UNIVERSITÉ DE CERGY-PONTOISE

U.F.R. Economie et Gestion **L2 - S3**

Licence d'Économie et Finance / Licence de Gestion

FIN 201 : MATHÉMATIQUES FINANCIÈRES

Partiel - Janvier 2015 - 2H00

CALCULATRICES SANS MODULE DE CALCUL FORMEL AUTORISÉES
FORMULAIRE SANS ANNOTATION AUTORISÉ
LES PORTABLES DOIVENT ÊTRE DÉBRANCHÉS ET RANGÉS.

CONSIGNES DE RÉDACTION : Vous devez présenter vos calculs, en particulier expliquer ce que vous calculez, écrire les formules utilisées avec les données numériques avant d'isoler l'inconnue cherchée (lorsque c'est possible) et de donner votre solution : la notation tiendra compte de ces consignes.

Exercice 1 - 3 points

1. Quels sont les taux mensuels proportionnel et équivalent au taux annuel de $7,5\%$?
2. Un capital de 200 000 € rapporte des intérêts semestriels de 10 000 €. Quel est le taux annuel équivalent de ce placement ?
3. Une banque annonce qu'elle pratique un taux annuel de $3,6\%$ pour ses prêts immobiliers. En réalité, les intérêts sont versés mensuellement au taux proportionnel. Quel est le taux annuel équivalent ?

Exercice 2 - 3 points

Une entreprise prévoit de développer son département de R&D de façon significative et envisage un investissement (couvrant l'embauche du personnel, l'achat de locaux etc ...) de 5 M€. Le directeur financier de la société, considère que les flux nets de trésorerie générés par cet investissement seront les suivants :

Année	1	2	3	4	5
Flux (en M€)	0,5	1,5	2	2	1

Les apporteurs de capitaux de cette société ont une exigence de rentabilité de 7% (taux d'actualisation).

1. Calculer la valeur actuelle des flux de trésorerie futurs.
2. Calculer la valeur actuelle nette. Faut-il entreprendre ce projet ?
3. Donner l'équation vérifiée par le taux de rentabilité interne (noté t). Donner une valeur approchée à 10^{-2} près de ce TRI.
4. Le directeur financier a peut-être été un peu optimiste pour le flux d'année 4 qui pourrait s'avérer bien inférieur à 2 M€. En dessous de quel flux d'année 4 le projet ne doit-il plus être entrepris ?

Exercice 3 - 4 points

En 2009, M. X a contracté un emprunt immobilier auprès de sa banque pour un montant de 250 000 € qu'il rembourse par mensualités constantes sur 20 ans au taux annuel de $4,8\%$ (le taux mensuel est alors proportionnel). En 2014, immédiatement après la 60$^{\text{ième}}$ mensualité, il renégocie sa dette et compare deux propositions :

• Sa banque lui propose un nouveau taux de $3,6\%$ sans pénalités de remboursement anticipé. La durée est réduite à 12 ans.

• Une banque concurrente lui propose un taux de $2,7\%$, mais dans ce cas il devra payer des pénalités de remboursement à sa banque : ces pénalités, de 3% du capital restant dû, sont incluses dans le prêt accordé par cette seconde banque. La durée est également de 12 ans.

1. Calculer le montant de la mensualité du prêt initial contracté par M. X.
2. Déterminer le capital restant dû par M. X. après le versement de la 60$^{\text{ième}}$ mensualité.
3. Calculer le montant de la nouvelle mensualité avec la proposition de la banque de M. X.
4. Calculer le montant du capital emprunté, puis le montant de la nouvelle mensualité avec la proposition de la banque concurrente.

Exercice 4 - 3 points

Un prêt de 500 000 € est accordé à une entreprise au taux annuel de 8%. Il est amortissable en 12 ans par annuités non constantes : chaque annuité est majorée de 7% par rapport à la précédente

1. Déterminer le montant de la première annuité.
2. Compléter par les formules adéquates la feuille de calcul du tableur en annexe.

Exercice 5 - 7 points

Un emprunt obligataire possède les caractéristiques suivantes :

• Nombre d'obligations émises : $N = 100\,000$

• Valeur nominale d'une obligation : $V_N = 100$ €

• Valeur d'émission d'une obligation : $V_E = 99,5$ €

• Valeur de remboursement d'une obligation : $V_R = V_N$

• Taux d'intérêt nominal : $r = 5\%$

• Amortissement sur $n = 20$ ans par annuités presque constantes.

