UNIVERSITÉ DE CERGY-PONTOISE

U.F.R. Economie et Gestion **L2 - S3**

Licence d'Économie et Finance / Licence de Gestion

FIN 201 : MATHÉMATIQUES FINANCIÈRES

Partiel - Janvier 2016 - 2H00

CALCULATRICES SANS MODULE DE CALCUL FORMEL AUTORISÉES
FORMULAIRE SANS ANNOTATION AUTORISÉ
LES PORTABLES DOIVENT ÊTRE DÉBRANCHÉS ET RANGÉS.

CONSIGNES DE RÉDACTION

Vous devez :

• Présenter vos calculs, en précisant quelle est l'inconnue cherchée.

• Préciser le numéro de la formule utilisée et l'écrire avec les données numériques.

• Isoler l'inconnue cherchée (lorsque c'est possible), ou bien préciser que vous utilisez le solveur de votre calculatrice.

• Donner votre solution : arrondir au centime lorsqu'il s'agit d'une valeur monétaire, arrondir également les taux d'intérêts annuels à deux chiffres après la virgule, comme par exemple $3,14\%$**, et les taux d'intérêts mensuels à quatre chiffres après la virgule**

La notation tiendra compte de ces consignes.

Exercice 1 - 5 points

Les questions de cet exercice sont indépendantes les unes des autres.

1. Un capital de 320 000 € prêté le 17 septembre 2015 à $4,3\%$ (intérêts simples commerciaux) a une valeur acquise à la fin du prêt égale à 323 784 €. Quelle est la durée (en jours) du prêt ? A quelle date ce prêt a-t-il été remboursé ?

2. Une banque prête à intérêts précomptés au taux de 3% un capital de 15 000 000 € pendant 9 mois. Quel est le montant que reçoit effectivement l'emprunteur ? Calculer le taux effectif de ce placement. (intérêts simples commerciaux)

3. Monsieur VulgumPecus se demande au bout de combien de temps (arrondi à l'année près) un capital placé sur son livret A (au taux de $0,75\%$) aura doublé de valeur. (intérêts composés commerciaux).

4. Une banque annonce qu'elle pratique un taux annuel de $4,5\%$ pour ses prêts immobiliers. En réalité, les intérêts sont versés mensuellement au taux proportionnel. Quel est le taux annuel équivalent ?

5. Le 7 décembre 2015, un effet commercial à échéance du 5 février 2016 et de nominal égal à 250 000 € est remis à l'escompte au taux d'escompte de 6%. Calculer le montant de l'escompte commercial et le taux d'intérêt effectif pour la banque (intérêts simples commerciaux).

Exercice 2 - 4 points

M. et Mme Baratéon décident de contracter un emprunt **à la consommation** de 40 000 € auprès d'un organisme de crédit afin d'acheter un nouveau fauteuil. Le taux annuel proposé par la banque est de 3%, et la durée prévue de 5 ans. Le prêt sera remboursé par mensualités constantes.

1. Calculer la mensualité théorique de ce prêt.
2. Calculer le premier amortissement M_1 puis le 26$^{\text{ième}}$ amortissement.
3. Le prêt n'ayant pas été octroyé par leur banque, celle-ci prélève sur chaque virement 1 €. De plus l'organisme de crédit prélève lors de la signature du contrat des frais de dossier de 300 €. Déterminer le taux effectif **annuel** de ce prêt.
4. M. et Mme Baratéon décident de rembourser leur emprunt par anticipation, juste après le 26$^{\text{ième}}$ versement. Dans ce cas, l'organisme de crédit prélève une pénalité égale à 2% du montant restant dû. Calculer le montant que les Baratéon doivent alors rembourser à l'organisme de crédit.

Exercice 3 - 5 points

À la naissance de leur fils Tirion, M. et Mme Lannyster décident d'ouvrir un compte qu'ils approvisionneront une fois par an le jour de l'anniversaire de leur fils, le premier versement ayant lieu le jour de la naissance et le dernier versement ayant lieu le jour de ses 18 ans.

Tirion disposera ainsi d'un capital qui devra lui permettre de financer ses longues études supérieures de sténo-dactylo.

