Mathématiques appliquées à la gestion

Giovanni Lazzarini

9 décembre 2016

Informations générales sur l'UE

Nom de l'UE MATH 306 Mathématiques appliquées à la gestion.

Responsable du cours Giovanni Lazzarini. [site et adresse mél]

Année, semestre Troisième année, premier semestre (S5)

Public concerné
- Licence Droit, Economie, Gestion – Mention Gestion
- Licence Droit, Economie, Gestion – Mention Gestion – Parcours Passerelle DUT GEA
- Licence Droit, Economie, Gestion – Mention Gestion – Parcours Passerelle DUT TC

Crédits 4

Coefficient 4

Heures totales 30h cours magistral, 16h30 TD.

Heures hebdomadaires
- 2h30 cours magistral en amphi, sur 12 semaines ;
- 1h30 TD en groupes, sur 11 semaines.

Syllabus

I. préparation mathématique au test "Score IAE Message" [2 semaines]

II. Éléments d'algèbre linéaire : matrices, systèmes, pivot de Gauss, déterminants, rang, applications économiques. [4 ou 5 semaines]

III. Recherche opérationnelle : programmation linéaire (résolution graphique, méthode du simplexe, dualité, analyse marginale), problème d'affectation, problème de transport, problème du voyageur de commerce. [5 ou 6 semaines]

Modalité de contrôle

Organisation du contrôle continu 2 tests.

Calcul de la note finale

- Session 1 : max(CT ; 0,5CC + 0,5CT)
- Session 2 : CT

Table des matières

Première partie

Préparation au test "Score IAE message"

Leçon 1

Mathématiques générales

1.1 Calcul différentiel et intégral

1.1.1 Dérivation des fonctions polynomiales

Rappelons que si $f(x) = x^n$ est un monôme, avec $n = 1{,}2\ldots$, alors sa dérivée est $f'(x) = nx^{n-1}$. En d'autres termes, *a*.

Exemple 1. Si $f(x) = x^4 + x^7$, alors $f'(x) = 4x^3 + 7x^6$.

1.1.2 Intégration des fonction polynomiales

- Soit $f(x) = x^n$ une fonction polynomiale, $n \in \mathbb{N}$. Alors toutes les primitives de f sont données par

  $$\int f(x)dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + \text{const.} \tag{1.1}$$

  En d'autres termes, *on augmente de un l'exposant de la variable et on divise par ce nouvel exposant.*

Exemple 2. Soit $f(x) = 4 - 3x$. Combien vaut $\int_{-1}^{2} f(x)dx$?

Solution. 4 a pour primitive $4x$ et $-3x$ a pour primitive $-3\frac{x^2}{2}$. Donc

$$\int_{-1}^{2} f(x)dx = \left[4x - 3\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{2}$$
$$= (8 - 3 \times \frac{4}{2}) - (4(-1) - 3 \times \frac{1}{2}) = 8 - 6 - (-4 - \frac{3}{2}) = 2 + \frac{11}{2} = \frac{15}{2} = 7{,}5. \tag{1.2}$$

□

1.2 Arithmétique et manipulation des nombres

1.2.1 Identités remarquables (encore une fois !)

Proposition 3. *somme fois différence* $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$
carré du binôme $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Il faut apprendre à s'en servir pour développer des expression, simplifier des calculs, etc, et pour être plus efficaces en calcul mental :

Exemple 4. Calculer $98 \times 99 \times 100 \times 101 \times 102$ (sans calculatrice)

solution. on écrit $(98 \times 102) \times (99 \times 101) \times 100$ sous forme d'identité remarquable $(100-2)\times(100+2)\times(100-1)\times(100+1)\times 100$ et on applique l'identité remarquable somme $\times$ différence. À la fin, on obtient 9 995 000 400. □

1.2.2 Décomposition en facteurs premiers, critères de divisibilité

Définition 5 (Nombre premier)**.** Un nombre naturel premier est un nombre naturel, *différent de* 1, qui n'est divisible que par lui-même et par 1. *Attention* : 1 n'est pas un nombre premier, le plus petit nombre premier est 2, qui est aussi l'unique nombre premier pair.

Liste des premiers nombres premiers : 2,3,5,7,11,13,17, 19,23, 29,31,37, 41,47, 53,59,61, 67,71, 73,79, 83,89, 97,101. Les nombres premiers sont importants parce que tout nombre entier est un produit de nombres premiers :

Théorème 6 (théorème fondamental de l'arithmétique)**.** *Tout nombre entier peut se décomposer de façon unique comme un produit de facteurs premiers.*

Par exemple, $30 = 2\times 3\times 5$, et aucun autre nombre ne peut se décomposer de la même façon.

Théorème 7 (critères de divisibilité)**.** *On a les critères suivants :*

- *div. par 2 :* *un nombre* n *est divisible par* $2 \Leftrightarrow$ *il se termines par les chiffres* 0,2,4,6,8, *c-a-d s'il est* pair*.*
- *div. par 3 :* *un nombre* n *est divisible par* $3 \Leftrightarrow$ *la somme de ses chiffres est divisible par* 3*.*
- *div. par 4 :* *un nombre* n *est divisible par* $4 \Leftrightarrow$ *ses deux derniers chiffres forment un nombre divisible par* 4*.*
- *div. par 5 :* *un nombre* n *est divisible par* $5 \Leftrightarrow$ *il se termine par* 0 *ou* 5*.*

div. par 6 : *un nombre* n *est divisible par* 6 $\Leftrightarrow$ *il est divisible par* 2 et *par* 3.

div. par 9 : *un nombre* n *est divisible par* 9 $\Leftrightarrow$ *la somme de ses chiffres est divisible par* 9.

div. par 10 : *un nombre* n *est divisible par* 10 $\Leftrightarrow$ *il finit par* 0.

div. par 11 : *un nombre* n *est divisible par* 11 $\Leftrightarrow$ *la somme de ses chiffres de rang impair,* moins *la somme de ses chiffres de rang pair, est un nombre divisible par* 11*, c-a-d* 0,11,22,33 *etc.*

1.2.3 Algorithmes

Voici un schéma de rappel sur les fondamentaux de l'algorithmique vus au lycée.

ALGORITHME	COMMANDES TI 82		COMMANDES ALGOBOX	SIGNIFICATIONS
Saisir X	Menu E/S	**:Input** "X=", X **:Prompt** X	**Lire variable** X	Saisie d'une valeur après demande(ou sans) et affecte à X cette valeur
Afficher X		**:Disp** X Ou :Disp "X=",X	**Afficher Variable** X Ou **Afficher message** X= **Afficher variable** X	Affiche à l'écran la valeur de la variable X ou Affiche X= puis la valeur de la variable X.
X prend la valeur de 2	STO	:2 → X	**Affecter valeur à** X	La valeur 2 va se stocker dans la mémoire de la variable X
Si … Alors … Sinon		**:If** <Condition> **:Then** :<Instruction(s) 1> **:Else** : <Instruction(s) 2>	**Si** <Condition> **Alors** **Début de Si** <Instruction(s) 1> **Fin de Si** **Sinon** **Debut de Sinon** <Instruction(s) 2> **Fin de Sinon**	Si la condition est vraie alors on exécute <instruction(s) 1> sinon on exécute <instruction(s) 2>
Pour i variant de 1 à N faire …	Menu CTL	**:For** (i,1,N) :<Instruction(s)> **:End**	**Pour** i **allant de** 1 **à** N **Début de Pour** <Instruction(s)> **Fin de Pour**	I prend la valeur 1 On exécute <Instruction(s)> On incrémente i (ajoute 1 à i) Et on recommence jusqu'à ce que i soit égal à N
Tant que … faire … Répéter … jusqu'à …		**:While** <Condition> : <Instruction(s)> **:End** Ou **:Repeat** <Condition fin> :<Instructions> **:End**	**Tant que** <Condition> **Faire** **Début de Tant que** <Instruction(s)> **Fin de tant que**	Tant que < Condition> est vraie, répéter <Instruction(s)>

Conseil Pour lire correctement un algorithme, et suivre pas à pas l'évolution des quantités en jeu, il est conseillé de construire un *tableau de fonctionnement* de l'algorithme.

1.3 Pourcentages

1.3.1 Les trois définitions de pourcentage

1.3.1.1 Un pourcentage est une fraction

Un pourcentage permet d'exprimer un nombre comme une fraction de cent, en utilisant le symbole %. Ainsi, % signifie simplement « divisé par 100 »

$$\boxed{t\% = \frac{t}{100}} \tag{1.3}$$

N'oubliez donc jamais qu'un pourcentage est avant tout une fraction, qu'on peut simplifier comme les autres.

Exercice 8. Transformez 80%, 72%, 36%, 44% en fractions irréductibles.

1.3.1.2 Un pourcentage est une part

Le pourcentage représente une proportion, une part d'un ensemble. Le total est en fait ramené à 100 et le pourcentage représente donc le rapport d'un *sous-ensemble* à son ensemble : formule fondamentale

$$\text{Pourcentage} = \left(\frac{\text{Part}}{\text{Total}} \times 100\right)\% \tag{1.4}$$

Exercice 9. Une galette des rois est coupée en 16 parts. Achille prends 2 parts de galette. Quel pourcentage de galette Achille a-t-il mangé ?

1.3.1.3 Un pourcentage est un nombre décimal

Le pourcentage est aussi un nombre décimal compris entre 0 et 1 lorsque le pourcentage est inférieur à 100%, et au-dessus de 1 lorsque le pourcentage est supérieur à 100%.

Exemple 10. Ainsi, 25% = 1/4 = 0,25. Il est impératif de savoir passer aisément de l'une à l'autre de ces écritures équivalentes.

1.3.2 Pourcentage d'une évolution

1.3.2.1 Coefficient multiplicateur

Lorsqu'un quantité passe d'une valeur V_1 à une valeur V_2, le *coefficient multiplicateur* associé est :

$$CM = \frac{V_2}{V_1}. \tag{1.5}$$

Le *pourcentage d'évolution* $t\%$ entre V_1 et V_2 est défini par

$$\frac{t}{100} = \frac{V_2 - V_1}{V_1}(\text{ variation relative}), \text{ soit } \frac{t}{100} = CM - 1. \qquad (1.6)$$

- Si $t > 0$, l'évolution est une hausse ;
- Si $t < 0$, l'évolution est une baisse.

1.3.2.2 Coefficient multiplicateur et évolution

- *Augmenter* une quantité de $t\%$ signifie la multiplier par $CM = 1 + \frac{t}{100}$.
- *Diminuer* une quantité de $t\%$ signifie la multiplier par $CM = 1 - \frac{t}{100}$.

1.3.2.3 évolutions successives

Lors de deux évolution successives, *les coefficients multiplicateurs se multiplient* :

$$\text{Si } V_1 \overset{CM_1}{\longrightarrow} V_2 \overset{CM_2}{\longrightarrow} V_3 \text{ alors } CM_{\text{global}} = CM_1 \times CM_2 \qquad (1.7)$$

Attention Erreur capitale à éviter : lors d'évolutions successives, *les pourcentages ne s'additionnent ni se soustraient pas !* Ce sont les coefficients multiplicateurs qui se multiplient entre eux.

Exemple 11. Un prix subit d'abord une hausse de 10% puis une hausse de 30%. Quel est le pourcentage de la hausse globale ?

Solution. Ce *n'est pas* $10\% + 30\% = 40\%$! Il faut d'abord calculer les deux coefficients multiplicateurs, qui sont $CM_1 = 1 + \frac{10}{100} = 1{,}1$ et $CM_2 = 1{,}3$. Puis on les multiplie, et on trouve $CM_{\text{global}} = 1{,}1 \times 1{,}3 = 1{,}43$. Alors le pourcentage de l'évolution globale est $\frac{t}{100} = CM - 1 = 0{,}43 = 43\%$: c'est une hausse de 43%. □

En revanche, lors de deux (ou plus) évolutions successives, l'ordre des variations n'importe pas : cela revient ainsi au même d'appliquer une variation (hausse pu baisse) de $a\%$ suivie d'une variation de $b\%$, que d'appliquer d'abord une variation de $b\%$ suivie d'une variation de $a\%$. Cela est dû au fait que dans le calcul du pourcentage de l'évolution globale, ce sont les coefficients multiplicateurs qui se multiplient, donc l'ordre des facteurs ne compte pas.

Exemple 12. Un prix augmente de 10%, puis diminue de 20% : dans ce cas, le coefficient multiplicateur global est

$$CM = (1 + \frac{10}{100})(1 - \frac{20}{100}) = 1{,}1 \times 0{,}8 = 0{,}88 = 1 - 0{,}12$$

donc globalement il s'agit d'une baisse de 12%.

Si ce même prix diminue d'abord de 20%, puis il augmente de 10%, le résultat est le même : on a en effet

$$CM = (1 - \frac{20}{100})(1 + \frac{10}{100}) = 0{,}88 = 1 - 0{,}12 \qquad (1.8)$$

qui correspond encore à une baisse de 12%.

1.3.2.4 Évolution réciproque

Le taux de pourcentage t'% compensant une évolution (hausse ou baisse) de t% est appelé *taux d'évolution réciproque*. Pour le déterminer, *le produit des deux coefficients multiplicateurs doit être* 1 :

$$(1 + \frac{t}{100})(1 + \frac{t'}{100}) = 1. \qquad (1.9)$$

Les coefficients multiplicateurs de deux évolutions réciproques sont donc *inverses* l'un de l'autre : $CM' = \frac{1}{CM}$

Attention Autre erreur capitale à éviter : si un prix augmente de 60%, pour revenir à la valeur initiale, *il ne doit pas baisser de* 60% ! Avec ce qu'on vient de dire, si ce prix augmente de 60%, le coefficient multiplicateur de cette hausse est $CM = 1 + 60/100 = 1{,}6$. Le coefficient de l'évolution réciproque est $CM' = \frac{1}{1{,}6} = 0{,}625 = 1 - 0{,}375 = 1 - \frac{37{,}5}{100}$. Ce prix pour revenir à sa valeur initiale doit effectuer une baisse de 37,5%.

Leçon 2

Probabilités et statistiques

2.1 Combinatoire

Pour calculer des probabilités, en particulier quand l'univers des issues possibles est un ensemble fini, il faut souvent savoir compter les éléments d'un ensemble. La branche des mathématiques qui étudie les configurations de collections finies d'objets (permutations, combinaisons etc.) s'appelle *combinatoire*, et la partie de la combinatoire qui consiste à compter le nombre de telles configurations s'appelle *dénombrement*.

2.1.1 Cardinal d'un ensemble

Définition 13. Soit A un ensemble fini de n éléments. Le nombre n s'appelle *cardinal* de A, noté $\mathrm{Card}(A)$ (ou $|A|$ ou $\#A$). *Pour un ensemble fini, le cardinal est simplement le nombre d'éléments.*

Proposition 14 (Formule d'inclusion-exclusion, version ensembliste)**.** *Si A et B sont deux ensembles finis, alors*

$$\mathrm{Card}(A \cup B) = \mathrm{Card}(A) + \mathrm{Card}(B) - \mathrm{Card}(A \cap B) \tag{2.1}$$

Si A et B sont *disjoints*, c-a-d $A \cap B = \emptyset$, et seulement dans ce cas, alors $\mathrm{Card}(A \cup B) = \mathrm{Card}(A) + \mathrm{Card}(B)$.