1. Calculer le montant théorique de l'annuité.
2. Déterminer le nombre μ_1 d'obligations amorties la première année, puis μ_2 et μ_3
3. Au bout de combien d'échéances l'émetteur aura-t-il amorti la moitié du capital ?
4. Calculer le taux de rendement actuariel t à l'émission pour l'obligataire.
5. Calculer le taux de rendement actuariel x pour un obligataire qui verrait son obligation remboursée la 8$^{\text{ième}}$ année.
6. On suppose que l'émetteur supporte à l'émission des frais bancaires égaux à 2% du nominal de l'emprunt. Calculer le taux de revient t' à l'émission pour l'émetteur.

ANNEXE À L'EXERCICE 4

à rendre avec votre copie

	A	B	C	D	E	F
1	Période $(\mathbf{p})$	Capital restant dû en début de période $(\mathbf{C_{p-1}})$	Intérêt de la période $(\mathbf{I_p})$	Amortissement de la période $(\mathbf{M_p})$	Annuité de la période $(\mathbf{A_p})$	Capital restant dû en fin de période $(\mathbf{C_p})$
2	*Année* 1	500 000				
3	*Année* 2					
4	…					

UNIVERSITÉ DE CERGY-PONTOISE

U.F.R. Economie et Gestion **L2 - S3**

Licence d'Économie et Finance / Licence de Gestion

FIN 201 : MATHÉMATIQUES FINANCIÈRES

Corrigé du Partiel - Janvier 2015

Exercice 1 - 3 points

1. • **1 point** Le taux mensuel proportionnel est : **(II.9)** $r'_{12} = \dfrac{r}{12} = 0,00625$ soit $0,625\%$
   Le taux équivalent r_{12} vérifie **(II.8)** $(1+r_{12})^{12} = 1,075 \Longleftrightarrow r_{12} = 1,075^{1/12} - 1 \approx 0,006045$ soit $0,6045\%$.
2. • **1 point** Le taux d'intérêt semestriel est $r_2 = \dfrac{10000}{200000} = 0,05$ soit un taux annuel **(II.8)** $r = (1,05)^2 - 1 = 0,1025$ soit $10,25\%$
3. • **1 point** Le taux mensuel proportionnel a un taux annuel de $3,6\%$ est $r_{12} = 0,3\%$
   Le taux annuel équivalent est **(II.8)** $r = 1,003^{12} - 1 \approx 0,0366$ soit $3,66\%$

Exercice 2 - 3 points

1. • **0,5 point** $VA_0 = \dfrac{0,5}{1,07} + \dfrac{1,5}{1,07^2} + \dfrac{2}{1,07^3} + \dfrac{2}{1,07^4} + \dfrac{1}{1,07^5} \approx 5,65\text{M€}$
2. • **0,5 point** **(III.10)** $VAN = 0,65\text{M€}$, on peut réaliser cet investissement.
3. • **1 point** Le TRI t vérifie **(III.11)** :
$$\frac{0,5}{1+t} + \frac{1,5}{(1+t)^2} + \frac{2}{(1+t)^3} + \frac{2}{(1+t)^4} + \frac{1}{(1+t)^5} - 5 = 0$$
   On doit utiliser la calculatrice pour avoir une valeur approchée : $t \approx 11,30\%$
4. • **1 point** On cherche le flux x de l'année 4 tel que :
   $\dfrac{0,5}{1,07} + \dfrac{1,5}{1,07^2} + \dfrac{2}{1,0,7^3} + \dfrac{x}{1,07^4} + \dfrac{1}{1,07^5} - 5 = 0$
   $\Longleftrightarrow \dfrac{x}{1,07^4} = 5 - \dfrac{0,5}{1,07} - \dfrac{1,5}{1,07^2} - \dfrac{2}{1,07^3} - \dfrac{1}{1,07^5} \approx 0,87697 \Longleftrightarrow x \approx 1,15$ M€

Exercice 3 - 4 points

1. • **0,5 point** Calcul du montant de la mensualités du premier prêt avec le taux proportionnel $r_{12} = \dfrac{0,048}{12} = 0,004$, et **(IV.9)** $M = \dfrac{0,004 \times 250\,000}{1-(1,004)^{-240}} = 1\,622,39$ €.
2. • **1 point** Calcul du capital restant dû après le versement de la $60^{\text{ième}}$ mensualité **(IV.15)** $C_{60} = 250\,000 \times \left(\dfrac{1,004^{240} - 1,004^{60}}{1,004^{240} - 1}\right) = 207\,888,73$ €.
3. • **1 point** Montant des 144 mensualités avec la proposition de sa banque : au taux proportionnel $r'_{12} = \dfrac{0,036}{12} = 0,003$, et $M' = \dfrac{0,003 \times 207\,888,73}{1-(1,003)^{-144}} = 1\,780,02$ €.

4. • **1,5 point** M. X doit emprunter $207888,73 \times 1,03 = 214\,125,39$ € auprès de la banque concurrente.