Il prévoit d'avoir besoin de revenus **mensuels** réguliers pendant 5 ans à compter du mois suivant son 18$^{\text{ième}}$ anniversaire.

La banque propose un placement à 3% par an. On utilisera un taux proportionnel.

1. On suppose que M. et Mme L. versent 1 000 € chaque année sur le compte de Tirion : de quelle somme disposera-t-il le jour de ses 18 ans, juste après le versement ?
2. On suppose que M. et Mme L. versent 1 000 € la première année et qu'ensuite ils augmentent les versements de 3% : de quelle somme disposera leur fils le jour de ses 18 ans, juste après le versement ?
3. En tenant compte de cette seconde hypothèse, de quelle somme (constante) peut disposer Tirion chaque mois pendant 5 ans, en supposant que le compte soit vide après le 60$^{\text{ième}}$ retrait ?
4. Une banque concurrente leur propose de verser 1 000 € chaque année, sur la même durée, pour que leur fils puisse percevoir 600 € par mois pendant 60 mois : quel est le taux de placement proposé par cette banque ?

Exercice 4 - 6 points

La société *Britt♡ny* émet un emprunt obligataire répondant aux caractéristiques suivantes :

- Nombre d'obligations émises : 100 000 obligations
- Nominal du titre : 56 €
- Valeur d'émission : 55 €
- Remboursement au pair
- Taux d'intérêt annuel : $7,7\%$
- Le remboursement se fera par n annuités quasi-constantes.

1. La société remboursera 6 880 obligations de plus la dernière année que la première : en déduire le nombre d'annuités n (on donnera la valeur trouvée à 10^{-5} près puis on arrondira à l'unité)
2. On admet que $n = 15$. Déterminer le montant de l'annuité théorique.
3. Déterminer le nombre effectif d'obligations remboursées et les annuités effectives des deux premières années.
4. Calculer, à l'émission, le taux de rendement de cet emprunt pour l'obligataire.
5. Déterminer à l'émission, le taux de rendement attaché aux obligations remboursées lors de la 5ième échéance.

UNIVERSITÉ DE CERGY-PONTOISE

U.F.R. Economie et Gestion **L2 - S3**

Licence d'Économie et Finance / Licence de Gestion

FIN 201 : MATHÉMATIQUES FINANCIÈRES

Corrigé du Partiel - Janvier 2016

Exercice 1 - 5 points

1. • **1 point** Soit j la durée du prêt en jours, on a $C_0 = 320\,000$ € et $C_j = 323\,784$ €. D'après la formule **(II.2c)**, on a :

   (0,5 pt) $j = \left(\frac{C_j - C_0}{C_0}\right)\left(\frac{360}{r}\right) = \left(\frac{3\,784}{320\,000}\right)\left(\frac{360}{0,043}\right) = 99$ jours.

   (0,5 pt) Le prêt a été remboursé le 25 décembre 2015 (13 j. en septembre, 31 j. en octobre, 30 j. en novembre et 25 j. en décembre)

2. • **1 point**

   (0,5 pt) Les intérêts fournis par ce placement sont égaux à $I = 15\,000\,000 \times 0,03 \times \frac{9}{12} = 337\,500$ €. La banque ne prête donc que $C = 15\,000\,000 - 337\,500 = 14\,662\,500$ €.

   (0,5 pt) Le taux d'intérêt effectif r_e vérifie donc : $14\,662\,500 \times r_e \times \frac{9}{12} = 337\,500 \iff r_e = \frac{337\,500}{14\,662\,500 \times 9/12} \approx 0,03069$ soit $r_e \approx 3,07\%$

   Ou bien, en utilisant directement la formule **(II.4)** : $r_e = \frac{r}{1 - r\frac{9}{12}} \approx 3,07\%$.

3. • **1 point** Soit C_0 le capital initial. Avec la formule **(II.6d)**, on cherche n (en années) tel que $C_n = 2C_0 \iff C_0 \times 1,0075^n = 2C_0 \iff n = \frac{\ln 2}{\ln 1,0075} \approx 92,76$ soit environ 93 ans ...

4. • **1 point** Le taux mensuel proportionnel à un taux annuel de $4,5\%$ est (formule **(II.9)**) $r_{12} = \frac{4,5}{12} = 0,375\%$.