2.1.2 k-listes, permutations, arrangements, combinaisons

Soit A un ensemble de n éléments. Voici un schéma pour se rappeler les principales formules de dénombrement :

Nom	Répétitions	l'ordre compte	formule
k-listes	oui	oui	n^k
permutations	non	oui	$n!$
k-arrangements	non	oui	$\frac{n!}{(n-k)!} = n \times (n-1) \times \cdots \times (n-k+1)$
k-combinaisons	non	non	$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = C_n^k$

Un exemple pour rappeler les différentes formules :

2.1.3 Modèles de tirages

Soit U une urne contenant n boules numérotées de 1 à n, et supposons que nous tirions k boules de cette urne. Voici les trois modèles de tirage les plus classiques :

Tirages	Interprétation combinatoire	Formule
Successifs avec remise	k-liste	n^k
Successifs sans remise	k-arrangement	$\frac{n!}{(n-k)!}$
Simultanés	k-combinaisons	$\binom{n}{k}$

2.2 Calcul des probabilités

2.2.1 Généralités. Équiprobabilité

Définition 15. Soit $(\Omega,\mathcal{A})$ un espace probabilisable, où Ω est l'ensemble univers de toutes les issues possibles, et $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ la σ-algèbre (ou tribu) des événements de Ω. Une probabilité sur Ω est une application $P : \mathcal{A} \to [0,1]$ qui vérifie :

(i) $P(\Omega) = 1$;

(ii) toute famille dénombrable d'événements deux à deux disjoints (ou incompatibles) $A_1,A_2,\ldots$ satisfait :

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots) = \sum_{i+1}^{\infty} P(A_i). \tag{2.2}$$

(additivité dénombrable.) En particulier, si A et B sont deux événements incompatibles, alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Premières propriétés Des propriétés qui définissent la probabilité P, on déduit les autres qui suivent :

(i) $P(\emptyset) = 0$

(ii) Pour tout A, on note $\overline{A}$ le complémentaire de A (événement contraire), et l'on a $P(\overline{A} = 1 - P(A))$.

(iii) Si $A \subseteq B$, alors $P(A) \leq P(B)$.

(iv) (Formule d'inclusion-exclusion, version probabiliste) si A et B sont deux événements, alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Définition 16 (Équiprobabilité)**.** Soit $\Omega = \{a_1,a_2,\ldots,a_n\}$ un univers fini. On dit qu'on est en situation d'équiprobabilité si toute issue a la même probabilité de se réaliser, et donc $P(\{a_1\}) = \cdots = P(\{a_n\}) = \frac{1}{n}$.

Dans ce cas, la probabilité d'un événements quelconque A est donnée par la notoire formule

$$P(A) = \frac{\mathrm{Card}(A)}{\mathrm{Card}(\Omega)} = \frac{\text{nombre des cas favorables}}{\text{nombre des cas possibles}} = \frac{\text{nombre d'issues de A}}{\text{nombre d'issues total}} \tag{2.3}$$

2.2.2 Probabilité conditionnelle

Définition 17. Soient A et B deux événements, avec $P(B) \neq 0$. La *probabilité conditionnelle de A sachant B* est

$$P(A|B) = P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}. \tag{2.4}$$

Proposition 18 (Formule des probabilités composées)**.**

$$P(A \cap B) = P(A|B)P(B) = P(B|A)P(A) \tag{2.5}$$

Proposition 19 (Formule de la probabilité totale)**.** *Soit $A_1,A_2,\ldots,A_p$ un système complet d'événements (c-a-d une famille d'événements $A_1,A_2,\ldots,A_p$ deux à deux disjoints et telle que $A_1 \cup \cdots \cup A_p = \Omega$). Alors, pour tout événement B,*

$$P(B) = \sum_{i=1}^{p} P(B|A_i)P(A_i) = P(B|A_1)P(A_1)+P(B|A_2)P(A_2)+\cdots+P(B|A_p)P(A_p) \tag{2.6}$$

Proposition 20 (Formule de Bayes)**.** *Avec la même notation ci-dessus,*

$$P(A_j|B) = \frac{P(B|A_j)P(A_j)}{P(B)} = \frac{P(B|A_j)P(A_j)}{\sum_{i=1}^{p} P(B|A_i)P(A_i)} \tag{2.7}$$

pour tout événement B et pour tout $j \in \{1,\ldots,p\}$.

2.3 Variables aléatoires

Définition 21. Une *variable aléatoire* est une application X définie sur l'univers Ω et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

- Si l'ensemble $X(\Omega)$ des valeurs prises par X est *discret* (c-a-d que c'est un ensemble fini ou au plus qu'il est infini dénombrable comme l'ensemble $\mathbb{N}$ des naturels), alors X est une v.a. *discrète.*
- Si X prend valeurs dans un intervalle, ou dans une réunion d'intervalles de $\mathbb{R}$, on parle de v.a. *continue.*

Définition 22 (Fonction de répartition)**.** Soit X une v.a. La fonction de répartition de X est la fonction

$$\begin{array}{rcl} F_X : \mathbb{R} & \to & [0, +\infty[\\ x & \mapsto & P(X \leq x) \end{array}$$

Propriétés de F_X :
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $0 \leq F_X(x) \leq 1$.
- F_X est une fonction croissante.
- $\lim_{x\to-\infty} F_X(x) = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} F_X(x) = 1$
- Pour tous réels $a < b$, on a $P(X \in]a,b]) = P(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$.

2.3.1 v.a. discrètes finies : généralités

Soit X une v.a. discrète. Pour simplifier la notation, dans la suite, on supposera qu'elle soit *finie*, mais les résultats s'étendent aux v.a. infinies dénombrables.
- L'ensemble des valeurs que peut prendre X est de la forme $X(\Omega) = \{x_1,x_2, \ldots ,x_n\}$.
- La *loi de probabilité* de X est le tableau

x_i	x_1	x	$\cdots$	x_n
$p_i = P(X = x_i)$	p_1	p_2	$\cdots$	p_n

- On a toujours $p_1 + \cdots + p_n = 1$, car les événements $X = x_i$ forment un système complet d'événements.

Fonction de répartition d'une v.a. finie Si les x_i sont rangés dans l'ordre croissant, $x_1 < \cdots < x_n$, alors
- La fonction F_X est constante par morceaux, et elle vaut $F_X(x_i)$ sur tout l'intervalle $[x_i,x_{i+1}[$
- $P(X = x_i) = F_X(x_i) - F_X(x_{i-1})$.

Espérance mathématique

Définition 23. L'espérance de X, ou valeur moyenne, ou valeur attendue, est le réel :

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \cdots + x_n p_n \tag{2.8}$$

C'est la *moyenne* des valeurs prises par X, pondérée par les probabilités p_i.

Remarque 24. Chaque fois qu'on lit la question « Combien vaut en moyenne telle quantité X ? » il s'agit de l'espérance de X.

Proposition 25 (Propriétés de l'espérance)**.**
- *L'espérance est linéaire :* $E(aX + bY + c) = aE(X) + bE(Y) + c$.
- *Pour toute fonction* $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $E[g(X)] = \sum_{i=1}^{n} g(x_i)p_i$. *En d'autre termes : pour calculer l'espérance de la variable* $g(X)$, *on applique* g *aux* <u>*valeurs*</u> x_i, *et on ne touche pas les probabilités* p_i.

Variance et écart-type

Définition 26.
1. La *variance* de X est le réel

$$\mathrm{Var}(X) = E[(X - E(X))^2] = \sum_{i=1}^{n} (x_i - E(X))^2 p_i \tag{2.9}$$

2. L'*écart-type* (*standard deviation*) est la racine carrée de la variance :

$$\sigma(X) = \sqrt{\mathrm{Var}(X)}. \tag{2.10}$$

Propriétés de variance et écart-type
- $\mathrm{Var}(X) \geq 0$
- formule alternative pour la variance : $\mathrm{Var}(X) = E(X^2) - (E(X))^2$: pour s'en souvenir,

$$\text{Variance} = \text{espérance du carré moins carré de l'espérance} \tag{2.11}$$

- En général, $\mathrm{Var}(X + Y) \neq \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y)$ (la variance n'est pas linéaire), et pour tous $a,b \in \mathbb{R}$, $\mathrm{Var}(aX + b) = a^2 \mathrm{Var}(X)$.
- $\sigma(aX) = |a|\sigma(X)$.

2.3.2 Lois discrètes usuelles

2.3.2.1 Loi uniforme

Définition 27. On dit que X suit une loi uniforme sur l'ensemble $X(\Omega) = \{1, \ldots, n\}$, noté $X \sim \mathcal{U}(n)$ si pour tout $i = 1, \ldots, n$, $P(X = i) = \frac{1}{n}$.

x_i	1	2	$\cdots$	n
p_i	$1/n$	$1/n$	$\cdots$	$1/n$

Formules

Espérance $E(X) = \frac{n+1}{2}$

Variance $\mathrm{Var}(X) = \frac{n^2-1}{12}$

Modèle une urne contient n boules égales numérotées de 1 à n. On tire au hasard une boule de l'urne et on note sa valeur X. Alors $X \sim \mathcal{U}(n)$.

2.3.2.2 Loi de Bernoulli

Définition 28. Soit $p \in]0,1[$ un réel. La v.a. X suit une loi de Bernoulli de paramètre p si elle vaut 1 avec probabilité p et 0 avec probabilité $1-p$:

x_i	0	1
p_i	$1-p$	p

Formules

Espérance $E(X) = p$

Variance $\mathrm{Var}(X) = p(1-p)$

Modèle On lance une pièce truquée, telle qu'on obtient FACE avec probabilité p, et PILE avec probabilité $1-p$. On note Face par 1 et Pile par 0. Soit X la v.a. qui donne le résultat du lancer. Alors $X \sim \mathcal{B}(p)$.

2.3.2.3 Loi binomiale

Définition 29. Soient $n \geq 1$ un naturel et $p \in]0,1[$ un réel. La v.a. X suit une loi binomiale de paramètres n et p si $\begin{cases} X(\Omega) = \{0,1,\dots,n\} \\ P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \end{cases}$

x_i	0	1	$\cdots$	n
p_i	$\binom{n}{0} p^0 (1-p)^n = (1-p)^n$	$\binom{n}{1} p^1 (1-p)^{n-1} = np(1-p)^{n-1}$	$\cdots$	$\binom{n}{n} p^n (1-p)^0 = p^n$

Formules

Espérance $E(X) = np$

Variance $\mathrm{Var}(X) = np(1-p)$

Modèle On lance n fois une pièce truquée, telle qu'on obtient FACE avec probabilité p, et PILE avec probabilité $1-p$. Les lancers sont identiques et indépendants. Soit X la v.a. qui donne le nombre de résultats FACE obtenus. Alors $X \sim \mathcal{B}(n,p)$.

2.3.2.4 Loi de Poisson

2.3.2.5 Loi exponentielle

2.3.3 Indépendance et covariance

Définition 30. Deux v.a. discrètes X et Y sont indépendantes si pour tout couple (x_i,y_j) on a la relation

$$P((X = x_i) \cap (Y = y_j)) = P(X = x_i) \times P(Y = y_j) \tag{2.12}$$

c-a-d si tous les couples d'événements $(X = x_i)$ et $(Y = y_j)$ sont indépendants.

Propriétés

- $E(XY) = E(X)E(Y)$, ce qui n'est pas vrai dans le cas général
- $\mathrm{Var}(X + Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y)$.

Définition 31 (covariance)**.** Si $E(X)$, $E(Y)$, $E(XY)$ existent, on définit la *covariance* de X et Y comme

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y). \tag{2.13}$$

Propriétés de la covariance

- $\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathrm{Cov}(Y,X)$
- Si X et Y sont indépendantes, alors $\mathrm{Cov}(X,Y) = 0$
- $\mathrm{Var}(X + Y) = \mathrm{Var}(X) + 2\,\mathrm{Cov}(X,Y) + \mathrm{Var}(Y)$

Deuxième partie

Algèbre linéaire

Leçon 3

Systèmes linéaires

3.1 Introduction aux systèmes d'équations linéaires

L'algèbre linéaire est un outil essentiel pour toutes les branches des mathématiques, en particulier lorsqu'il s'agit de modéliser puis résoudre numériquement des problèmes issus de divers domaines : des sciences physiques ou mécaniques, des sciences du vivant, de la chimie, de l'économie, de la gestion, des sciences de l'ingénieur ...

Les systèmes linéaires interviennent à travers leurs applications dans de nombreux contextes, car ils forment la base calculatoire de l'algèbre linéaire. Ils permettent également de traiter une bonne partie de la théorie de l'algèbre linéaire en dimension finie. C'est pourquoi ce cours commence avec une étude des équations linéaires et de leur résolution.

Le but de ce chapitre est essentiellement pratique : il s'agit de résoudre des systèmes linéaires. La partie théorique sera revue et prouvée dans le chapitre « Matrices ».

3.1.1 Exemple : deux droites dans le plan

L'équation d'une droite dans le plan (Oxy) s'écrit

$$ax + by = e$$

où a,b et e sont des paramètres réels, a et b n'étant pas simultanément nuls. Cette équation s'appelle *équation linéaire* dans les inconnues x et y.

Par exemple, $2x+3y=6$ est une équation linéaire, alors que les équations suivantes ne sont pas des équations linéaires :

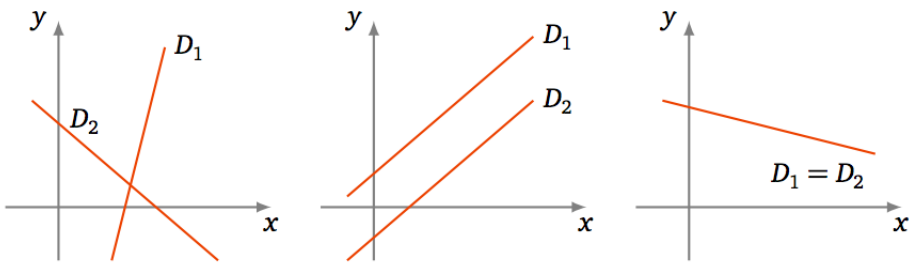
$$2x+y^2=1 \quad \text{ou} \quad y=\sin(x) \quad \text{ou} \quad x=\sqrt{y}.$$

Considérons maintenant deux droites D_1 et D_2 et cherchons les points qui sont simultanément sur ces deux droites. Un point (x,y) est dans l'intersection $D_1 \cap D_2$ s'il est solution du système :

$$\begin{cases} ax+by &= e \\ cx+dy &= f \end{cases} \qquad (S)$$

Trois cas se présentent alors :

1. Les droites D_1 et D_2 se coupent en un seul point. Dans ce cas, illustré par la figure de gauche, le système (S) a une seule solution.
2. Les droites D_1 et D_2 sont parallèles. Alors le système (S) n'a pas de solution. La figure du centre illustre cette situation.
3. Les droites D_1 et D_2 sont confondues et, dans ce cas, le système (S) a une infinité de solutions.



Nous verrons plus loin que ces trois cas de figure (une seule solution, aucune solution, une infinité de solutions) sont les seuls cas qui peuvent se présenter pour n'importe quel système d'équations linéaires.

3.1.2 Résolution par substitution

Pour savoir s'il existe une ou plusieurs solutions à un système linéaire, et les calculer, une première méthode est la *substitution*. Par exemple pour le système :

$$\begin{cases} 3x+2y &= 1 \\ 2x-7y &= -2 \end{cases} \qquad (S)$$

Nous réécrivons la première ligne $3x+2y = 1$ sous la forme $y = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}x$. Et nous remplaçons (nous *substituons*) le y de la seconde équation, par l'expression $\frac{1}{2} - \frac{3}{2}x$. Nous obtenons un système équivalent :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} y & = & \frac{1}{2} - \frac{3}{2}x \\ 2x - 7(\frac{1}{2} - \frac{3}{2}x) & = & -2 \end{array} \right.$$

La seconde équation est maintenant une expression qui ne contient que des x, et on peut la résoudre :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} y & = & \frac{1}{2} - \frac{3}{2}x \\ (2 + 7 \times \frac{3}{2})x & = & -2 + \frac{7}{2} \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcl} y & = & \frac{1}{2} - \frac{3}{2}x \\ x & = & \frac{3}{25} \end{array} \right.$$

Il ne reste plus qu'à remplacer dans la première ligne la valeur de x obtenue :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} y & = & \frac{8}{25} \\ x & = & \frac{3}{25} \end{array} \right.$$

Le système (S) admet donc une solution unique $(\frac{3}{25}, \frac{8}{25})$. L'ensemble des solutions est donc

$$\mathcal{S} = \left\{ \left(\frac{3}{25}, \frac{8}{25} \right) \right\}.$$

3.1.3 Exemple : deux plans dans l'espace

Dans l'espace $(Oxyz)$, une équation linéaire est l'équation d'un plan :

$$ax + by + cz = d$$

(on suppose ici que a, b et c ne sont pas simultanément nuls).

