Dualité (début) 23/11/2016

Exemple :

$$\max \Pi = 14x_1 + 12x_2 + 18x_3$$

$$\text{t.q.} \begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 \leq 2 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 4 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

forme gén.

Forme can :

$$\max \quad -\Pi + 14x_1 + 12x_2 + 18x_3 = 0$$

$$\text{t.q.} \begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + s_1 = 2 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + s_2 = 4 \\ x_1, x_2, x_3, s_1, s_2 \geq 0 \end{cases}$$

v_i	base	2nd-m	$-\pi$	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	op
	$-\pi$	0	1	14	12	$18 \downarrow$	0	0	L_0
$2/1=2$	s_1	2		2	1	1	1		L_1
$\frac{4}{3}=1{,}33 \leftarrow$	s_2	4		1	1	$\boxed{3}$		1	L_2
	$-\pi$	-24	1	$8 \downarrow$	6	0	0	-6	L_0-6L_2
$\frac{2}{3}/\frac{5}{3}=\frac{2}{5} \leftarrow$	s_1	$\frac{2}{3}$		$\boxed{\frac{5}{3}}$	$\frac{2}{3}$	0	1	$-\frac{1}{3}$	$L_1-\frac{1}{3}L_2$
$\frac{4}{3}/\frac{1}{3}=4$	x_3	$\frac{4}{3}$		$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	1	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}L_2$
	$-\pi$	$-\frac{136}{5}$	1	0	$\frac{14}{5} \downarrow$	0	$-\frac{24}{5}$	$-\frac{22}{5}$	$L_0-\frac{24}{5}L_1$
$\frac{2}{5}/\frac{2}{5}=1 \leftarrow$	x_1	$\frac{2}{5}$		1	$\boxed{\frac{2}{5}}$	0	$\frac{3}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}L_1$
$\frac{6}{5}/\frac{1}{5}=6$	x_3	$\frac{6}{5}$		0	$\frac{1}{5}$	1	$-\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$L_2-\frac{1}{5}L_1$
	$-\pi$	-30	1	-7	0	0	-9	-3	L_0-7L_1
	x_2	1		$\frac{5}{2}$	1	0	$\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{5}{2}L_1$
	x_3	1		$-\frac{1}{5}$	0	1	$-\frac{2}{5}$	$\frac{1}{2}$	$L_2-\frac{1}{2}L_1$

Val. optimale : $\tilde{\pi} = 30$

sol. optimale : $\tilde{x}_2 = 1$, $\tilde{x}_3 = 1$, $\tilde{x}_1 = \tilde{s}_1 = \tilde{s}_2 = 0$

$(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3, \tilde{s}_1, \tilde{s}_2) = (0, 1, 1, 0, 0)$

$$\max \Pi = 14x_1 + 12x_2 + 18x_3$$

t.q. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 \leq 2 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 4 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \\ \hline 14 & 12 & 18 & \Pi \end{array}\right)$$

dual: $\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 14 \\ 1 & 1 & 12 \\ 1 & 3 & 18 \\ \hline 2 & 4 & c \end{array}\right)$

$\min \quad c = 2y_1 + y_2$.

soit $\begin{cases} 2y_1 + y_2 \geq 14 \\ y_1 + y_2 \geq 12 \\ y_1 + 3y_2 \geq 18 \\ y_1 \geq 0, \quad y_2 \geq 0 \end{cases}$.

primal: $\underset{\text{contraintes}}{2} \times 3 \leftarrow$ var

dual : $\underset{\text{contraintes}}{3} \times 2 \leftarrow$ var

2 var $\Rightarrow$ sol. graphique! on le réécrit :

$\min \quad c = 2x + 4y$

t.q. $\begin{cases} 2x + y \geq 14 \\ x + y \geq 12 \\ x + 3y \geq 18 \\ x, y \geq 0 \end{cases}$

déjà fait (ex. 2 p. 318).

