^{-k}$ où $A_1 = \cdots = A_4 = 9$ € et $A_5 = 109$
   $VA = 9 \times \left(\dfrac{1-(1+r)^{-4}}{r}\right) + 109 \times (1+r)^{-5}$
   • si $r = 5\%$: $VA \approx 117,32$ €
   (La valeur de l'obligation s'accroît lorsque le taux de marché diminue)