L'intersection de deux plans dans l'espace correspond au système suivant à 2 équations et à 3 inconnues :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} ax + by + cz & = & d \\ a'x + b'y + c'z & = & d' \end{array} \right.$$

Trois cas se présentent alors :

- les plans sont parallèles (et distincts) et il n'y a alors aucune solution au système,
- les plans sont confondus et il y a une infinité de solutions au système,
- les plans se coupent en une droite et il y a une infinité de solutions.

Exemple 32.

1. Le système $\left\{\begin{array}{rcl} 2x+3y-4z & = & 7 \\ 4x+6y-8z & = & -1 \end{array}\right.$ n'a pas de solution. En effet, en divisant par 2 la seconde équation, on obtient le système équivalent : $\left\{\begin{array}{rcl} 2x+3y-4z & = & 7 \\ 2x+3y-4z & = & -\frac{1}{2} \end{array}\right.$. Les deux lignes sont clairement incompatibles : aucun (x,y,z) ne peut vérifier à la fois $2x+3y-4z=7$ et $2x+3y-4z=-\frac{1}{2}$. L'ensemble des solutions est donc $\mathcal{S}=\varnothing$.

2. Pour le système $\left\{\begin{array}{rcl} 2x+3y-4z & = & 7 \\ 4x+6y-8z & = & 14 \end{array}\right.$, les deux équations définissent le même plan ! Le système est donc équivalent à une seule équation : $2x+3y-4z=7$. Si on réécrit cette équation sous la forme $z=\frac{1}{2}x+\frac{3}{4}y-\frac{7}{4}$, alors on peut décrire l'ensemble des solutions sous la forme : $\mathcal{S}=\left\{(x,y,\frac{1}{2}x+\frac{3}{4}y-\frac{7}{4}) \mid x,y\in\mathbb{R}\right\}$.

3. Soit le système $\left\{\begin{array}{rcl} 7x+2y-2z & = & 1 \\ 2x+3y+2z & = & 1 \end{array}\right.$. Par substitution :

$$\left\{\begin{array}{l} 7x+2y-2z=1 \\ 2x+3y+2z=1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} z=\frac{7}{2}x+y-\frac{1}{2} \\ 2x+3y+2\left(\frac{7}{2}x+y-\frac{1}{2}\right)=1 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{l} z=\frac{7}{2}x+y-\frac{1}{2} \\ 9x+5y=2 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} z=\frac{7}{2}x+y-\frac{1}{2} \\ y=-\frac{9}{5}x+\frac{2}{5} \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} z=\frac{17}{10}x-\frac{1}{10} \\ y=-\frac{9}{5}x+\frac{2}{5} \end{array}\right.$$

Pour décrire l'ensemble des solutions, on peut choisir x comme paramètre :

$$\mathcal{S}=\left\{\left(x,-\frac{9}{5}x+\frac{2}{5},\frac{17}{10}x-\frac{1}{10}\right) \mid x\in\mathbb{R}\right\}.$$

Géométriquement : nous avons trouvé une équation paramétrique de la droite définie par l'intersection de deux plans.

Du point de vue du nombre de solutions, nous constatons qu'il n'y a que deux possibilités, à savoir aucune solution ou une infinité de solutions. Mais les deux derniers cas ci-dessus sont néanmoins très différents géométriquement et il semblerait que dans le second cas (plans confondus), l'infinité de solutions soit plus grande que dans le troisième cas. Les chapitres suivants nous permettront de rendre rigoureuse cette impression.

Si on considère trois plans dans l'espace, une autre possibilité apparaît : il se peut que les trois plans s'intersectent en un seul point.

3.1.4 Résolution par la méthode de Cramer

On note $\left|\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right| = ad - bc$ le *déterminant*. On considère le cas d'un système de 2 équations à 2 inconnues :

$$\begin{cases} ax + by &= e \\ cx + dy &= f \end{cases}$$

Si $ad - bc \neq 0$, on trouve une unique solution dont les coordonnées (x,y) sont :

$$x = \frac{\begin{vmatrix} e & b \\ f & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} a & e \\ c & f \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}$$

Notez que le dénominateur égale le déterminant pour les deux coordonnées et est donc non nul. Pour le numérateur de la première coordonnée x, on remplace la première colonne par le second membre ; pour la seconde coordonnée y, on remplace la seconde colonne par le second membre.

Exemple 33. Résolvons le système $\begin{cases} tx - 2y &= 1 \\ 3x + ty &= 1 \end{cases}$ suivant la valeur du paramètre $t \in \mathbb{R}$.

Le déterminant associé au système est $\left|\begin{smallmatrix} t & -2 \\ 3 & t \end{smallmatrix}\right| = t^2 + 6$ et ne s'annule jamais. Il existe donc une unique solution (x,y) et elle vérifie :

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & t \end{vmatrix}}{t^2+6} = \frac{t+2}{t^2+6}, \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} t & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}}{t^2+6} = \frac{t-3}{t^2+6}.$$

Pour chaque t, l'ensemble des solutions est $\mathcal{S} = \left\{\left(\frac{t+2}{t^2+6}, \frac{t-3}{t^2+6}\right)\right\}$.

3.1.5 Résolution par inversion de matrice

En termes matriciels, le système linéaire

$$\begin{cases} ax + by &= e \\ cx + dy &= f \end{cases}$$

est équivalent à

$$AX = Y \quad \text{où} \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}.$$

Si le déterminant de la matrice A est non nul, c'est-à-dire si $ad - bc \neq 0$, alors la matrice A est inversible et

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

et l'unique solution $X = \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)$ du système est donnée par

$$X = A^{-1}Y.$$

Exemple 34. Résolvons le système $\begin{cases} x + y &= 1 \\ x + t^2 y &= t \end{cases}$ suivant la valeur du paramètre $t \in \mathbb{R}$.

Le déterminant du système est $\left|\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & t^2 \end{smallmatrix}\right| = t^2 - 1$.

Premier cas. $t \neq +1$ et $t \neq -1$. Alors $t^2 - 1 \neq 0$. La matrice $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & t^2 \end{smallmatrix}\right)$ est inversible d'inverse $A^{-1} = \frac{1}{t^2-1}\left(\begin{smallmatrix} t^2 & -1 \\ -1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Et la solution $X = \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)$ est

$$X = A^{-1}Y = \frac{1}{t^2 - 1}\begin{pmatrix} t^2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix} = \frac{1}{t^2 - 1}\begin{pmatrix} t^2 - t \\ t - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{t}{t+1} \\ \frac{1}{t+1} \end{pmatrix}.$$

Pour chaque $t \neq \pm 1$, l'ensemble des solutions est $\mathcal{S} = \left\{ \left(\frac{t}{t+1}, \frac{1}{t+1}\right) \right\}$.

Deuxième cas. $t = +1$. Le système s'écrit alors : $\begin{cases} x + y &= 1 \\ x + y &= 1 \end{cases}$ et les deux équations sont identiques. Il y a une infinité de solutions : $\mathcal{S} = \left\{(x, 1 - x) \mid x \in \mathbb{R}\right\}$.

Troisième cas. $t = -1$. Le système s'écrit alors : $\begin{cases} x + y &= 1 \\ x + y &= -1 \end{cases}$, les deux équations sont clairement incompatibles et donc $\mathcal{S} = \emptyset$.

3.1.6 Mini-exercices

1. Tracer les droites d'équations $\begin{cases} x - 2y &= -1 \\ -x + 3y &= 3 \end{cases}$ et résoudre le système linéaire de trois façons différentes : substitution, méthode de Cramer, inverse d'une matrice. Idem avec $\begin{cases} 2x - y &= 4 \\ 3x + 3y &= -5 \end{cases}$.
2. Résoudre suivant la valeur du paramètre $t \in \mathbb{R}$: $\begin{cases} 4x - 3y &= t \\ 2x - y &= t^2 \end{cases}$.
3. Discuter et résoudre suivant la valeur du paramètre $t \in \mathbb{R}$: $\begin{cases} tx - y &= 1 \\ x + (t-2)y &= -1 \end{cases}$.

   Idem avec $\begin{cases} (t-1)x + y &= 1 \\ 2x + ty &= -1 \end{cases}$.

3.2 Théorie des systèmes linéaires

3.2.1 Définitions

Définition 35. On appelle *équation linéaire* dans les *inconnues* $x_1, \dots, x_p$ toute relation de la forme

$$a_1 x_1 + \cdots + a_p x_p = b, \tag{3.1}$$

où $a_1, \dots, a_p$ et b sont des nombres réels donnés.

Remarque 36.
- Il importe d'insister ici sur le fait que ces équations linéaires sont *implicites*, c'est-à-dire qu'elles décrivent des relations entre les inconnues, mais ne donnent pas directement les valeurs que peuvent prendre les inconnues.
- *Résoudre* une équation signifie donc la rendre *explicite*, c'est-à-dire rendre plus apparentes les valeurs que les inconnues peuvent prendre.
- On peut aussi considérer des équations linéaires de nombres rationnels ou de nombres complexes.

Soit $n \geq 1$ un entier.

Définition 37. Un *système de n équations linéaires à p inconnues* est une liste de n équations linéaires.

On écrit usuellement de tels systèmes en n lignes placées les unes sous les autres.

Exemple 38. Le système suivant a 2 équations et 3 inconnues :

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x_1 & - & 3x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ -2x_1 & + & 4x_2 & - & 3x_3 & = & 9 \end{array} \right.$$

La forme générale d'un système linéaire de n équations à p inconnues est la suivante :

$$\left\{ \begin{array}{ccccccccl} a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & +a_{13}x_3 & + & \cdots & +a_{1p}x_p & = & b_1 & (\leftarrow \text{équation } 1) \\ a_{21}x_1 & +a_{22}x_2 & +a_{23}x_3 & + & \cdots & +a_{2p}x_p & = & b_2 & (\leftarrow \text{équation } 2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots & = & \vdots & \\ a_{i1}x_1 & +a_{i2}x_2 & +a_{i3}x_3 & + & \cdots & +a_{ip}x_p & = & b_i & (\leftarrow \text{équation } i) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots & = & \vdots & \\ a_{n1}x_1 & +a_{n2}x_2 & +a_{n3}x_3 & + & \cdots & +a_{np}x_p & = & b_n & (\leftarrow \text{équation } n) \end{array} \right.$$

Les nombres a_{ij}, $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, p$, sont les *coefficients* du système. Ce sont des données. Les nombres b_i, $i = 1, \dots, n$, constituent le *second membre* du système et sont également des données.

Il convient de bien observer comment on a rangé le système en lignes (une ligne par équation) numérotées de 1 à n par l'indice i, et en colonnes : les termes correspondant à une même inconnue x_j sont alignés verticalement les uns sous les autres. L'indice j varie de 1 à p. Il y a donc p colonnes à gauche des signes d'égalité, plus une colonne supplémentaire à droite pour le second membre. La notation avec double indice a_{ij} correspond à ce rangement : le premier indice (ici i) est le numéro de *ligne* et le second indice (ici j) est le numéro de *colonne*. Il est extrêmement important de toujours respecter cette convention.

Dans l'exemple 38, on a $n = 2$ (nombre d'équations = nombre de lignes), $p = 3$ (nombre d'inconnues = nombre de colonnes à gauche du signe =) et $a_{11} = 1$, $a_{12} = -3$, $a_{13} = 1$, $a_{21} = -2$, $a_{22} = 4$, $a_{23} = -3$, $b_1 = 1$ et $b_2 = 9$.

Définition 39. Une *solution* du système linéaire est une liste de p nombres réels $(s_1,s_2,\ldots,s_p)$ (un p-uplet) tels que si l'on substitue s_1 pour x_1, s_2 pour x_2, etc., dans le système linéaire, on obtient une égalité. L' *ensemble des solutions du système* est l'ensemble de tous ces p-uplets.

Exemple 40. Le système

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & - & 3x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ -2x_1 & + & 4x_2 & - & 3x_3 & = & 9 \end{array}\right.$$

admet comme solution $(-18,-6,1)$, c'est-à-dire

$$x_1 = -18\,, \qquad x_2 = -6\,, \qquad x_3 = 1\,.$$

Par contre, $(7,2,0)$ ne satisfait que la première équation. Ce n'est donc pas une solution du système.

En règle générale, on s'attache à déterminer l'ensemble des solutions d'un système linéaire. C'est ce que l'on appelle *résoudre* le système linéaire. Ceci amène à poser la définition suivante.

Définition 41. On dit que deux systèmes linéaires sont *équivalents* s'ils ont le même ensemble de solutions.

À partir de là, le jeu pour résoudre un système linéaire donné consistera à le transformer en un système équivalent dont la résolution sera plus simple que celle du système de départ. Nous verrons plus loin comment procéder de façon systématique pour arriver à ce but.

3.2.2 Différents types de systèmes

Voici un résultat théorique important pour les systèmes linéaires.

Théorème 42. *Un système d'équations linéaires n'a soit aucune solution, soit une seule solution, soit une infinité de solutions.*

En particulier, si vous trouvez 2 solutions différentes à un système linéaire, alors c'est que vous pouvez en trouver une infinité ! Un système linéaire qui n'a aucune solution est dit *incompatible*. La démonstration de ce théorème sera vue dans un chapitre ultérieur (« Matrices »).

3.2.3 Systèmes homogènes

Un cas particulier important est celui des *systèmes homogènes*, pour lesquels $b_1 = b_2 = \cdots = b_n = 0$, c'est-à-dire dont le second membre est nul. De tels systèmes sont toujours compatibles car ils admettent toujours la solution $s_1 = s_2 = \cdots = s_p = 0$. Cette solution est appelée *solution triviale*. Géométriquement, dans le cas 2×2, un système homogène correspond à deux droites qui passent par l'origine, (0,0) étant donc toujours solution.

3.2.4 Mini-exercices

1. Écrire un système linéaire de 4 équations et 3 inconnues qui n'a aucune solution. Idem avec une infinité de solution. Idem avec une solution unique.
2. Résoudre le système à n équations et n inconnues dont les équations sont $(L_i) : x_i - x_{i+1} = 1$ pour $i = 1, \ldots ,n-1$ et $(L_n) : x_n = 1$.
3. Résoudre les systèmes suivants :

$$\left\{\begin{array}{rrrrcl} x_1 & +2x_2 & +3x_3 & +4x_4 & = & 0 \\ & x_2 & +2x_3 & +3x_4 & = & 9 \\ & & x_3 & +2x_4 & = & 0 \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{rrrcl} x_1 & +2x_2 & +3x_3 & = & 1 \\ x_1 & +x_2 & +x_3 & = & 2 \\ x_1 & -x_2 & +x_3 & = & 3 \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{rrrrcl} x_1 & +x_2 & & & = & 1 \\ & x_2 & +x_3 & & = & 2 \\ & & x_3 & +x_4 & = & 3 \\ x_1 & +2x_2 & +2x_3 & +x_4 & = & 0 \end{array}\right.$$

3.3 Résolution par la méthode du pivot de Gauss

3.3.1 Systèmes échelonnés

Définition 43. Un système est *échelonné* si :

- le nombre de coefficients nuls commençant une ligne croît strictement ligne après ligne.