   Le taux annuel équivalent est (formule **(II.10)**) : $r = 1,00375^{12} - 1 \approx 4,59\%$.

5. • **1 point**

   (0,5 pt) Il y a exactement 60 jours entre ces deux dates (on ne compte pas le premier jour, donc 24 j. en décembre, 31 jours en janvier et 5 j. en février). La banque verse le jour de la conclusion du contrat :

   $250\,000\left(1 - 0,06 \times \frac{60}{360}\right) = 247\,500$ €. L'escompte est donc de $2\,500$ euros.

   (0,5 pt) Avec la formule **(II.4)**, on détermine le taux d'intérêt effectif pour la banque : $r_e = \frac{0,06}{1 - 0,06 \times 60/360} \approx 6,06\%$

Exercice 2 - 4 points

1. • **1 point** La mensualité théorique M est donnée par la formule **(IV.9)** : (avec un taux mensuel équivalent puisqu'il s'agit d'un prêt à la consommation : $r_{12} = (1,03)^{1/12} - 1 \approx 0,2466\%$)

$$M = \frac{r_{12} \times 40000}{1 - (1 + r_{12})^{-60}} = 718,03\,€$$

2. • **1 point** Le premier amortissement M_1 vérifie $M_1 + I_1 = M$ où $I_1 = 40\,000 \times r_{12} = 98,65\,€$ est le montant des intérêts payés lors du premier versement. Donc $M_1 = 619,38$ €.

   D'après la formule **(IV.11)**, la suite des amortissements est la suite géométrique de raison $(1 + r_{12})$ et de premier $M_{26} = M_1 \times (1 + r_{12})^{25} = 658,72\,€$.

3. • **1 point** Les Baratéon reçoivent 39 700 € à la signature du contrat, et remboursent chaque mois 719,03 €.

   Le taux d'intérêt mensuel effectif t vérifie donc l'équation (formule **(IV.9)**)

$$39\,700 = 719,03 \times \frac{1 - (1 + t)^{-60}}{t}$$

   Le solveur de la calculatrice donne $t \approx 0,276730\%$, soit un taux annuel équivalent de $3,37\%$ environ.

4. • **1 point** Le capital restant dû après le versement de la $26^{\text{ième}}$ mensualité est donné par la formule **(IV.15)** :

$$C_{26} = 40000 \times \frac{(1 + r_{12})^{60} - (1 + r_{12})^{26}}{(1 + r_{12})^{60} - 1} = 23389,79$$

   M. et Mme Baratéon devront dont rembourser à l'organisme de crédit :
   $23389,79 \times 1,02 = 23\,857,59\,€$.

Exercice 3 - 5 points

1. • **1 point** D'après la formule **(III. 4)**, la valeur finale des **19** versements, VF vérifie :
   $VF = A \times \dfrac{(1 + r)^n - 1}{r} = 1000 \times \dfrac{1,03^{19} - 1}{0,03} = 25\,116,87\,€$

2. • **1 point** Ici les versements sont les termes d'une suite géométrique de raison $1,03 = 1 + r$. D'après la formule **(III. 7)**, $VF_n = 19 \times 1000(1,03)^{18} = 32\,346,23\,€$

3. • **1,5 point**

   (0,5 pt) Le taux mensuel proportionnel $r_{12} = \dfrac{3}{12} = 0,25\%$

   (1 pt) On cherche la mensualité M qui vérifie la formule **(III. 4)** (ici on connaît la valeur actuelle, au jour des 18 ans de Titi !) :

   $32\,346,23 = M\left(\dfrac{1 - (1 + r_{12})^{-60}}{r_{12}}\right) \iff M = \dfrac{32\,346,23 \times r_{12}}{1 - (1 + r_{12})^{-60}} = 581,22$ €.