On a $\tilde{y}_1 = 9$, $\tilde{y}_2 = 3$, $\tilde{c} = 30$

On écrit Primal et dual en forme standard:
(+ var. d'écart).

PRIMAL

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + s_1 = 2 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + s_2 = 4 \end{cases}$$

DUAL

$$\begin{cases} 2y_1 + y_2 - t_1 = 14 \\ y_1 + y_2 - t_2 = 12 \\ y_1 + 3y_2 - t_3 = 18 \end{cases}$$

on introduit $\tilde{y}_1 = 9$ et $\tilde{y}_2 = 3$ $\longrightarrow$ par dualité : $\tilde{s}_1 = 0$ et $\tilde{s}_2 = 0$

$$\begin{cases} 18 + 3 - t_1 = 14 \\ 9 + 3 - t_2 = 12 \\ 9 + 9 - t_3 = 18 \end{cases} \quad \begin{cases} \tilde{t}_1 = 7 \\ \tilde{t}_2 = 0 \\ \tilde{t}_3 = 0 \end{cases}$$

donc par dualité : $\begin{cases} \tilde{x}_1 = 0 \\ \tilde{x}_2 \neq 0 \\ \tilde{x}_3 \neq 0 \end{cases}$

on déduit : $\begin{cases} x_2 + x_3 = 2 \\ x_2 + 3x_3 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x_3 = 2 \\ -2x_2 = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \tilde{x}_3 = 1 \\ \tilde{x}_2 = 1 \end{cases}$

Résultat : sol. opt. $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3) = (0, 1, 1)$. Ok.

p

<u>Autre exemple</u> l'ex. 3 p. 348.

On a résolu D par voie graphique (ex. 1 p. 317)

on a

$$(D) : (\tilde{z}_1, \tilde{z}_2, \tilde{t}_1, \tilde{t}_2, \tilde{t}_3) = (4, 6, 4, 0, 0) \text{ et } \tilde{\Pi} = 36$$

$$\begin{cases} \tilde{s}_1 = 0 \\ \tilde{s}_2 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \tilde{x}_1 = 0 \\ \tilde{x}_2 \neq 0 \\ \tilde{x}_3 \neq 0 \end{cases}$$

$$(P) \quad \begin{cases} 2{,}5\, x_1 + 3x_2 + x_3 - s_1 = 3 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 - s_2 = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x_2 + x_3 = 3 \\ 3x_2 + 2x_3 = 4 \end{cases} \quad \begin{cases} \tilde{x}_3 = 1 \\ \tilde{x}_2 = \frac{2}{3} \end{cases}$$

donc $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3) = (0, \frac{2}{3}, 1)$

et $\tilde{z} = 36$. Ok.

Maths × gestion, CM 23/11/2016

Chapitre 9. Dualité

Exemple de problème de PL avec la méthode du simplexe

Soit donné le problème suivant

maximiser $\Pi = 14x_1 + 12x_2 + 18x_3$ → fonction objectif (ou f. économique)

→ problème de max

sous les contraintes
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 \leq 2 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 4 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

→ contraintes techniques

variables de décision

condition de non-négativité

Ce problème est déjà en forme canonique (contraintes $\leq$ car c'est un pb de max, et variables de décision non-négatives $\geq$)

Simplexe : il faut mettre le problème en forme standard (inégalités → =) : ajouter variables d'écart.

FORME STANDARD

maximiser $-\Pi + 14x_1 + 12x_2 + 18x_3 = 0$

contraintes
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + s_1 = 2 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + s_2 = 4 \\ x_1, x_2, x_3, s_1, s_2 \geq 0 \end{cases}$$

var. d'écart.