Il est *échelonné réduit* si en plus :
- le premier coefficient non nul d'une ligne vaut 1 ;
- et c'est le seul élément non nul de sa colonne.

Exemple 44.
- $\left\{\begin{array}{rrrrcl} 2x_1 & +3x_2 & +2x_3 & -x_4 & = & 5 \\ & -x_2 & -2x_3 & & = & 4 \\ & & & 3x_4 & = & 1 \end{array}\right.$ est échelonné (mais pas réduit).
- $\left\{\begin{array}{rrrrcl} 2x_1 & +3x_2 & +2x_3 & -x_4 & = & 5 \\ & & -2x_3 & & = & 4 \\ & & x_3 & +x_4 & = & 1 \end{array}\right.$ n'est pas échelonné (la dernière ligne commence avec la même variable que la ligne au-dessus).

Il se trouve que les systèmes linéaires sous une forme échelonnée réduite sont particulièrement simples à résoudre.

Exemple 45. Le système linéaire suivant à 3 équations et 4 inconnues est échelonné et réduit.

$$\left\{\begin{array}{rrrrcl} x_1 & & +2x_3 & & = & 25 \\ & x_2 & -2x_3 & & = & 16 \\ & & & x_4 & = & 1 \end{array}\right.$$

Ce système se résout trivialement en

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_1 & = & 25 - 2x_3 \\ x_2 & = & 16 + 2x_3 \\ x_4 & = & 1. \end{array}\right.$$

En d'autres termes, pour toute valeur de x_3 réelle, les valeurs de x_1, x_2 et x_4 calculées ci-dessus fournissent une solution du système, et on les a ainsi toutes obtenues. On peut donc décrire entièrement l'ensemble des solutions :

$$\mathcal{S} = \Big\{(25 - 2x_3, 16 + 2x_3, x_3, 1) \mid x_3 \in \mathbb{R}\Big\}.$$

3.3.2 Opérations sur les équations d'un système

Nous allons utiliser trois opérations élémentaires sur les équations (c'est-à-dire sur les lignes) qui sont :

1. $L_i \leftarrow \lambda L_i$ avec $\lambda \neq 0$: on peut multiplier une équation par un réel non nul.

2. $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$ (et $j \neq i$) : on peut ajouter à l'équation L_i un multiple d'une autre équation L_j.
3. $L_i \leftrightarrow L_j$: on peut échanger deux équations.

Ces trois opérations élémentaires ne changent pas les solutions d'un système linéaire ; autrement dit ces opérations transforment un système linéaire en un système linéaire équivalent.

Exemple 46. Utilisons ces opérations élémentaires pour résoudre le système suivant.

$$\left\{\begin{array}{rrrcr} x & +y & +7z & = & -1 \\ 2x & -y & +5z & = & -5 \\ -x & -3y & -9z & = & -5 \end{array}\right. \quad \begin{array}{l} (L_1) \\ (L_2) \\ (L_3) \end{array}$$

Commençons par l'opération $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$: on soustrait à la deuxième équation deux fois la première équation. On obtient un système équivalent avec une nouvelle deuxième ligne (plus simple) :

$$\left\{\begin{array}{rrrcr} x & +y & +7z & = & -1 \\ & -3y & -9z & = & -3 \\ -x & -3y & -9z & = & -5 \end{array}\right. \quad \begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ \\ \end{array}$$

Puis $L_3 \leftarrow L_3 + L_1$:

$$\left\{\begin{array}{rrrcr} x & +y & +7z & = & -1 \\ & -3y & -9z & = & -3 \\ & -2y & -2z & = & -6 \end{array}\right. \quad \begin{array}{l} \\ \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \end{array}$$

On continue pour faire apparaître un coefficient 1 en tête de la deuxième ligne ; pour cela on divise la ligne L_2 par -3 :

$$\left\{\begin{array}{rrrcr} x & +y & +7z & = & -1 \\ & y & +3z & = & 1 \\ & -2y & -2z & = & -6 \end{array}\right. \quad \begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow -\frac{1}{3}L_2 \\ \\ \end{array}$$

On continue ainsi

$$\left\{\begin{array}{rrrcr} x & +y & +7z & = & -1 \\ & y & +3z & = & 1 \\ & & 4z & = & -4 \end{array}\right. \quad \begin{array}{l} \\ \\ L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2 \end{array} \qquad \left\{\begin{array}{rrrcr} x & +y & +7z & = & -1 \\ & y & +3z & = & 1 \\ & & z & = & -1 \end{array}\right. \quad \begin{array}{l} \\ \\ L_3 \leftarrow \frac{1}{4}L_3 \end{array}$$

$$\left\{\begin{array}{rrrcr} x & +y & +7z & = & -1 \\ & y & & = & 4 \\ & & z & = & -1 \end{array}\right. \quad \begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow L_2 - 3L_3 \\ \\ \end{array} \qquad \left\{\begin{array}{rrrcr} x & +y & & = & 6 \\ & y & & = & 4 \\ & & z & = & -1 \end{array}\right. \quad \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - 7L_3 \\ \\ \\ \end{array}$$

On aboutit à un système réduit et échelonné :

$$\left\{\begin{array}{ccccc} x & & & = & 2 \\ & y & & = & 4 \\ & & z & = & -1 \end{array}\right. \quad {\scriptstyle L_1 \leftarrow L_1 - L_2}$$

On obtient ainsi $x = 2$, $y = 4$ et $z = -1$ et l'unique solution du système est $(2{,}4,-1)$.

La méthode utilisée pour cet exemple est reprise et généralisée dans le paragraphe suivant.

3.3.3 Méthode du pivot de Gauss

La méthode du pivot de Gauss permet de trouver les solutions de n'importe quel système linéaire. Nous allons décrire cet algorithme sur un exemple. Il s'agit d'une description précise d'une suite d'opérations à effectuer, qui dépendent de la situation et d'un ordre précis. Ce processus aboutit toujours (et en plus assez rapidement) à un système échelonné puis réduit, qui conduit immédiatement aux solutions du système.

Partie A. Passage à une forme échelonnée.

Soit le système suivant à résoudre :

$$\left\{\begin{array}{cccccc} & -x_2 & +2x_3 & +13x_4 & = & 5 \\ x_1 & -2x_2 & +3x_3 & +17x_4 & = & 4 \\ -x_1 & +3x_2 & -3x_3 & -20x_4 & = & -1 \end{array}\right.$$

Pour appliquer la méthode du pivot de Gauss, il faut d'abord que le premier coefficient de la première ligne soit non nul. Comme ce n'est pas le cas ici, on échange les deux premières lignes par l'opération élémentaire $L_1 \leftrightarrow L_2$:

$$\left\{\begin{array}{cccccc} x_1 & -2x_2 & +3x_3 & +17x_4 & = & 4 \\ & -x_2 & +2x_3 & +13x_4 & = & 5 \\ -x_1 & +3x_2 & -3x_3 & -20x_4 & = & -1 \end{array}\right. \quad {\scriptstyle L_1 \leftrightarrow L_2}$$

Nous avons déjà un coefficient 1 devant le x_1 de la première ligne. On dit que nous avons un *pivot* en position (1,1) (première ligne, première colonne). Ce pivot sert de base pour éliminer tous les autres termes sur la même colonne.

Il n'y a pas de terme x_1 sur le deuxième ligne. Faisons disparaître le terme x_1 de la troisième ligne ; pour cela on fait l'opération élémentaire $L_3 \leftarrow L_3 + L_1$:

$$\left\{\begin{array}{cccccc} x_1 & -2x_2 & +3x_3 & +17x_4 & = & 4 \\ & -x_2 & +2x_3 & +13x_4 & = & 5 \\ & x_2 & & -3x_4 & = & 3 \end{array}\right. \quad {\scriptstyle L_3 \leftarrow L_3 + L_1}$$

On change le signe de la seconde ligne ($L_2 \leftarrow -L_2$) pour faire apparaître 1 au coefficient du pivot (2,2) (deuxième ligne, deuxième colonne) :

$$\left\{\begin{array}{rrrrrr} x_1 & -2x_2 & +3x_3 & +17x_4 & = & 4 \\ & x_2 & -2x_3 & -13x_4 & = & -5 \\ & x_2 & & -3x_4 & = & 3 \end{array}\right. \quad {\scriptstyle L_2 \leftarrow -L_2}$$

On fait disparaître le terme x_2 de la troisième ligne, puis on fait apparaître un coefficient 1 pour le pivot de la position (3,3) :

$$\left\{\begin{array}{rrrrrr} x_1 & -2x_2 & +3x_3 & +17x_4 & = & 4 \\ & x_2 & -2x_3 & -13x_4 & = & -5 \\ & & 2x_3 & +10x_4 & = & 8 \end{array}\right. \quad {\scriptstyle L_3 \leftarrow L_3 - L_2}$$

$$\left\{\begin{array}{rrrrrr} x_1 & -2x_2 & +3x_3 & +17x_4 & = & 4 \\ & x_2 & -2x_3 & -13x_4 & = & -5 \\ & & x_3 & +5x_4 & = & 4 \end{array}\right. \quad {\scriptstyle L_3 \leftarrow \frac{1}{2} L_3}$$

Le système est maintenant sous forme échelonnée.

Partie B. Passage à une forme réduite.

Il reste à le mettre sous la forme échelonnée réduite. Pour cela, on ajoute à une ligne des multiples adéquats des lignes situées au-dessous d'elle, en allant du bas à droite vers le haut à gauche.

On fait apparaître des 0 sur la troisième colonne en utilisant le pivot de la troisième ligne :

$$\left\{\begin{array}{rrrrrr} x_1 & -2x_2 & +3x_3 & +17x_4 & = & 4 \\ & x_2 & & -3x_4 & = & 3 \\ & & x_3 & +5x_4 & = & 4 \end{array}\right. \quad {\scriptstyle L_2 \leftarrow L_2 + 2L_3}$$

$$\left\{\begin{array}{rrrrrr} x_1 & -2x_2 & & 2x_4 & = & -8 \\ & x_2 & & -3x_4 & = & 3 \\ & & x_3 & +5x_4 & = & 4 \end{array}\right. \quad {\scriptstyle L_1 \leftarrow L_1 - 3L_3}$$

On fait apparaître des 0 sur la deuxième colonne (en utilisant le pivot de la deuxième ligne) :

$$\left\{\begin{array}{rrrrrr} x_1 & & & -4x_4 & = & -2 \\ & x_2 & & -3x_4 & = & 3 \\ & & x_3 & +5x_4 & = & 4 \end{array}\right. \quad {\scriptstyle L_1 \leftarrow L_1 + 2L_2}$$

Le système est sous forme échelonnée réduite.

Partie C. Solutions. Le système est maintenant très simple à résoudre. En choisissant x_4 comme variable libre, on peut exprimer x_1,x_2,x_3 en fonction de x_4 :

$$x_1 = 4x_4 - 2, \quad x_2 = 3x_4 + 3, \quad x_3 = -5x_4 + 4.$$

Ce qui permet d'obtenir toutes les solutions du système :

$$\mathcal{S} = \Big\{(4x_4 - 2{,}3x_4 + 3, -5x_4 + 4{,}x_4) \mid x_4 \in \mathbb{R}\Big\}.$$

Remarque 47.
- Arrêtons nous quelque peu sur la notion d'algorithme. Il s'agit d'une description précise d'une suite d'opérations à effectuer, dans quel ordre et dans quel cas, qui aboutit au bout d'un nombre fini d'étapes si possible connu à l'avance au résultat voulu.
- La première raison pour utiliser cet algorithme du pivot Gauss est que l'on peut certes résoudre les systèmes à 2 ou 3 inconnues par des manipulations sur les équations menées au petit bonheur la chance et qui aboutissent à un résultat après un plus ou moins grand nombre d'opérations. Or l'expérience montre que ces opérations sont le plus souvent inutiles, redondantes, et surtout cause d'erreurs de calculs. Il est bien préférable de se laisser guider par une méthode stricte dont l'application garantit un nombre minimal de calculs (en général).
- La seconde raison est que dans les applications pratiques de l'algèbre linéaire, lesquelles sont extrêmement nombreuses et importantes, les systèmes à résoudre sont énormes (des milliers, voire des millions d'équations et d'inconnues) et qu'il n'est pas question d'effectuer les calculs à la main. Ce sont des ordinateurs qui s'en chargent, et ces derniers ont besoin de programmes, lesquels sont la traduction en tel ou tel langage d'un algorithme.

3.3.4 Systèmes homogènes

Le fait que l'on puisse toujours se ramener à un système échelonné réduit implique le résultat suivant :

Théorème 48. *Tout système homogène d'équations linéaires dont le nombre d'inconnues est strictement plus grand que le nombre d'équations a une infinité de solutions.*

Exemple 49. Considérons le système homogène

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcl} 3x_1 & + & 3x_2 & - & 2x_3 & & & - & x_5 & = & 0 \\ -x_1 & - & x_2 & + & x_3 & + & 3x_4 & + & x_5 & = & 0 \\ 2x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & + & 2x_5 & = & 0 \\ & & & & x_3 & + & 8x_4 & + & 4x_5 & = & 0. \end{array}\right.$$

Sa forme échelonnée réduite est

$$\begin{cases} x_1 & + & x_2 & & & & + & 13x_5 & = & 0 \\ & & & & x_3 & & + & 20x_5 & = & 0 \\ & & & & & x_4 & - & 2x_5 & = & 0. \end{cases}$$

On pose comme variables libres x_2 et x_5 pour avoir

$$x_1 = -x_2 - 13x_5, \qquad x_3 = -20x_5, \qquad x_4 = 2x_5,$$

et l'ensemble des solutions :

$$\mathcal{S} = \Big\{(-x_2 - 13x_5, x_2, -20x_5, 2x_5, x_5) \mid x_2, x_5 \in \mathbb{R}\Big\}$$

qui est bien infini.

3.3.5 Mini-exercices

1. Écrire un système linéaire à 4 équations et 5 inconnues qui soit échelonné mais pas réduit. Idem avec échelonné, non réduit, dont tous les coefficients sont 0 ou +1. Idem avec échelonné et réduit.
2. Résoudre les systèmes échelonnés suivants : $\begin{cases} 2x_1 & -x_2 & & +x_4 & = & 1 \\ & x_2 & +x_3 & -2x_4 & = & 3 \\ & & 2x_3 & +x_4 & = & 4 \\ & & & x_4 & = & -2 \end{cases}$

$$\begin{cases} x_1 & +x_2 & & +x_4 & = & 0 \\ & x_2 & +x_3 & & = & 0 \\ & & 2x_3 & +x_4 & = & 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 & +2x_2 & & +x_4 & = & 0 \\ & & 2x_3 & -3x_4 & = & 0 \end{cases}$$

3. Si l'on passe d'un système (S) par une des trois opérations élémentaires à un système (S'), alors quelle opération permet de passer de (S') à (S) ?
4. Résoudre les systèmes linéaires suivants par la méthode du pivot de Gauss :

$$\begin{cases} 2x & + & y & + & z & = & 3 \\ x & - & y & + & 3z & = & 8 \\ x & + & 2y & - & z & = & -3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x_1 & + & 4x_2 & - & 6x_3 & - & 2x_4 & = & 2 \\ 3x_1 & + & 6x_2 & - & 7x_3 & + & 4x_4 & = & 2 \\ 5x_1 & + & 10x_2 & - & 11x_3 & + & 6x_4 & = & 3 \end{cases}$$

5. Résoudre le système suivant, selon les valeurs de $a,b \in \mathbb{R}$:

$$\left\{\begin{array}{rrrcl} x & +y & -z & = & a \\ -x & & +2z & = & b \\ & 2y & +2z & = & 4 \end{array}\right.$$

Leçon 4

Introduction aux matrices

L'algèbre linéaire :

1) permet d'exprimer un système d'équations compliqué sous une forme simple et lisible.
2) permet de modéliser de nombreuses situations de l'économie et de la gestion où apparaissent des calculs de type linéaire.