4. • **1,5 point** On cherche le taux d'intérêt actuariel r qui égalise entrées et sorties de fonds actualisées au jour des 18 ans de Tirion. On note $r_{12} = \dfrac{r}{12}$ le taux mensuel équivalent.

$$\begin{aligned}
1000\left(\frac{(1+r)^{19}-1}{r}\right) &= 600\left(\frac{1-(1+r_{12})^{-60}}{r_{12}}\right)\\
\iff 5\left((1+r)^{19}-1\right) &= 36\left(1-(1+r/12)^{-60}\right)\\
\iff (1+r)^{19}+7,2(1+r/12)^{-60}-8,2 &= 0
\end{aligned}$$

Il faut utiliser le solveur de la calculatrice pour trouver la solution non nulle : $r \approx 5,325\%$

Exercice 4 - 6 points

1. • **1,5 point** D'après la formule **(V.10)**, la suite (μ_p) du nombre d'obligations amorties chaque année est une suite géométrique de raison $1+r = 1,07$ et de premier terme μ_1. On cherche donc n tel que $\mu_n - \mu_1 = \mu_1 \times 1,077^{n-1} - \mu_1 = \mu_1(1,077^{n-1}-1) = 6880$, donc $\mu_1 = \dfrac{6\,880}{1,077^{n-1}-1}$

   Avec la formule **(V.11)** : $\mu_1 = 100\,000 \times \dfrac{0,077}{1,077^{n}-1}$

   On a donc (E) : $\dfrac{6\,880}{1,077^{n-1}-1} = 100\,000 \times \dfrac{0,077}{1,077^{n}-1}$

$$\begin{aligned}
(E) \iff\ & 6880 \times (1,077^{n}-1) = 7700 \times (1,077^{n}-1)\\
\iff\ & 1,077^{n}-1 = \frac{7700}{6880} \times (1,077^{n-1}-1)\\
\iff\ & 1,077^{n} - \frac{770}{688}1,077^{n-1} = 1-\frac{770}{688}\\
\iff\ & 1,077^{n-1}\left(1,077-\frac{770}{688}\right) = 1-\frac{770}{688} \iff 1,077^{n-1} \approx 2,825248\\
\iff\ & n-1 \approx \frac{\ln 2,825248}{\ln 1,077} \approx 14,00114046 \quad \text{d'où } n \approx 15,00114
\end{aligned}$$

2. • **0,5 point** Soit A le montant théorique de l'annuité : la formule **(V.9)** donne :

$$A = N \times V_N \times \left(\frac{r}{1-(1+r)^{-n}}\right) = 100\,000 \times 56 \times \left(\frac{0,077}{1-(1,077)^{-15}}\right) \approx 642\,310,24\,€.$$

3. • **2 points**

   (0,5 pt) On peut (par exemple) déterminer μ_1 grâce à ce qui a été présenté à la question **1.** : $\mu_1 = \dfrac{6880}{1,077^{14}-1} \approx 3770$

   (0,5 pt) La première annuité est donc égale à $100\,000 \times 56 \times 0,077 + 3770 \times 56 = 642\,320\,€$.

   (0,5 pt) Le second amortissement est $\mu_2 = \mu_1 \times 1,077 \approx 4060$

   (0,5 pt) La seconde annuité est donc égale à $(100\,000 - 3770) \times 56 \times 0,077 + 4060 \times 56 = 642\,303,76\ €$.

4. • **1 point** Soit t le taux de rendement actuariel pour l'obligataire à l'émission : on compare à la date 0 les sommes versées et la valeur actuelle de la suite des annuités évaluées au taux t (formule **(V.15)**) :

$100\,000 \times 55 = \sum_{k=1}^{15} A_k(1+t)^{-k} = A \times \left(\dfrac{1-(1+t)^{-15}}{t}\right)$

$\iff \dfrac{1-(1+t)^{-15}}{t} \approx 8,56284029$. Le solveur de la calculatrice donne : $t \approx 7,99357\%$

5. ● **1 point** Si l'obligataire voit son obligation remboursée la $5^{\text{ième}}$ année, il a reçu $4,31$ € les 4 premières années et $60,31$ € la $5^{\text{ième}}$ année. Soit x le taux cherché : on écrit à la date 0 l'égalité entre les sommes engagées et les sommes perçues (actualisées)

   $55 = \sum_{k=1}^{5} 4,31 \times (1+x)^{-k} + 56 \times (1+x)^{-5}$

   $55 = 4,31 \times \left(\dfrac{1-(1+x)^{-5}}{x}\right) + 56(1+x)^{-5}$. La calculatrice donne : $x \approx 0,081454$, soit $8,15\%$ environ