v_i	base	2nd-m	$-\pi$	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	op
	$-\pi$	0	1	14	12	18	0	0	L_0
$\frac{2}{1} = 2$	s_1	2		2	1	1	1		L_1
$\frac{4}{3} = 1,33$	s_2	4		1	1	$\boxed{3}$		1	L_2
	$-\pi$	-24	1	8	6	0	0	-6	$L_0 - 6L_2$
$\frac{2}{3} / \frac{5}{3} = \frac{2}{5}$	s_1	$\frac{2}{3}$		$\boxed{\frac{5}{3}}$	$\frac{2}{3}$	0	1	$-\frac{1}{3}$	$L_1 - \frac{1}{3} L_2$
$\frac{4}{3} / \frac{1}{3} = 4$	x_3	$\frac{4}{3}$		$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	1	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3} L_2$
	$-\pi$	$-\frac{136}{5}$	1	0	$\frac{14}{5}$	0	$-\frac{24}{5}$	$-\frac{22}{5}$	$L_0 - \frac{24}{5} L_1$
$\frac{2}{5} / \frac{2}{5} = 1$	x_1	$\frac{2}{5}$		1	$\boxed{\frac{2}{5}}$	0	$\frac{3}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5} L_1$
$\frac{6}{5} / \frac{1}{5} = 6$	x_3	$\frac{6}{5}$		0	$\frac{1}{5}$	1	$-\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$L_2 - \frac{1}{5} L_1$
	$-\pi$	-30	1	-7	0	0	-9	-3 STOP	$L_0 - 7L_1$
	x_2	1		$\frac{5}{2}$	1	0	$\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{5}{2} L_1$
	x_3	1		$-\frac{1}{5}$	0	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$L_2 - \frac{1}{2} L_1$

val. marginale 9 — val. marginale 3.

Remarque : $\tilde{\pi} = 30$ optimale, et $\tilde{s}_1 = \tilde{s}_2 = 0$: les deux contraintes sont satisfaites avec une égalité (p.ex. on a $2\tilde{x}_1 + \tilde{x}_2 + \tilde{x}_3 = 2$) : on dit que les deux contraintes sont SATURÉES.

9.1. Dualité : définitions

À tout problème de max $\longrightarrow$ on peut associer un problème de min

À tout problème de min $\longrightarrow$ on peut associer un problème de max.

Le problème de départ s'appelle problème primal, le problème associé s'appelle problème dual.

Cas I. Le prob. primal est écrit en forme canonique

Exemple. max $3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = \Pi$

contraintes
$$\begin{cases} 2{,}5x_1 + x_2 + 5x_3 \leq 20 \\ 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 30 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 \leq 16 \\ x_1 \geq 0, \; x_2 \geq 0, \; x_3 \geq 0 \end{cases}$$

PRIMAL

son dual est min $20y_1 + 30y_2 + 16y_3 = c$

contraintes
$$\begin{cases} 2{,}5y_1 + 3y_2 + y_3 \geq 3 \\ y_1 + 3y_2 + 2y_3 \geq 4 \\ 5y_1 + 2y_2 + 4y_3 \geq 2 \\ y_1, y_2, y_3 \geq 0 \end{cases}$$

DUAL.

Règles de passage du primal au dual

On part du primal en forme canonique

1) Sens de l'optimisation inversé : primal max $\Pi \Rightarrow$ dual min c

primal min $c \Rightarrow$ dual max Π

2) Dans les contraintes techniques : primal $\leq \Rightarrow$ dual $\geq$

primal $\geq \Rightarrow$ dual $\leq$

Cependant, les conditions de non-négativité valent aussi pour les nouvelles var. de décision. ($x_i \geq 0 \Rightarrow y_i \geq 0$)

3) Nombre variables x_i dans primal = nombre de contraintes dans le dual

4) Nombre de contraintes dans primal = nombre de var. de décision y_i dans dual

5) Coeffs. f. objectif du primal $\longrightarrow$ 2nd membre des contraintes du dual

6) 2nd membres des contraintes du primal $\longrightarrow$ coeffs. f. objectif du dual

7) colonne de coeffs. des contraintes $\longrightarrow$ ligne

ligne de coeffs. $\longrightarrow$ colonne

Remarque Le dual du dual est le primal de départ

On dit que le passage au dual est une opération INVOLUTIVE.