Exemple 50. Dans le cas d'une entreprise qui possède différents magasins vendant divers produits, une matrice offre un moyen concis d'enregistrer les stocks.

$$\begin{array}{c c} \text{Magasin} & \begin{array}{cccc} \text{skis} & \text{Bâtons} & \text{Fixations} & \text{Outils} \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} & \begin{pmatrix} 110 & 120 & 90 & 150 \\ 200 & 180 & 210 & 110 \\ 175 & 190 & 160 & 80 \\ 140 & 170 & 180 & 140 \end{pmatrix} \end{array}$$

En lisant une ligne de la matrice, l'entreprise peut déterminer le niveau de stocks de n'importe lequel de ses magasins. En lisant une colonne, elle peut déterminer le niveau des stocks de n'importe quel groupe d'articles.

Les matrices sont des tableaux de nombres. La résolution d'un certain nombre de problèmes d'algèbre linéaire se ramène à des manipulations sur les matrices. Ceci est vrai en particulier pour la résolution des systèmes linéaires.

4.1 Définition

4.1.1 Définition

Définition 51. • Une *matrice réelle* A est un tableau rectangulaire d'éléments de $\mathbb{R}$.

- Elle est dite de *taille* $n \times p$ si le tableau possède n lignes et p colonnes.
- Les nombres du tableau sont appelés les *coefficients* de A.
- Le coefficient situé à la i-ème ligne et à la j-ème colonne est noté $a_{i,j}$.

Un tel tableau est représenté de la manière suivante :

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,j} & \dots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,j} & \dots & a_{2,p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i,1} & a_{i,2} & \dots & a_{i,j} & \dots & a_{i,p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,j} & \dots & a_{n,p} \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad A = \left(a_{i,j}\right)_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq p}} \quad \text{ou} \quad \left(a_{i,j}\right).$$

Exemple 52.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 0 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

est une matrice 2×3 avec, par exemple, $a_{1,1} = 1$ et $a_{2,3} = 7$.

Encore quelques définitions :

Définition 53.
- Deux matrices sont *égales* lorsqu'elles ont la même taille et que les coefficients correspondants sont égaux.
- L'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{R}$ est noté $M_{n,p}(\mathbb{R})$.

Remarque 54. Dans ce cours, nous nous intéressons aux matrices à coefficients réels, mais on peut considérer aussi des matrices à coefficients rationnels ou complexes : on a alors les ensembles $M_{n,p}(\mathbb{Q})$ et $M_{n,p}(\mathbb{C})$

4.1.2 Matrices particulières

Voici quelques types de matrices intéressantes :

- Si $n = p$ (même nombre de lignes que de colonnes), la matrice est dite *matrice carrée*. On note $M_n(\mathbb{K})$ au lieu de $M_{n,n}(\mathbb{K})$.

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

Les éléments $a_{1,1}, a_{2,2}, \dots, a_{n,n}$ forment la *diagonale principale* de la matrice.

- Une matrice qui n'a qu'une seule ligne ($n = 1$) est appelée *matrice ligne* ou *vecteur ligne*. On la note

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,p} \end{pmatrix}.$$

- De même, une matrice qui n'a qu'une seule colonne ($p = 1$) est appelée *matrice colonne* ou *vecteur colonne*. On la note

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} \\ a_{2,1} \\ \vdots \\ a_{n,1} \end{pmatrix}.$$

- La matrice (de taille $n \times p$) dont tous les coefficients sont des zéros est appelée la *matrice nulle* et est notée $0_{n,p}$ ou plus simplement 0. Dans le calcul matriciel, la matrice nulle joue le rôle du nombre 0 pour les réels.

4.1.3 Addition de matrices

Exemple 55. Supposons que les livraisons D soient faites aux magasins de l'entreprise considérée dans l'exemple 50. Quel est le nouveau niveau des stocks ?

$$D = \begin{pmatrix} 40 & 20 & 50 & 10 \\ 25 & 30 & 10 & 60 \\ 15 & 0 & 40 & 70 \\ 60 & 40 & 10 & 50 \end{pmatrix}.$$

Pour trouver le nouveau niveau des stocks, désignons la matrice initiale par S et calculons $S + D$. En additionnant les uns aux autres les éléments correspondants de chaque matrice, nous trouvons :

$$S+D = \begin{pmatrix} 120+40 & 110+20 & 90+50 & 150+10 \\ 200+25 & 180+30 & 210+10 & 110+60 \\ 175+15 & 190+0 & 160+40 & 80+70 \\ 140+60 & 170+40 & 180+10 & 140+50 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 160 & 130 & 140 & 160 \\ 225 & 210 & 220 & 170 \\ 190 & 190 & 200 & 150 \\ 200 & 210 & 190 & 190 \end{pmatrix}$$

Somme de deux matrices

Définition 56 (Somme de deux matrices)**.** Soient A et B deux matrices ayant la même taille $n \times p$. Leur *somme* $C = A + B$ est la matrice de taille $n \times p$ définie par

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}.$$

En d'autres termes, on somme coefficients par coefficients. Remarque : on note indifféremment a_{ij} où $a_{i,j}$ pour les coefficients de la matrice A.

Exemple 57.

$$\text{Si} \qquad A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 7 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{alors} \qquad A+B = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Par contre si} \qquad B' = \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \end{pmatrix} \qquad \text{alors} \quad A + B' \quad \text{n'est pas définie.}$$

Produit d'une matrice par un scalaire

Exemple 58. La matrice colonne $A = \begin{pmatrix} 25 \\ 40 \\ 32 \end{pmatrix}$ est une matrice de prix HT. On suppose que le taux de la TVA soit de 20%. Quelle est la matrice B des prix de vente TTC ?

Le coefficient multiplicateur est 1,2. On doit donc multiplier tous les éléments de A par 1,2. On obtient ainsi

$$B = (1{,}2) = 1{,}2 \times \begin{pmatrix} 25 \\ 40 \\ 32 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}2 \times 25 \\ 1{,}2 \times 40 \\ 1{,}2 \times 32 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 \\ 48 \\ 38{,}4 \end{pmatrix} \tag{4.1}$$

En algèbre linéaire, un simple nombre tel que 12, -2 ou 0,07 est appelé un *scalaire*.

Définition 59 (Produit d'une matrice par un scalaire)**.** Le produit d'une matrice $A = \left(a_{ij}\right)$ de $M_{n,p}(\mathbb{K})$ par un scalaire $\alpha \in \mathbb{K}$ est la matrice $\left(\alpha a_{ij}\right)$ formée en multipliant chaque coefficient de A par α. Elle est notée $\alpha \cdot A$ (ou simplement αA).

Ce processus s'appelle multiplication par un scalaire parce que l'échelle des éléments de la matrice est augmentée ou diminuée selon la valeur de ce scalaire.

Exemple 60.

$$\text{Si} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \alpha = 2 \qquad \text{alors} \qquad \alpha A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

La matrice $(-1)A$ est l'*opposée* de A et est notée $-A$. La *différence* $A - B$ est définie par $A + (-B)$.

Exemple 61.

Si $\quad A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 4 & -5 & 2 \end{pmatrix} \quad$ et $\quad B = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 2 \\ 7 & -5 & 3 \end{pmatrix} \quad$ alors $\quad A - B = \begin{pmatrix} 3 & -5 & -2 \\ -3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

L'addition et la multiplication par un scalaire se comportent sans surprises :

Proposition 62. *Soient A, B et C trois matrices appartenant à $M_{n,p}(\mathbb{K})$. Soient $\alpha \in \mathbb{K}$ et $\beta \in \mathbb{K}$ deux scalaires.*

1. *$A + B = B + A$: la somme est commutative,*
2. *$A + (B + C) = (A + B) + C$: la somme est associative,*
3. *$A + 0 = A$: la matrice nulle est l'élément neutre de l'addition,*
4. *$(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$,*
5. *$\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$.*

4.1.4 Mini-exercices

1. Soient $A = \begin{pmatrix} -7 & 2 \\ 0 & -1 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 21 & -6 \\ 0 & 3 \\ -3 & 12 \end{pmatrix}$, $D = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $E = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \\ -8 & 6 \end{pmatrix}$. Calculer toutes les sommes possibles de deux de ces matrices. Calculer $3A + 2C$ et $5B - 4D$. Trouver α tel que $A - \alpha C$ soit la matrice nulle.
2. Montrer que si $A + B = A$, alors B est la matrice nulle.
3. Que vaut $0 \cdot A$? et $1 \cdot A$? Justifier l'affirmation : $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$. Idem avec $nA = A + A + \cdots + A$ (n occurrences de A).

4.2 Multiplication de matrices

Exemple 63. Reportons-nous à l'exemple 50. Supposons que le prix des skis soit de 200 euros, celui de bâtons 50 euros, celui des fixations 100 euros et celui des outils 150 euros. Quelle est la valeur V du stock des différents magasins ?

On exprime les prix sous la forme d'un vecteur colonne des prix P et on multiplie S et P.

$$V = SP = S + D = \begin{pmatrix} 120 & 110 & 90 & 150 \\ 200 & 180 & 210 & 110 \\ 175 & 190 & 160 & 80 \\ 140 & 170 & 180 & 140 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 200 \\ 50 \\ 100 \\ 150 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 120 \times 200 + 110 \times 50 + 90 \times 100 + 150 \times 150 \\ 200 \times 200 + 180 \times 50 + 210 \times 100 + 110 \times 150 \\ 175 \times 200 + 190 \times 50 + 160 \times 100 + 80 \times 150 \\ 140 \times 200 + 170 \times 50 + 180 \times 100 + 140 \times 150 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 61000 \\ 86500 \\ 72500 \\ 75500 \end{pmatrix} \quad (4.2)$$

4.2.1 Définition du produit

Le produit AB de deux matrices A et B est défini si et seulement si le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B.

Définition 64 (Produit de deux matrices)**.** Soient $A = (a_{ij})$ une matrice $n \times p$ et $B = (b_{ij})$ une matrice $p \times q$. Alors le produit $C = AB$ est une matrice $n \times q$ dont les coefficients c_{ij} sont définis par :

$$\boxed{c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}}$$

On peut écrire le coefficient de façon plus développée, à savoir :

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{ik}b_{kj} + \cdots + a_{ip}b_{pj}.$$

Il est commode de disposer les calculs de la façon suivante.

$$\begin{array}{rcl} & \begin{pmatrix} & & & \times & & \\ & & & \times & & \\ & & & \times & & \\ & & & \times & & \end{pmatrix} & \leftarrow B \\ A \rightarrow \begin{pmatrix} & & & \\ \times & \times & \times & \times \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} & & & | & & \\ & & & | & & \\ - & - & - & c_{ij} & & \end{pmatrix} & \leftarrow AB \end{array}$$

Avec cette disposition, on considère d'abord la ligne de la matrice A située à gauche du coefficient que l'on veut calculer (ligne représentée par des $\times$ dans A) et aussi la colonne de la matrice B située au-dessus du coefficient que l'on veut calculer (colonne représentée par des $\times$ dans B). On calcule le produit du premier coefficient de la ligne par le premier coefficient de la colonne $(a_{i1} \times b_{1j})$, que l'on ajoute au produit du deuxième coefficient de la ligne par le deuxième coefficient de la colonne $(a_{i2} \times b_{2j})$, que l'on ajoute au produit du troisième. . .

4.2.2 Exemples

Exemple 65.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

On dispose d'abord le produit correctement (à gauche) : la matrice obtenue est de taille 2×2. Puis on calcule chacun des coefficients, en commençant par le premier coefficient $c_{11} = 1 \times 1 \ + \ 2 \times (-1) \ + \ 3 \times 1 = 2$ (au milieu), puis les autres (à droite).

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} \end{array} \qquad \begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} \color{red}{1} & 2 \\ \color{red}{-1} & 1 \\ \color{red}{1} & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \color{red}{1} & \color{red}{2} & \color{red}{3} \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \color{blue}{2} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} \end{array} \qquad \begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 11 \end{pmatrix} \end{array}$$

Un exemple intéressant est le produit d'un vecteur ligne par un vecteur colonne :

$$u = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix} \qquad v = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Alors $u \times v$ est une matrice de taille 1×1 dont l'unique coefficient est $a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n$. Ce nombre s'appelle le *produit scalaire* des vecteurs u et v.

Calculer le coefficient c_{ij} dans le produit $A \times B$ revient donc à calculer le produit scalaire des vecteurs formés par la i-ème ligne de A et la j-ème colonne de B.

4.2.3 Pièges à éviter

Premier piège. Le produit de matrices n'est pas commutatif en général.

En effet, il se peut que AB soit défini mais pas BA, ou que AB et BA soient tous deux définis mais pas de la même taille. Mais même dans le cas où AB et BA sont définis et de la même taille, on a en général $AB \neq BA$.

Exemple 66.

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 3 \\ -2 & -6 \end{pmatrix} \qquad \text{mais} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 2 \\ 29 & -2 \end{pmatrix}.$$

Deuxième piège. $AB = 0$ **n'implique pas** $A = 0$ **ou** $B = 0$**.**

Il peut arriver que le produit de deux matrices non nulles soit nul. En d'autres termes, on peut avoir $A \neq 0$ et $B \neq 0$ mais $AB = 0$.

Exemple 67.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Troisième piège. $AB = AC$ **n'implique pas** $B = C$**.** On peut avoir $AB = AC$ et $B \neq C$.

Exemple 68.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad AB = AC = \begin{pmatrix} -5 & -4 \\ 15 & 12 \end{pmatrix}.$$

4.2.4 Propriétés du produit de matrices

Malgré les difficultés soulevées au-dessus, le produit vérifie les propriétés suivantes :

Proposition 69.

1. *$A(BC) = (AB)C$: associativité du produit,*
2. *$A(B + C) = AB + AC$ et $(B + C)A = BA + CA$: distributivité du produit par rapport à la somme,*
3. *$A \cdot 0 = 0$ et $0 \cdot A = 0$.*

4.2.5 La matrice identité

La matrice carrée suivante s'appelle la *matrice identité* :

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Ses éléments diagonaux sont égaux à 1 et tous ses autres éléments sont égaux à 0. Elle se note I_n ou simplement I. Dans le calcul matriciel, la matrice identité joue un rôle analogue à celui du nombre 1 pour les réels. C'est l'élément neutre pour la multiplication. En d'autres termes :

Proposition 70. *Si A est une matrice $n \times p$, alors*

$$I_n \cdot A = A \qquad \text{et} \qquad A \cdot I_p = A.$$

4.2.6 Puissance d'une matrice

Dans l'ensemble $M_n(\mathbb{K})$ des matrices carrées de taille $n \times n$ à coefficients dans $\mathbb{K}$, la multiplication des matrices est une opération interne : si $A,B \in M_n(\mathbb{K})$ alors $AB \in M_n(\mathbb{K})$.

En particulier, on peut multiplier une matrice carrée par elle-même : on note $A^2 = A \times A$, $A^3 = A \times A \times A$.

On peut ainsi définir les puissances successives d'une matrice :

Définition 71. Pour tout $A \in M_n(\mathbb{K})$, on définit les puissances successives de A par $A^0 = I_n$ et $A^{p+1} = A^p \times A$ pour tout $p \in \mathbb{N}$. Autrement dit, $A^p = \underbrace{A \times A \times \cdots \times A}_{p \text{ facteurs}}$.