   Montant des 144 mensualités avec la proposition de la seconde banque : au taux proportionnel $r''_{12} = 0,00225$

   $M'' = \dfrac{0,00225 \times 214\,125,39}{1-(1,00225)^{-144}} = 1\,742,52$ €

Exercice 4 - 3 points

1. • **1 point** Calcul de la première annuité : on est dans le cas où la suite des annuités est en progression géométrique de raison $q = 1,07 \neq 1+r = 1,08$:

   (IV.21) $A_1 = C_0\left(\dfrac{(1+r)^n(1+r-q)}{(1+r)^n - q^n}\right) = 500\,000 \times \dfrac{1,08^{12}(1,08-1,07)}{1,08^{12} - 1,07^{12}} = 47\,337,85$ €

2. • **2 points**

	A	B	C	D	E	F
1	Période **(p)**	Capital restant dû en début de période $(\mathbf{C_{p-1}})$	Intérêt de la période $(\mathbf{I_p})$	Amortissement de la période $(\mathbf{M_p})$	Annuité de la période $(\mathbf{A_p})$	Capital restant dû en fin de période $(\mathbf{C_p})$
2	*Année* 1	500 000	$= B2 \star 0,08$	$= E2 - C2$	47 337, 85	$= B2 - D2$
3	*Année* 2	$= F2$	$= B3 \star 0,08$	$= E3 - C3$	$= E2 \star 1,07$	$= B3 - D3$
4	⋮					

Exercice 5 - 8 points

1. • **1 point** Soit A l'annuité constante « théorique » : **(V.9)** $A = N \times V_N \times \left(\dfrac{r}{1-(1+r)^{-n}}\right) = 100\,000 \times 100 \times \left(\dfrac{0,05}{1-1,05^{-20}}\right) \approx 802\,425,87$ €
2. • **1 point** Le nombre μ_1 d'obligations amorties la première année est **(V.11)** :

   $\mu_1 = 100\,000 \times \dfrac{0,05}{1,05^{20}-1} = 3\,024$ (arrondi à l'unité)

   • La suite $(\mu_n)_{n\geq 1}$ est une suite géométrique de raison $q = 1+r = 1,05$, **(V.12)** donc $\mu_2 = 3175$ et $\mu_3 = 3334$.
3. • **1 point** Soit x le nombre d'échéances nécessaires pour rembourser la moitié du nominal (soit 50 000 obligations) x vérifie :

   $\mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_x = 50\,000 \iff \mu_1\left(\dfrac{1-1,05^x}{1-1,05}\right) = 50\,000 \iff 1,05^x = 1,82672 \iff$

   $x = 12,35$ soit au bout de la $13^{\text{ième}}$ année.
4. • **2 points** Soit t le taux de rendement actuariel pour l'obligataire à l'émission : on compare à la date 0 les sommes versées et la valeur actuelle de la suite des annuités évaluées au taux t :

   $$99,5 \times 100\,000 = \sum_{k=1}^{20} A_k(1+t)^{-k} = A \times \left(\frac{1-(1+t)^{-20}}{t}\right) = 802425,87 \times \left(\frac{1-(1+t)^{-20}}{t}\right)$$

   $$\iff 99,5 = 8,0242587 \times \left(\frac{1-(1+t)^{-15}}{t}\right)$$

On résout : $\dfrac{1-(1+t)^{-20}}{t} \approx 12,4$ à l'aide de la calculatrice et on obtient : $t \approx 5,0591\%$

5. • **2 points** Si l'obligataire voit son obligation remboursée la $8^{\text{ième}}$ année, il a reçu 5 € les 7 premières années et 105 € la $8^{\text{ième}}$ année. Soit x le taux cherché et on écrit à la date 0 l'égalité entre les sommes engagées et les sommes perçues (actualisées)

   $99,50 = \displaystyle\sum_{k=1}^{8} 5 \times (1+x)^{-k} + 100 \times (1+x)^{-8}$

   $99,50 = 5 \times \left(\dfrac{1-(1+x)^{-8}}{x}\right) + 100(1+x)^{-8}$. La calculatrice donne : $x \approx 0,050776$, soit $5,0776\%$

6. • **1 point** L'emprunteur supporte des frais bancaires par obligation de $100 \times 0,02 = 2$ € : il en recevra de l'établissement financier qui gère son emprunt que $97,50$ € par obligation

   Le taux de revient t' pour l'emprunteur vérifie :

   $97,50 = 100 \times \left(\dfrac{0,05}{1-1,05^{-20}}\right) \times \left(\dfrac{1-(1+t')^{-20}}{t'}\right)$

   $\Longleftrightarrow 97,50 = 8,0242587 \times \left(\dfrac{1-(1+t')^{-20}}{t'}\right) \Longleftrightarrow \dfrac{1-(1+t')^{-20}}{t'} = 12,150655$

   et $t' \approx 5,30\%$