Cas où le primal n'est pas sous forme canonique

Exemple primal :

$$\max \quad x_1 + x_2 + x_3 = \Pi$$

contraintes
$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 \leq 4 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 \geq 1 \\ 6x_2 + 5x_3 = 6 \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \text{ de signe quelconque} \end{cases}$$

on voudrait $\leq$

on voudrait $\leq$

on voudrait ≥ 0

On transforme le problème en forme canonique

$x_1 - 2x_2 + x_3 \geq 1$ devient $-x_1 + 2x_2 - x_3 \leq -1$

$$6x_2 + 5x_3 = 6 \qquad \begin{cases} 6x_2 + 5x_3 \leq 6 \\ 6x_2 + 5x_3 \geq 6 \end{cases} \qquad \begin{cases} 6x_2 + 5x_3 \leq 6 \\ -6x_2 - 5x_3 \leq -6 \end{cases}$$

x_3 de signe quelconque $\longrightarrow$ $\begin{cases} x_3 = x_3' - x_3'' \\ x_3' \geq 0, \quad x_3'' \geq 0 \end{cases}$

$$x_1 + x_2 + x_3' - x_3'' = \Pi \quad \max$$
$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3' + x_3'' \leq 4 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3' + x_3'' \leq -1 \\ 6x_2 + 5x_3' - 5x_3'' \leq 6 \\ -6x_2 - 5x_3' + 5x_3'' \leq -6 \end{cases}$$

forme canonique

avec $x_1, x_2, x_3', x_3'' \geq 0$

dual : min $4y_1 - y_2 + 6y_3' - 6y_3'' = c$

contraintes
$$\begin{cases} 2y_1 - y_2 \geq 1 \\ 3y_1 + 2y_2 + 6y_3' - 6y_3'' \geq 1 \\ -y_1 - y_2 + 5y_3' - 5y_3'' \geq 1 \\ y_1 + y_2 - 5y_3' + 5y_3'' \geq -1 \end{cases}$$

$\to 6(y_3' - y_3'')$

$\to 5(y_3' - y_3'')$

$\to -5(y_3' - y_3'')$

DUAL en forme canonique

On remarque que y_3', y_3'' apparaissent toujours par leur différence

donc on remplace $y_3' - y_3'' = y_3$ de signe quelconque

min $4y_1 - y_2 + 6y_3 = c$
$$\begin{cases} 2y_1 - y_2 \geq 1 \\ 3y_1 + 2y_2 + 6y_3 \geq 1 \\ -y_1 - y_2 + 5y_3 = 1 \\ y_1, y_2 \geq 0 \quad y_3 \text{ de signe quelconque} \end{cases}$$

DUAL en forme simplifiée (non canonique)

en général

primal: inégalité $\leq$ $\longrightarrow$ dual: var. de décision ≥ 0

primal: équation $=$ $\longrightarrow$ dual: var. de signe quelconque.

y_3

Théorème fondamental de la dualité

Théorème. (P) primal (P') dual :

- soit les deux problèmes sont incompatibles (aucune solution)
- soit un problème est impossible et l'autre a au moins une solution accessible, mais il n'a pas de solution optimale (finie) (la fonction objectif tend vers l'infini)
- les deux problèmes ont des solutions optimales finies

Dans ce cas : la val. optimale de la fonction objectif du primal est égale à la val. optimale de la fonction objectif du dual.