Exemple 72. On cherche à calculer A^p avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. On calcule A^2, A^3 et A^4 et on obtient :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad A^3 = A^2 \times A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \qquad A^4 = A^3 \times A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 15 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}.$$

L'observation de ces premières puissances permet de penser que la formule est : $A^p = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2^p - 1 \\ 0 & (-1)^p & 0 \\ 0 & 0 & 2^p \end{pmatrix}$. Démontrons ce résultat par récurrence.

Il est vrai pour $p = 0$ (on trouve l'identité). On le suppose vrai pour un entier p et on va le démontrer pour $p + 1$. On a, d'après la définition,

$$A^{p+1} = A^p \times A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2^p - 1 \\ 0 & (-1)^p & 0 \\ 0 & 0 & 2^p \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2^{p+1} - 1 \\ 0 & (-1)^{p+1} & 0 \\ 0 & 0 & 2^{p+1} \end{pmatrix}.$$

Donc la propriété est démontrée.

4.2.7 Formule du binôme

Comme la multiplication n'est pas commutative, les identités binomiales usuelles sont fausses. En particulier, $(A + B)^2$ ne vaut en général pas $A^2 + 2AB + B^2$, mais on sait seulement que

$$(A + B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2.$$

Proposition 73 (Calcul de $(A+B)^p$ lorsque $AB = BA$)**.** *Soient A et B deux éléments de $M_n(\mathbb{K})$ qui* commutent*, c'est-à-dire tels que $AB = BA$. Alors, pour tout entier $p \geq 0$, on a la formule*

$$(A+B)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} A^{p-k} B^k$$

où $\binom{p}{k}$ désigne le coefficient du binôme.

La démonstration est similaire à celle de la formule du binôme pour $(a+b)^p$, avec $a,b \in \mathbb{R}$.

Exemple 74. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. On pose $N = A - I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. La matrice N est nilpotente (c'est-à-dire il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $N^k = 0$) comme le montrent les calculs suivants :

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad N^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad N^4 = 0.$$

Comme on a $A = I + N$ et les matrices N et I commutent (la matrice identité commute avec toutes les matrices), on peut appliquer la formule du binôme de Newton. On utilise que $I^k = I$ pour tout k et surtout que $N^k = 0$ si $k \geq 4$. On obtient

$$A^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} N^k I^{p-k} = \sum_{k=0}^{3} \binom{p}{k} N^k = I + pN + \tfrac{p(p-1)}{2!} N^2 + \tfrac{p(p-1)(p-2)}{3!} N^3.$$

D'où

$$A^p = \begin{pmatrix} 1 & p & p^2 & p(p^2-p+1) \\ 0 & 1 & 2p & p(3p-2) \\ 0 & 0 & 1 & 3p \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4.2.8 Mini-exercices

1. Soient $A = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 6 & -4 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, $B = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & -3 \end{smallmatrix}\right)$, $C = \left(\begin{smallmatrix} 8 & 2 \\ -3 & 2 \\ -5 & 5 \end{smallmatrix}\right)$, $D = \left(\begin{smallmatrix} 5 \\ 2 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)$, $E = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}$. Quels produits sont possibles ? Les calculer !
2. Soient $A = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{smallmatrix}\right)$ et $B = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Calculer A^2, B^2, AB et BA.
3. Soient $A = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{smallmatrix}\right)$ et $B = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Calculer A^p et B^p pour tout $p \geq 0$. Montrer que $AB = BA$. Calculer $(A+B)^p$.

4.3 Matrices triangulaires, transposition, trace, matrices symétriques

4.3.1 Matrices triangulaires, matrices diagonales

Soit A une matrice de taille $n \times n$. On dit que A est *triangulaire inférieure* si ses éléments au-dessus de la diagonale sont nuls, autrement dit :

$$i < j \implies a_{ij} = 0.$$

Une matrice triangulaire inférieure a la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

On dit que A est *triangulaire supérieure* si ses éléments en-dessous de la diagonale sont nuls, autrement dit :

$$i > j \implies a_{ij} = 0.$$

Une matrice triangulaire supérieure a la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \dots & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & \dots & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Exemple 75. Deux matrices triangulaires inférieures (à gauche), une matrice triangulaire supérieure (à droite) :

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Une matrice qui est triangulaire inférieure *et* triangulaire supérieure est dite *diagonale*. Autrement dit : $i \neq j \implies a_{ij} = 0$.

Exemple 76. Exemples de matrices diagonales :

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Exemple 77 (Puissances d'une matrice diagonale). Si D est une matrice diagonale, il est très facile de calculer ses puissances D^p (par récurrence sur p) :

$$D = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \alpha_{n-1} & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \alpha_n \end{pmatrix} \qquad \Longrightarrow \qquad D^p = \begin{pmatrix} \alpha_1^p & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_2^p & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \alpha_{n-1}^p & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \alpha_n^p \end{pmatrix}$$

4.3.2 La transposition

Soit A la matrice de taille $n \times p$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{np} \end{pmatrix}.$$

Définition 78. On appelle *matrice transposée* de A la matrice A^T de taille $p \times n$ définie par :

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1p} & a_{2p} & \dots & a_{np} \end{pmatrix}.$$

Autrement dit : le coefficient à la place (i,j) de A^T est a_{ji}. Ou encore la i-ème ligne de A devient la i-ème colonne de A^T (et réciproquement la j-ème colonne de A^T est la j-ème ligne de A).

Notation : La transposée de la matrice A se note aussi souvent ${}^tA$.

Exemple 79.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & -6 \\ -7 & 8 & 9 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & -6 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 3 & -5 & 2 \end{pmatrix} \qquad (1 \quad -2 \quad 5)^T = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

L'opération de transposition obéit aux règles suivantes :

Théorème 80. *1.* $(A+B)^T = A^T + B^T$

2. $(\alpha A)^T = \alpha A^T$

3. $(A^T)^T = A$

4. $\boxed{(AB)^T = B^T A^T}$

4.3.3 La trace

Dans le cas d'une matrice carrée de taille $n \times n$, les éléments $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ sont appelés les *éléments diagonaux*.

Sa *diagonale principale* est la diagonale $(a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn})$.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Définition 81. La *trace* de la matrice A est le nombre obtenu en additionnant les éléments diagonaux de A. Autrement dit, $\boxed{\operatorname{Tr} A = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}.}$

Exemple 82. • Si $A = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 5 \end{smallmatrix}\right)$, alors $\operatorname{Tr} A = 2 + 5 = 7$.

• Pour $B = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 5 & 2 & 8 \\ 11 & 0 & -10 \end{smallmatrix}\right)$, $\operatorname{Tr} B = 1 + 2 - 10 = -7$.

Théorème 83. *Soient A et B deux matrices $n \times n$. Alors :*

1. $\operatorname{Tr}(A+B) = \operatorname{Tr} A + \operatorname{Tr} B$,

2. $\operatorname{Tr}(\alpha A) = \alpha \operatorname{Tr} A$ *pour tout* $\alpha \in \mathbb{K}$,

3. $\operatorname{Tr}(A^T) = \operatorname{Tr} A$,

4. $\operatorname{Tr}(AB) = \operatorname{Tr}(BA)$.

4.3.4 Matrices symétriques

Définition 84. Une matrice A de taille $n \times n$ est *symétrique* si elle est égale à sa transposée, c'est-à-dire si

$$A = A^T,$$

ou encore si $a_{ij} = a_{ji}$ pour tout $i,j = 1, \ldots, n$. Les coefficients sont donc symétriques par rapport à la diagonale.

Exemple 85. Les matrices suivantes sont symétriques :

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & -1 \\ 5 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Exemple 86. Pour une matrice B quelconque, les matrices $B \cdot B^T$ et $B^T \cdot B$ sont symétriques.

Preuve : $(BB^T)^T = (B^T)^T B^T = BB^T$. Idem pour $B^T B$.

4.3.5 Matrices antisymétriques

Définition 87. Une matrice A de taille $n \times n$ est *antisymétrique* si

$$A^T = -A,$$

c'est-à-dire si $a_{ij} = -a_{ji}$ pour tout $i,j = 1,\dots,n$.

Exemple 88.

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ -4 & 0 & -5 \\ -2 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

Remarquons que les éléments diagonaux d'une matrice antisymétrique sont toujours tous nuls.

Exemple 89. Toute matrice est la somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.

Preuve : Soit A une matrice. Définissons $B = \frac{1}{2}(A+A^T)$ et $C = \frac{1}{2}(A-A^T)$. Alors d'une part $A = B + C$; d'autre part B est symétrique, car $B^T = \frac{1}{2}(A^T + (A^T)^T) = \frac{1}{2}(A^T + A) = B$; et enfin C est antisymétrique, car $C^T = \frac{1}{2}(A^T - (A^T)^T) = -C$.

Exemple :

$$\text{Pour} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 10 \\ 8 & -3 \end{pmatrix} \qquad \text{alors} \qquad A = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 9 \\ 9 & -3 \end{pmatrix}}_{\text{symétrique}} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{antisymétrique}}.$$

4.3.6 Mini-exercices

1. Montrer que la somme de deux matrices triangulaires supérieures reste triangulaire supérieure. Montrer que c'est aussi valable pour le produit.
2. Montrer que si A est triangulaire supérieure, alors A^T est triangulaire inférieure. Et si A est diagonale ?

3. Soit $A = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$. Calculer $A^T \cdot A$, puis $A \cdot A^T$.
4. Soit $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$. Calculer $\mathrm{Tr}(A \cdot A^T)$.
5. Montrer que la décomposition d'une matrice sous la forme « symétrique + antisymétrique » est unique.

Leçon 5

Inversion des matrices

5.1 Définitions et premières propriétés

5.1.1 Définition

Définition 90 (Matrice inverse)**.** Soit A une matrice carrée de taille $n \times n$. S'il existe une matrice carrée B de taille $n \times n$ telle que

$$AB = I \qquad \text{et} \qquad BA = I,$$

on dit que A est *inversible*. On appelle B l'*inverse de* A et on la note A^{-1}.

On verra plus tard qu'il suffit en fait de vérifier une seule des conditions $AB = I$ ou bien $BA = I$.

- Plus généralement, quand A est inversible, pour tout $p \in \mathbb{N}$, on note :

$$A^{-p} = (A^{-1})^p = \underbrace{A^{-1}A^{-1} \cdots A^{-1}}_{p \text{ facteurs}}.$$

- L'ensemble des matrices inversibles de $M_n(\mathbb{R})$ est noté $GL_n(\mathbb{R})$ (GL est l'acronyme de *groupe Général Linéaire*).

5.1.2 Exemples

Exemple 91. Soit $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{smallmatrix}\right)$. Étudier si A est inversible, c'est étudier l'existence d'une matrice $B = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ à coefficients dans $\mathbb{R}$, telle que $AB = I$ et $BA = I$. Or $AB = I$ équivaut à :

$$AB = I \iff \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} a+2c & b+2d \\ 3c & 3d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Cette égalité équivaut au système :

$$\begin{cases} a+2c=1 \\ b+2d=0 \\ 3c=0 \\ 3d=1 \end{cases}$$

Sa résolution est immédiate : $a=1$, $b=-\frac{2}{3}$, $c=0$, $d=\frac{1}{3}$. Il n'y a donc qu'une seule matrice possible, à savoir $B=\left(\begin{smallmatrix} 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} \end{smallmatrix}\right)$. Pour prouver qu'elle convient, il faut aussi montrer l'égalité $BA=I$, dont la vérification est laissée au lecteur. La matrice A est donc inversible et $A^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

Exemple 92. La matrice $A=\left(\begin{smallmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ n'est pas inversible. En effet, soit $B=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice quelconque. Alors le produit

$$BA=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3a+5b & 0 \\ 3c+5d & 0 \end{pmatrix}$$

ne peut jamais être égal à la matrice identité.

Exemple 93.
- Soit I_n la matrice carrée identité de taille $n\times n$. C'est une matrice inversible, et son inverse est elle-même par l'égalité $I_nI_n=I_n$.
- La matrice nulle 0_n de taille $n\times n$ n'est pas inversible. En effet on sait que, pour toute matrice B de $M_n(\mathbb{R})$, on a $B0_n=0_n$, qui ne peut jamais être la matrice identité.

5.1.3 Propriétés

5.1.3.1 Unicité

Proposition 94. *Si A est inversible, alors son inverse est unique.*

5.1.3.2 Inverse de l'inverse

Proposition 95. *Soit A une matrice inversible. Alors A^{-1} est aussi inversible et on a :* $\boxed{(A^{-1})^{-1}=A}$

5.1.3.3 Inverse d'un produit

Proposition 96. *Soient A et B deux matrices inversibles de même taille. Alors AB est inversible et* $\boxed{(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}}$

Il faut bien faire attention à l'inversion de l'ordre !

Démonstration. Il suffit de montrer $(B^{-1}A^{-1})(AB) = I$ et $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = I$. Cela suit de

$$\begin{aligned} & (B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(AA^{-1})B = B^{-1}IB = B^{-1}B = I, \\ \text{et}\quad & (AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AIA^{-1} = AA^{-1} = I. \end{aligned}$$

□

De façon analogue, on montre que si $A_1, \dots, A_m$ sont inversibles, alors

$$(A_1A_2\cdots A_m)^{-1} = A_m^{-1}A_{m-1}^{-1}\cdots A_1^{-1}.$$

5.1.3.4 Simplification par une matrice inversible

Si C est une matrice quelconque de $M_n(\mathbb{R})$, nous avons vu que la relation $AC = BC$ où A et B sont des éléments de $M_n(\mathbb{R})$ n'entraîne pas forcément l'égalité $A = B$. En revanche, si C est une matrice inversible, on a la proposition suivante :

Proposition 97. *Soient A et B deux matrices de $M_n(\mathbb{R})$ et C une matrice inversible de $M_n(\mathbb{R})$. Alors l'égalité $AC = BC$ implique l'égalité $A = B$.*

Démonstration. Ce résultat est immédiat : si on multiplie à droite l'égalité $AC = BC$ par C^{-1}, on obtient l'égalité : $(AC)C^{-1} = (BC)C^{-1}$. En utilisant l'associativité du produit des matrices on a $A(CC^{-1}) = B(CC^{-1})$, ce qui donne d'après la définition de l'inverse $AI = BI$, d'où $A = B$. □

5.1.4 Mini-exercices

1. Soient $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$. Calculer A^{-1}, B^{-1} , $(AB)^{-1}$, $(BA)^{-1}$, A^{-2}.
2. Calculer l'inverse de $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.
3. Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer $2A - A^2$. Sans calculs, en déduire A^{-1}.

5.2 Méthodes de calcul

Nous allons voir une méthode pour calculer l'inverse d'une matrice quelconque de manière efficace. Cette méthode est une reformulation de la méthode du pivot de Gauss pour les systèmes linéaires. Auparavant, nous commençons par une formule directe dans le cas simple des matrices 2×2.

5.2.1 Matrices 2×2

Considérons la matrice 2×2 : $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

Proposition 98. *A est inversible si et seulement si $ad - bc \neq 0$, et dans ce cas* $\boxed{A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}}$

Remarque 99. Le réel $ad - bc$ s'appelle *déterminant* de A, et la formule pour l'inverse se réécrit

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}}$$

Démonstration. On vérifie que si $B = \frac{1}{ad-bc} \left(\begin{smallmatrix} d & -b \\ -c & a \end{smallmatrix}\right)$ alors $AB = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Idem pour BA. $\square$

5.2.2 Méthode de Gauss pour inverser les matrices

La méthode pour inverser une matrice A consiste à faire des opérations élémentaires sur les lignes de la matrice A jusqu'à la transformer en la matrice identité I. On fait simultanément les mêmes opérations élémentaires en partant de la matrice I. On aboutit alors à une matrice qui est A^{-1}. La preuve sera vue dans la section suivante.