Maths x gestion CM 30/11/2016

Dualité (suite)

Exemple. $\max \; 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = \pi$

contraintes
$$\begin{cases} 2{,}5x_1 + x_2 + 5x_3 \leq 20 \\ 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 30 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 \leq 16 \\ x_1 \geq 0, \; x_2 \geq 0, \; x_3 \geq 0 \end{cases}$$

PRIMAL

var. décision du primal

son dual est $\min \; 20y_1 + 30y_2 + 16y_3 = c$

contraintes
$$\begin{cases} 2{,}5y_1 + 3y_2 + y_3 \geq 3 \\ y_1 + 3y_2 + 2y_3 \geq 4 \\ 5y_1 + 2y_2 + 4y_3 \geq 2 \\ y_1, y_2, y_3 \geq 0 \end{cases}$$

DUAL.

variables duales

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2{,}5 & 1 & 5 & 20 \\ 3 & 3 & 2 & 30 \\ 1 & 2 & 4 & 16 \\ \hline 3 & 4 & 2 & \pi \end{array}\right) \xrightarrow{\text{transposée}} \left(\begin{array}{ccc|c} 2{,}5 & 3 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \\ 5 & 2 & 4 & 2 \\ \hline 20 & 30 & 16 & c \end{array}\right)$$

Le problème de la semaine dernière

$$\begin{cases} \text{maximiser} & 14x_1 + 12x_2 + 18x_3 = \Pi \\ \text{contraintes} & 2x_1 + x_2 + x_3 \leq 2 \\ & x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 4 \\ & x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0 \end{cases}$$

PRIMAL (résolu par la méthode du simplexe) canonique

$$\begin{cases} \text{maximiser} & 14x_1 + 12x_2 + 18x_3 = \Pi \\ \text{contraintes} & 2x_1 + x_2 + x_3 + s_1 = 2 \\ & x_1 + x_2 + 3x_3 + s_2 = 4 \\ & x_1, x_2, x_3, s_1, s_2 \geq 0 \end{cases}$$

PRIMAL en forme standard

Solution (trouvée par simplexe) :

on trouve $\tilde{x}_2 = 1 \quad \tilde{x}_3 = 1$ (de base)

$\tilde{x}_1 = 0 \quad \tilde{s}_1 = 0 \quad \tilde{s}_2 = 0$ (hors base)

val. optimal $\tilde{\Pi} = 30$.

Théorème fondamental de la dualité :

le dual a la même valeur optimale, $\tilde{c} = 30$

Résolution du primal par l'intermédiaire du dual

il existe une complémentarité entre

var. décision du primal $\longleftrightarrow$ var. d'écart du dual

Théorème : soit (P) un problème primal admettant une sol. optimale. Alors, dans la solution optimale accessible :

1) Si une var. de décision x_i du primal est $\neq 0$ alors la variable d'écart correspondante t_i du dual est $= 0$.

2) Vice-versa, si une variable d'écart s_i du primal est $\neq 0$ à l'optimum, alors la variable de décision y_i correspondante du dual est $= 0$, à l'optimum.

P primal		P' dual	
$x_1, x_2 \ldots$	var de décision	$y_1, y_2 \ldots$	var. de décision
$s_1, s_2 \ldots$	var. d'écart	$t_1, t_2, \ldots$	var. d'écart.

Si $x_i = 0 \Leftrightarrow t_i \neq 0$ | $s_i = 0 \Leftrightarrow y_i \neq 0$

$x_i \neq 0 \Leftrightarrow t_i = 0$ | $s_i \neq 0 \Leftrightarrow y_i = 0$

On obtient que :

à l'optimum : $\tilde{t}_2 = 0$ et $\tilde{t}_3 = 0$

On les remplace dans le système des contraintes :

$$\begin{cases} 2y_1 + y_2 - t_1 = 14 \\ y_1 + y_2 = 12 \\ y_1 + 3y_2 = 18 \end{cases} \qquad \begin{cases} y_1 + y_2 = 12 \\ -y_2 - t_1 = -10 \\ 2y_2 = 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_1 = 12 - y_2 = 12 - 3 = 9. \\ t_1 = -y_2 + 10 = 7 \\ y_2 = 3 \end{cases}$$

Donc la sol. optimale du dual est

$\tilde{y}_1 = 9,\ \tilde{y}_2 = 3$

$\tilde{t}_1 = 7,\ \tilde{t}_2 = \tilde{t}_3 = 0$

(déjà trouvée par méthode graphique)