En pratique, on fait les deux opérations en même temps en adoptant la disposition suivante : à côté de la matrice A que l'on veut inverser, on rajoute la matrice identité pour former un tableau $(A \mid I)$. Sur les lignes de cette matrice augmentée, on effectue des opérations élémentaires jusqu'à obtenir le tableau $(I \mid B)$. Et alors $B = A^{-1}$.

Ces opérations élémentaires sur les lignes sont :

1. $L_i \leftarrow \lambda L_i$ avec $\lambda \neq 0$: on peut multiplier une ligne par un réel non nul (ou un élément de $\mathbb{R} \setminus \{0\}$).
2. $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$ (et $j \neq i$) : on peut ajouter à la ligne L_i un multiple d'une autre ligne L_j.
3. $L_i \leftrightarrow L_j$: on peut échanger deux lignes.

N'oubliez pas : tout ce que vous faites sur la partie gauche de la matrice augmentée, vous devez aussi le faire sur la partie droite.

5.2.3 Un exemple

Calculons l'inverse de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

Voici la matrice augmentée, avec les lignes numérotées :

$$(A \mid I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \scriptstyle L_1 \\ \scriptstyle L_2 \\ \scriptstyle L_3 \end{array}$$

On applique la méthode de Gauss pour faire apparaître des 0 sur la première colonne, d'abord sur la deuxième ligne par l'opération élémentaire $L_2 \leftarrow L_2 - 4L_1$ qui conduit à la matrice augmentée :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & -5 & -4 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \scriptstyle L_2 \leftarrow L_2 - 4L_1 \\ \\ \end{array}$$

Puis un 0 sur la première colonne, à la troisième ligne, avec $L_3 \leftarrow L_3 + L_1$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & -5 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \scriptstyle L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \end{array}$$

On multiplie la ligne L_2 afin qu'elle commence par 1 :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{5}{8} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{8} & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \scriptstyle L_2 \leftarrow -\frac{1}{8} L_2 \\ \\ \end{array}$$

On continue afin de faire apparaître des 0 partout sous la diagonale, et on multiplie la ligne L_3. Ce qui termine la première partie de la méthode de Gauss :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{5}{8} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{8} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \scriptstyle L_3 \leftarrow L_3 - 4L_2 \end{array}$$

puis

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{5}{8} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{8} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \scriptstyle L_3 \leftarrow 2L_3 \end{array}$$

Il ne reste plus qu'à « remonter » pour faire apparaître des zéros au-dessus de la diagonale :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{7}{4} & -\frac{3}{4} & -\frac{5}{4} \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 2 \end{array}\right) \quad {\scriptstyle L_2 \leftarrow L_2 - \frac{5}{8} L_3}$$

puis

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{7}{4} & -\frac{3}{4} & -\frac{5}{4} \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 2 \end{array}\right) \quad {\scriptstyle L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2 - L_3}$$

Ainsi l'inverse de A est la matrice obtenue à droite et après avoir factorisé tous les coefficients par $\frac{1}{4}$, on a obtenu :

$$A^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 7 & -3 & -5 \\ -8 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

Pour se rassurer sur ses calculs, on n'oublie pas de vérifier rapidement que $A \times A^{-1} = I$.

5.2.4 Mini-exercices

1. Si possible calculer l'inverse des matrices : $\left(\begin{smallmatrix} 3 & 1 \\ 7 & 2 \end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix} 2 & -3 \\ -5 & 4 \end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix} \alpha+1 & 1 \\ 2 & \alpha \end{smallmatrix}\right)$.
2. Soit $A(\theta) = \left(\begin{smallmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{smallmatrix}\right)$. Calculer $A(\theta)^{-1}$.
3. Calculer l'inverse des matrices : $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 3 \end{smallmatrix}\right)$.

5.3 Systèmes linéaires et matrices élémentaires

5.3.1 Matrices et systèmes linéaires

Le système linéaire

$$\begin{cases} a_{11}\, x_1 & + & a_{12}\, x_2 & + & \cdots & + & a_{1p}\, x_p & = & b_1 \\ a_{21}\, x_1 & + & a_{22}\, x_2 & + & \cdots & + & a_{2p}\, x_p & = & b_2 \\ & & & & \cdots & & & & \\ a_{n1}\, x_1 & + & a_{n2}\, x_2 & + & \cdots & + & a_{np}\, x_p & = & b_n \end{cases}$$

peut s'écrire sous forme matricielle :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{np} \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}}_{B}.$$

On appelle $A \in M_{n,p}(\mathbb{R})$ la matrice des coefficients du système. $B \in M_{n,1}(\mathbb{R})$ est le vecteur du second membre. Le vecteur $X \in M_{p,1}(\mathbb{R})$ est une solution du système si et seulement si

$$AX = B.$$

Nous savons que :

Théorème 100. *Un système d'équations linéaires n'a soit aucune solution, soit une seule solution, soit une infinité de solutions.*

5.3.1.1 Matrice augmentée

Étant donné un système d'équations linéaires sous forme matricielle $AX+B$, la matrice augmentée $(A|B)$ est la matrice des coefficients du système A, à laquelle on a juxtaposé le vecteur colonne des termes constants B, en les séparant par un trait vertical. Ainsi, pour le système d'équations

$$\begin{cases} 7x + 3y = 45 \\ 4x + 5y = 29 \end{cases}$$

la matrice augmentée est

$$(A|B) = \left(\begin{array}{cc|c} 7 & 3 & 45 \\ 4 & 5 & 29 \end{array}\right).$$

On peut alors résoudre le système en forme matricielle, en appliquant la méthode d'élimination gaussienne aux lignes de la matrice augmentée. On y gagne en clarté et on ne doit pas réécrire chaque fois les inconnues.

5.3.2 Matrices inversibles et systèmes linéaires

Considérons le cas où le nombre d'équations égale le nombre d'inconnues :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}}_{B}.$$

Alors $A \in M_n(\mathbb{R})$ est une matrice carrée et B un vecteur de $M_{n,1}(\mathbb{R})$. Pour tout second membre, nous pouvons utiliser les matrices pour trouver la solution du système linéaire.

Proposition 101. *Si la matrice A est inversible, alors la solution du système $AX = B$ est unique et est :* $\boxed{X = A^{-1}B}$

La preuve est juste de vérifier que si $X = A^{-1}B$, alors $AX = A\Big(A^{-1}B\Big) = \Big(AA^{-1}\Big)B = I \cdot B = B$. Réciproquement si $AX = B$, alors nécessairement $X = A^{-1}B$. Nous verrons bientôt que si la matrice n'est pas inversible, alors soit il n'y a pas de solution, soit une infinité.

5.3.3 Les matrices élémentaires

Pour calculer l'inverse d'une matrice A, et aussi pour résoudre des systèmes linéaires, nous avons utilisé trois opérations élémentaires sur les lignes qui sont :

1. $L_i \leftarrow \lambda L_i$ avec $\lambda \neq 0$: on peut multiplier une ligne par un réel non nul (ou un élément de $\mathbb{R} \setminus \{0\}$).
2. $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$ (et $j \neq i$) : on peut ajouter à la ligne L_i un multiple d'une autre ligne L_j.
3. $L_i \leftrightarrow L_j$: on peut échanger deux lignes.

Nous allons définir trois matrices élémentaires $E_{L_i \leftarrow \lambda L_i}$, $E_{L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j}$, $E_{L_i \leftrightarrow L_j}$ correspondant à ces opérations. Plus précisément, le produit $E \times A$ correspondra à l'opération élémentaire sur A. Voici les définitions accompagnées d'exemples.

1. La matrice $E_{L_i \leftarrow \lambda L_i}$ est la matrice obtenue en multipliant par λ la i-ème ligne de la matrice identité I_n, où λ est un nombre réel non nul.

$$E_{L_2 \leftarrow 5L_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. La matrice $E_{L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j}$ est la matrice obtenue en ajoutant λ fois la j-ème ligne de I_n à la i-ème ligne de I_n.

$$E_{L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. La matrice $E_{L_i \leftrightarrow L_j}$ est la matrice obtenue en permutant les i-ème et j-ème lignes de I_n.

$$E_{L_2 \leftrightarrow L_4} = E_{L_4 \leftrightarrow L_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Les opérations élémentaires sur les lignes sont réversibles, ce qui entraîne l'inversibilité des matrices élémentaires.

Le résultat de la multiplication d'un matrice élémentaire E par A est la matrice obtenue en effectuant l'opération élémentaire correspondante sur A. Ainsi :

1. La matrice $E_{L_i \leftarrow \lambda L_i} \times A$ est la matrice obtenue en multipliant par λ la i-ème ligne de A.
2. La matrice $E_{L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j} \times A$ est la matrice obtenue en ajoutant λ fois la j-ème ligne de A à la i-ème ligne de A.
3. La matrice $E_{L_i \leftrightarrow L_j} \times A$ est la matrice obtenue en permutant les i-ème et j-ème lignes de A.

Exemple 102. 1.

$$E_{L_2 \leftarrow \frac{1}{3} L_2} \times A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ \frac{1}{3}y_1 & \frac{1}{3}y_2 & \frac{1}{3}y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix}$$

2.

$$E_{L_1 \leftarrow L_1 - 7L_3} \times A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - 7z_1 & x_2 - 7z_2 & x_3 - 7z_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix}$$

3.

$$E_{L_2 \leftrightarrow L_3} \times A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix}$$

5.3.4 Équivalence à une matrice échelonnée

Définition 103. Deux matrices A et B sont dites *équivalentes par lignes* si l'une peut être obtenue à partir de l'autre par une suite d'opérations élémentaires sur les lignes. On note $A \sim B$.

Définition 104. Une matrice est *échelonnée* si :

- le nombre de zéros commençant une ligne croît strictement ligne par ligne jusqu'à ce qu'il ne reste plus que des zéros.

Elle est *échelonnée réduite* si en plus :

- le premier coefficient non nul d'une ligne (non nulle) vaut 1 ;
- et c'est le seul élément non nul de sa colonne.

Exemple d'une matrice échelonnée (à gauche) et échelonnée réduite (à droite) ; les $*$ désignent des coefficients quelconques, les $+$ des coefficients non nuls :

$$\begin{pmatrix} + & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & + & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & + & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & + \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & * & 0 & 0 & * & * & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & * & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & * & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Théorème 105. *Étant donnée une matrice $A \in M_{n,p}(\mathbb{R})$, il existe une unique matrice échelonnée réduite U obtenue à partir de A par des opérations élémentaires sur les lignes.*

Ce théorème permet donc de se ramener par des opérations élémentaires à des matrices dont la structure est beaucoup plus simple : les matrices échelonnées réduites.

Exemple 106. Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 4 & 6 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

A. Passage à une forme échelonnée.

Première itération de la boucle, étape A.1. Le choix du pivot est tout fait, on garde $a_{11}^1 = 1$.

Première itération de la boucle, étape A.2. On ne fait rien sur la ligne 2 qui contient déjà un zéro en bonne position et on remplace la ligne 3 par $L_3 \leftarrow L_3 + L_1$. On obtient

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & 4 & 4 \end{pmatrix}.$$

Deuxième itération de la boucle, étape A.1. Le choix du pivot est tout fait, on garde $a_{22}^2 = 2$.

Deuxième itération de la boucle, étape A.2. On remplace la ligne 3 avec l'opération $L_3 \leftarrow L_3 - L_2$. On obtient

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Cette matrice est échelonnée.

B. Passage à une forme échelonnée réduite.

Étape B.1, homothéties. On multiplie la ligne 2 par $\frac{1}{2}$ et la ligne 3 par $-\frac{1}{2}$ et l'on obtient

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Étape B.2, première itération. On ne touche plus à la ligne 3 et on remplace la ligne 2 par $L_2 \leftarrow L_2 - 3L_3$ et $L_1 \leftarrow L_1 - 4L_3$. On obtient

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Étape B.2, deuxième itération. On ne touche plus à la ligne 2 et on remplace la ligne 1 par $L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2$. On obtient

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

qui est bien échelonnée et réduite.

Définition 107. Le *rang* d'une matrice A, noté $\operatorname{rk} A$, est le nombre de pivots dans la matrice échelonnée réduite U équivalente par lignes à A.

Par exemple, la matrice de l'exemple 106 a rang 3 car elle est équivalente par lignes à la matrice échelonnée réduite

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & -1 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \end{pmatrix},$$

qui a 3 pivots. La matrice

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

a rang 2, car elle est échelonnée réduite et a deux pivots.

Proposition 108. *Le rang d'une matrice A est inférieur ou égal au plus petit entre le nombre de lignes et le nombre de colonnes de A. C'est-à-dire : si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, alors* $\operatorname{rk} A \leq \min\{n,p\}$.

5.3.5 Matrices élémentaires et inverse d'une matrice

Théorème 109. *Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. La matrice A est inversible si et seulement si sa forme échelonnée réduite est la matrice identité I_n.*

Remarque 110. Justifions maintenant notre méthode pour calculer A^{-1}.

Nous partons de $(A|I)$ pour arriver par des opérations élémentaires sur les lignes à $(I|B)$. Montrons que $B = A^{-1}$. Faire une opération élémentaire signifie multiplier à gauche par une des matrices élémentaires. Notons E le produit de ces matrices élémentaires. Dire que l'on arrive à la fin du processus à I signifie $EA = I$. Donc $A^{-1} = E$. Comme on fait les mêmes opérations sur la partie droite du tableau, alors on obtient $EI = B$. Donc $B = E$. Conséquence : $B = A^{-1}$.

Corollaire 111. *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) La matrice A est inversible.

(ii) Le système linéaire $AX = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ a une unique solution $X = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$.

(iii) Pour tout second membre B, le système linéaire $AX = B$ a une unique solution X.

5.3.6 Mini-exercices

1. Exprimer les systèmes linéaires suivants sous forme matricielle et les résoudre en inversant la matrice : $\begin{cases} 2x+4y=7 \\ -2x+3y=-14 \end{cases}$, $\begin{cases} x+z=1 \\ -2y+3z=1 \\ x+z=1 \end{cases}$, $\begin{cases} x+t=\alpha \\ x-2y=\beta \\ x+y+t=2 \\ y+t=4 \end{cases}$.

2. Écrire les matrices 4×4 correspondant aux opérations élémentaires : $L_2 \leftarrow \frac{1}{3}L_2$, $L_3 \leftarrow L_3 - \frac{1}{4}L_2$, $L_1 \leftrightarrow L_4$. Sans calculs, écrire leurs inverses. Écrire la matrice 4×4 de l'opération $L_1 \leftarrow L_1 - 2L_3 + 3L_4$.
3. Écrire les matrices suivantes sous forme échelonnée, puis échelonnée réduite : $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 0 \\ -2 & -2 & -3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$.

5.4 Application : Modèle input-output de Leontieff

5.4.1 Données

Considérons une économie pendant une période de référence fixée (un an, par exemple) et supposons que cette économie se partage en n *secteurs* $S_1, S_2, \ldots, S_n$, chacun de ceux-ci produisant un seul type de bien. La production de chacun de ces secteurs fait l'objet d'une double utilisation : il s'agit d'une part de satisfaire une demande finale (extérieure aux secteurs de production) et d'autre part d'alimenter les secteurs de production pour leur propre activité.

Dénotons par c_{ij} la quantité consommée, par le secteur S_j, de la production de S_i ; dénotons également par x_i et b_i la production totale de S_i et la demande finale du bien produit par S_i. Les nombres c_{ij} forment une matrice carrée C, de taille n, appelée *matrice input-output* : c_{ij} représente, du point de vue des échanges intersectoriels, l'*input* du secteur S_j et l'*output* du secteur S_i.