Dans l'autre sens :

– on connaît la solution du dual ($y_1 = 9,\ y_2 = 3$)

le théorème donne $\tilde{s}_1 = \tilde{s}_2 = \tilde{x}_1 = 0$. On remplace

$$\begin{cases} \text{maximiser} & 14x_1 + 12x_2 + 18x_3 = \boxed{} \\ \text{contrainte} & 2x_1 + x_2 + x_3 + s_1 = 2 \\ & x_1 + x_2 + 3x_3 + s_2 = 4 \\ & x_1, x_2, x_3, s_1, s_2 \geq 0 \end{cases}$$

On remplace :

$$\begin{cases} x_2 + x_3 = 2 \\ x_2 + 3x_3 = 4 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x_3 = 2 \\ x_2 + x_3 = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_3 = 1 \\ x_2 = 2 - 1 = 1 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ $\tilde{x}_2 = 1 \quad \tilde{x}_3 = 1$ sol. du primal.

$\tilde{x}_1 = \tilde{s}_1 = \tilde{s}_2 = 0$

Moralité : La connaissance de la solution du primal donne la solution du dual, et inversement

Autre exemple :

Primal en forme standard: $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) = (4, 6)$

$$\begin{cases} \max & 3x_1 + 4x_2 = 11 \\ \text{contraintes} & 2{,}5\,x_1 + x_2 + s_1 = 20 \\ & 3x_1 + 3x_2 + s_2 = 30 \\ & x_1 + 2x_2 + s_3 = 16 \end{cases}$$

Variable d'écart

$s_1 = 20 - 2{,}5\times 4 - 1\times 6 = 4$

$s_2 = 30 - 3\times 4 - 3\times 6 = 0$

$s_3 = 16 - 4 - 2\times 6 = 0$

Primal :

déc.
$$\begin{cases} \tilde{x}_1 = 4 \\ \tilde{x}_2 = 6 \end{cases}$$

écart
$$\begin{cases} \tilde{s}_1 = 4 \\ \tilde{s}_2 = 0 \\ \tilde{s}_3 = 0 \end{cases}$$

Théorème $\Longrightarrow$

Dual

écart
$$\begin{cases} \tilde{t}_1 = 0 \\ \tilde{t}_2 = 0 \end{cases}$$

décision
$$\begin{cases} \tilde{y}_1 = 0 \\ \tilde{y}_2 \neq 0 \\ y_3 \neq 0 \end{cases}$$

On remplace dans le système des contraintes du dual

$$\begin{cases} 3y_2 + y_3 = 3 \\ 3y_2 + 2y_3 = 4 \end{cases} \qquad \begin{cases} y_3 = 1 \\ 3y_2 = 3 - y_3 = 3 - 1 = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_3 = 1 \\ y_2 = \frac{2}{3} \end{cases} \Longrightarrow$$

Solution optimale du dual

$\tilde{y}_1 = 0 \quad \tilde{y}_2 = \frac{2}{3} \quad \tilde{y}_3 = 1 \quad \tilde{t}_1 = 0 \quad \tilde{t}_2 = 0$

$\tilde{c} = 36$

Contraintes saturées

Dans le problème "$\overset{x_1}{\text{tables}}$ / $\overset{x_2}{\text{bureaux}}$" on trouve :

$s_1 = 4$: cela signifie que la ressource "20 heures d'assemblage" disponible n'est pas complètement utilisée :

on en utilise seulement $4 \times 2{,}5 + 6 \times 1 = 16 < 20$.

Donc il nous reste $20 - 16 = 4 = s_1$ heures d'assemblage

non utilisée. ⟶ contrainte "heures d'assemblage" non saturée

__Définition__ Une contrainte est dite __saturée__ si à l'optimum

la variable d'écart est $= 0$.

⟺ la contrainte est satisfaite avec une égalité.

Contrainte est dite non saturée si à l'optimum la var. d'écart

est $\neq 0$. ⟺ la contrainte est satisfaite avec une

inégalité stricte ($<$ ou $>$). ($2{,}5\tilde{x}_1 + \tilde{x}_2 = 16 < 20$.

__Dans l'exemple__ : polissage : saturée : $s_2 = 0$

$3\tilde{x}_1 + 3\tilde{x}_2 = 30$

mise en caisse : saturée $s_3 = 0$.

$\tilde{x}_1 + 2\tilde{x}_2 = 16$

Valeurs marginales

A' l'optimum, le tableau du simplexe dit :

$$\Pi = 36 - \frac{2}{3} s_2 - 1 s_3$$

s_2 : polissage $\quad$ s_3 : mise en caisse

ici, s_2, s_3 hors base $\Rightarrow$ $s_2 = s_3 = 0$ et $\Pi = 36$.

Remarque : si s_2 augmente de 1, Π diminue de $\frac{2}{3}$.

Mais si $s_2 \longrightarrow -1$, alors Π augmente de $\frac{2}{3}$.

Traduction : si l'on desserre la contrainte "30 heures de polissage" en ajoutant 1 heure disponible

$\Rightarrow$ 31 de polissage disponibles.

Alors Π augmente de $\frac{2}{3}$. $\quad$ valeur marginale de "polissage".

Définition La valeur marginale d'une contrainte est l'amélioration maximale de valeur de la fonction objectif, par rapport à une sol. optimale, qui résulte d'un desserrement d'une unité de la contrainte.

Ex. La valeur marginale de la contrainte "mise en caisse" est 1

La val. marginale de la contrainte " assemblage" est 0.

<u>Remarque</u> Val. marginales des contraintes : données par les opposés des coefficients de la fonction objectif dans le tableau de simplexe correspondant à la sol. optimale.

<u>Théorème</u> À l'optimum :

1) La valeur absolue d'une variable de décision <u>du dual</u> est égale à la valeur absolue de la valeur marginale variable d'écart associée du primal.

2) la val. optimale de la fonction objectif est égale à la somme des produits des ressources (les second membres des contraintes) par les valeurs marginales.

<u>Ex.</u> $\tilde{\Pi} = 0 \times 20 + \frac{2}{3} \times 30 + 1 \times 16 = 36$

Interprétation économique de la dualité

Primal: problème concret

Dual: obtenu mathématiquement (en transposant une matrice)

Néanmoins, on peut donner une interprétation économique du dual.

Ex. 1) Primal: Production utilisant des ressources limitées pour maximiser un bénéfice

Primal: $x_1, x_2 \ldots$ quantités, niveaux de production

$\longrightarrow$ **Dual:** $y_1, y_2, \ldots$ prix.

Interprétation: deuxième fabricant qui veut louer ou acheter les moyens de production du premier fabricant, et il propose des prix de locations $y_1, y_2, \ldots$ tels que:

- minimiser c = coût de location $20y_1 + 30y_2 + 16y_3 = c$ min

- prix raisonnables pour le premier, c-à-d. désintéresser
$25y_1 + 3y_2 + y_3 \geq 3 \longrightarrow$ bénéfice de la production d'une table etc.
le premier fabricant de toute production.

Ex. Tables, bureaux: y_1, y_2, y_3

y_1: location 1 heure assemblage

y_2: location 1 heure polissage

y_3: location 1 heure mise en caisse

r_i	base	2nd-m	$-\pi$	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	opération
	π	0	1	30	50				L_0
$\frac{1800}{2} = 900$	s_1	1800		3	2	1	0	0	L_1
X	s_2	400		1			1		L_2
$\frac{600}{1} = 600$	s_3	600			$\boxed{1}$			1	L_3
	π	-30000	1	30	0	0	0	-50	$L_0 - 50L_3$
	s_1	600		3	0	1	0	-2	$L_1 - 2L_3$
	s_2	400		1	0	0	1	0	L_2
	x_2	600		0	1	0	0	1	L_3

FINISSEZ-LE