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \ldots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \ldots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \ldots & c_{nn} \end{pmatrix}$$

De la même manière, les quantités x_i et b_i permettent de construire les vecteurs X et B :

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Proposition 112. *La quantité finale disponible b_i du bien produit par S_i est égale à la production totale de ce bien, diminuée des consommations intersectorielles du bien en question :*

$$b_i = x_i - (c_{i1} + \cdots + c_{in}).$$

Dans le même ordre d'idées, on peut être amené à considérer la production totale du secteur S_j, diminuée des diverses consommations de S_j (pour autant que la même unité soit utilisée pour les diverses productions, par exemple l'unité monétaire servant à mesurer la valeur de ces productions). Il s'agit là de la *valeur ajoutée* du secteur S_j :

$$v_j = x_j - (c_{1j} + \cdots + c_{n_j}).$$

Exemple 113. Considérons une économie à trois secteurs : l'agriculture, l'industrie et les services, pour laquelle les consommations intersectorielles sont données par

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 3 & 6 & 1 \\ 1 & 2 & 1. \end{pmatrix}$$

Si les productions des trois secteurs sont respectivement 12, 18 et 9, les quantités finales disponibles et les valeurs ajoutées se trouvent aisément grâce au tableau suivant :

	agr.	ind.	serv.	x	b
agr.	2	4	3	12	3
ind.	3	6	1	18	8
serv.	1	2	1	9	5
x	12	18	9		
v	6	6	4		

Ainsi, la valeur ajoutée du secteur des services vaut 4, tandis qu'il est possible de satisfaire à une demande de 8 en produits industriels.

5.4.2 La modélisation

Il est clair que, d'une année à l'autre, les variations de production vont modifier profondément la matrice input-output. Il serait donc intéressant d'introduire une notion similaire, mais indépendante de la production. C'est ainsi que nous considérons le *coefficient technique* de production a_{ij}, égal à quantité du bien produit par S_i que le secteur S_j consomme pour produire une unité, donc

$$a_{ij} = c_{ij}/x_j.$$

Cela définit la *matrice des coefficients techniques*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Exemple 114. Pour l'exemple 113, on a par exemple

$$a_{12} = \frac{c_{12}}{x_2} = \frac{4}{18} = 0{,}222$$

et, d'une manière générale,

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}167 & 0{,}222 & 0{,}333 \\ 0{,}250 & 0{,}333 & 0{,}111 \\ 0{,}083 & 0{,}111 & 0{,}111 \end{pmatrix} \tag{5.1}$$

Proposition 115. *Le vecteur de production se décompose en une somme de deux termes, un relatif à la consommation finale et un relatif aux consommations intersectorielles :*

$$X = B + AX.$$

Démonstration. En effet, de $c_{ij} = a_{ij}x_j$ on déduit

$$x_i = b_i + (a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n) = b_i + (AX)_i,$$

qui, mis en forme matricielle, donne la relation annoncée. □

5.4.3 Problème de planification

Au lieu de définir comme précédemment la consommation finale disponible à partir des niveaux de production, envisageons à présent le problème inverse : étant donnée une demande finale B à satisfaire, quelle production X les différents secteurs doivent-ils assurer ? Il s'agit donc de résoudre par rapport à X l'équation

$$X = B + AX.$$

Proposition 116. *Le vecteur X des productions nécessaires à satisfaire aux demandes finales B est donné par*

$$\boxed{X = (I_n - A)^{-1}B}.$$

Démonstration. En effet, on a $X - AX = B$ si et seulement si $(I_n - A)X = B$, qui équivaut à la formule donnée. □

Exemple 117. Avec l'exemple 113, évaluons les productions nécessaires à satisfaire aux demandes finales de 5,9,et 8 dans les trois secteurs. On a

$$I_n - A = \begin{pmatrix} 0{,}833 & -0{,}222 & -0{,}333 \\ -0{,}250 & 0{,}667 & -0{,}111 \\ -0{,}083 & -0{,}111 & 0{,}889 \end{pmatrix}$$

$$(I_n - A)^{-1} = \begin{pmatrix} 1{,}435 & 0{,}580 & 0{,}611 \\ 0{,}573 & 1{,}763 & 0{,}435 \\ 0{,}206 & 0{,}275 & 1{,}237 \end{pmatrix}$$

$$X = (I_n - A)^{-1} \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17{,}282 \\ 22{,}214 \\ 13{,}397 \end{pmatrix}$$

5.4.3.1 Remarques

A. Il est possible de donner une interprétation concrète des éléments de la matrice $(I_n - A)^{-1}$. En effet, si on remplace le vecteur B par le $k-$ième vecteur unitaire $e_k = (0, \ldots, \underbrace{1}_{k}, \ldots, 0)$ (demande finale de 1 pour la k-ième production, 0 pour toutes les autres), on a $X = (I_n - A)^{-1} e_k$, mais le second membre n'est autre que la k-ième colonne de $(I_n - A)^{-1}$. Par conséquent, les diverses colonnes de $(I_n - A)^{-1}$ donnent les vecteurs productions nécessaires pour satisfaire à une demande d'une unité pour les divers biens.

B. De la relation

$$X = B + AX,$$

on déduit, en remplaçant successivement X par $B + AX$,

$$\begin{aligned} X &= B + A(B + AX) \\ &= B + AB + A^2X \\ &= B + AB + A^2(B + AX) \\ &= B + AB + A^2B + A^3X \\ \ldots \\ &= (B + AB + A^2B + \cdots + A^mB) + A^{m+1}X. \end{aligned} \tag{5.2}$$

La matrice A^{m+1} tend vers 0 lorsque m tend vers $+\infty$. En effet,

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = \frac{1}{x_n} \sum_{i=1}^{n} c_{ij} < 1 \quad \forall j,$$

car un secteur doit produire plus qu'il ne consomme. Avec cela, on peut montrer que $\lim_{n\to+\infty} A^m = 0$. On a par conséquent

$$X = \lim_{m\to+\infty}(B + AB + A^2B + \cdots + A^mB)$$

et on peut dire que *si les secteurs consomment moins qu'ils ne produisent, la production X nécessaire à satisfaire la demande finale est donnée par*

$$\boxed{X = (I_n + A + A^2 + A^3 + \cdots)B = \sum_{m=1}^{+\infty} A^m}.$$

Cette formule a une interprétation intéressante : pour satisfaire aux demandes données par le vecteur B, les secteurs doivent d'abord produire B, puis pour alimenter les secteurs pour cette productions, ils doivent produire AB, puis à nouveau A^2B pour alimenter les secteur pour la production AB et ainsi de suite.

C. Nous avons obtenu d'un côté que X s'exprime en fonction de B comme

$$X = (I_n - A)^{-1}B;$$

de l'autre côté, le même X dépend de B à travers la relation

$$X = (I_n + A + A^2 + A^3 + \cdots)B.$$

On en déduit

$$(I_n + A + A^2 + A^3 + \cdots)B = (I_n - A)^{-1}B,$$

d'où

$$I_n + A + A^2 + A^3 + \cdots = (I_n - A)^{-1}.$$

On reconnaît là une généralisation matricielle de la formule bien connue pour la somme de la série géométrique

$$1 + a + a^2 + a^3 + \cdots = \frac{1}{1-a} \text{à condition que } |a| < 1.$$

Troisième partie

Programmation linéaire et applications

Leçon 6

Programmation linéaire : approche graphique

6.1 Rappels sur les équations de droites

Théorème 118. *Dans le plan muni d'un repère, toute droite $\mathcal{D}$ a une équation de la forme :*

1. *$y = mx + p$, lorsque $\mathcal{D}$ est non parallèle à l'axe des ordonnées.*
2. *$x = k$, lorsque $\mathcal{D}$ est parallèle à l'axe des ordonnées.*

Conclusion : On peut résumer les deux cas, en énonçant que toute droite $\mathcal{D}$ du plan a une équation du type $ax + by + c = 0$, où a et b ne sont pas simultanément nuls. Si $b = 0$, $\mathcal{D}$ est parallèle à l'axe des ordonnées et a pour équation réduite $x = \frac{-c}{a} = k$, si $b \neq 0$, $\mathcal{D}$ n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées et a une équation réduite de la forme $y = \frac{-a}{b}x - \frac{c}{a} = mx + p$

Définition 119. On appelle équation cartésienne d'une droite $\mathcal{D}$, toute équation de la forme $ax + by + c = 0$

En pratique, une droite est entièrement déterminée dès lors que l'on connaît deux points :

Ainsi : soit (D) la droite passant par $A(x_A,y_A)$ et $B(x_B,y_B)$: si $x_A \neq x_B$, $\mathcal{D}$ n'est pas parallèle à l'axe (Oy) et a donc une équation de la forme $y = mx+p$ où $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$ et p est entièrement déterminé en utilisant l'un des deux points. Il existe également une formule, dès lors que l'on connaît le coefficient directeur m :

$$\mathcal{D} \, : \, y = m(x - x_A) + y_A$$

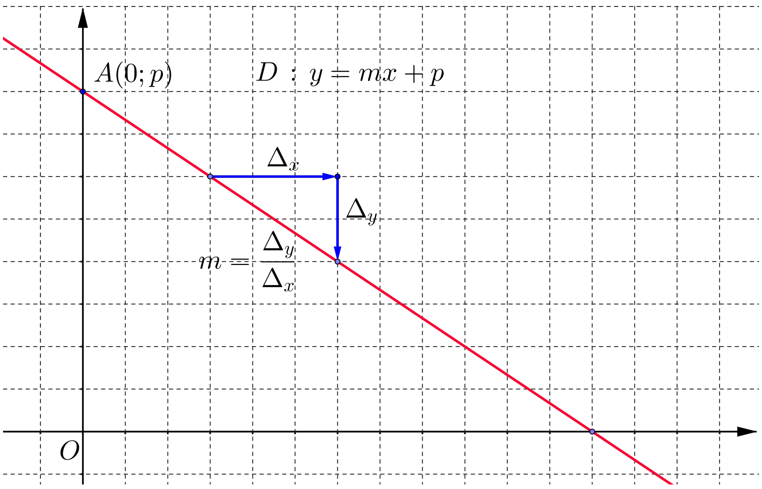


FIGURE 6.1 – Equation réduite d'une droite

Exemple 120. Déterminer l'équation réduite de la droite (AB) où $A(-1;1)$ et $B(1;5)$

Réponse : le coeff. directeur de (AB) est $m=\frac{5-1}{1-(-1)}=2$

et p vérifie $1=(-1)\times 2+p \Longrightarrow p=3$ et (D) à pour équation $y=2x+3$

Remarques : 1. On considère une droite $\mathcal{D}$ d'équation réduite $y=mx+p$

1. $\mathcal{D}$ passe par le point O origine du repère si et seulement $p=0$

2. Si $m=0$, $\mathcal{D}$ est parallèle à l'axe des abscisses.

3. Si $m>0$, $\mathcal{D}$ est « ascendante », et si $m<0$, $\mathcal{D}$ est « descendante »

2. Parfois il vaut mieux garder une équation cartésienne comme $3x+7y-4=0$, plutôt que de chercher à la mettre sous forme d'équation réduire qui serait ici : $y=\frac{-3}{7}x+\frac{4}{7}$

Exemple 121. Complétez le tableau suivant en donnant l'expression des droites

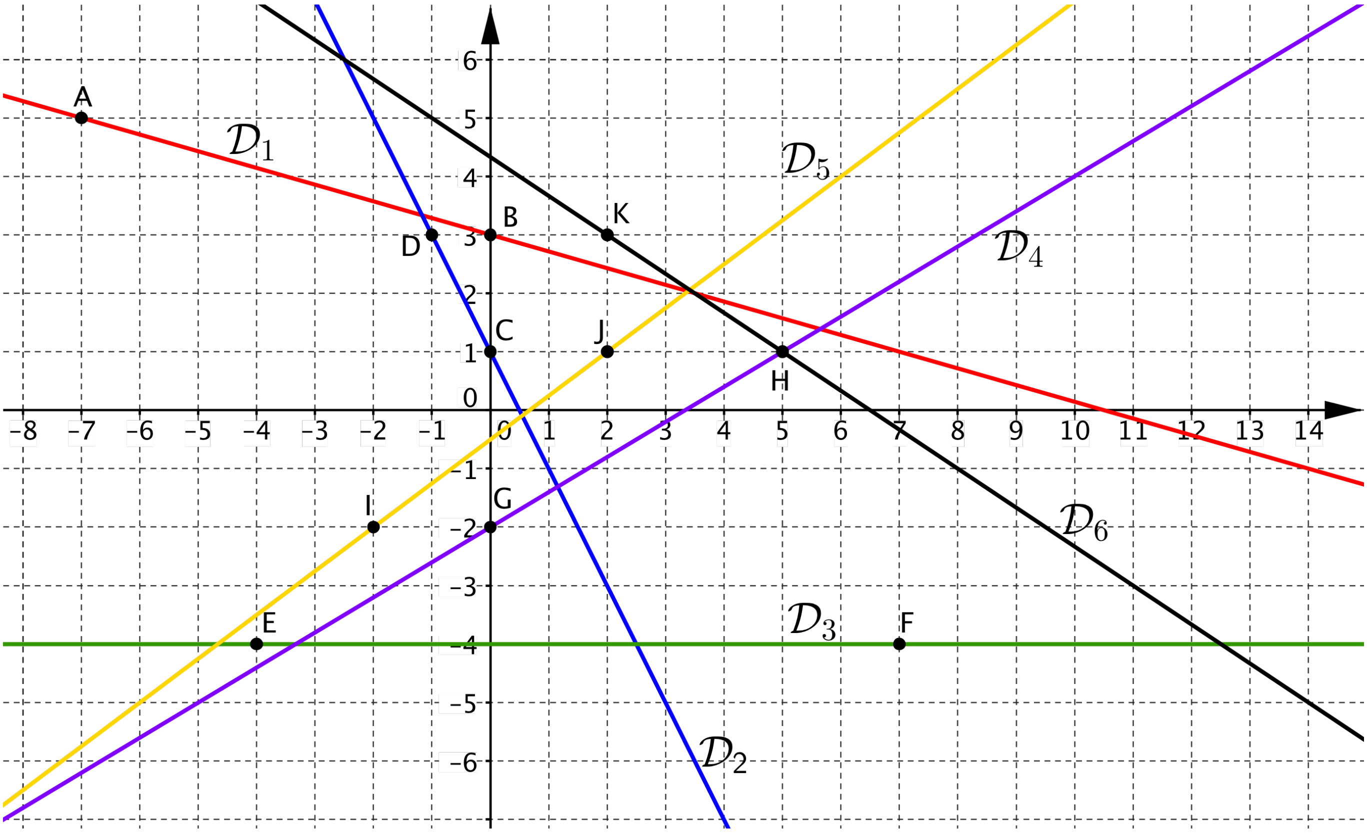
	$A(x_A; y_A)$	$B(x_B; y_B)$	(D)
1	$A(0; 3)$	$B(2; 7)$	
2	$A(10; 50)$	$B(-9; -45)$	
3	$A(1; 7)$	$B(5; 9)$	
4	$A(1; -10)$	$B(-2; 8)$	
5	$A(2; 0)$	$B(-5; 21)$	
6	$A(3; -1)$	$B(8; 1)$	
7	$A(0{,}01; 5000)$	$B(0{,}02; 4000)$	
8	$A(20; 27)$	$B(26; 39)$	

Pour tracer une droite correctement, on cherche toujours deux points **à coordonnées entières** afin de les placer sur le repère.

Exemple 122. Donnez deux points **à coordonnées entières** de chacune des droites suivantes = :

	Fonction	$M_1(\ ;\ )$	$M_2(\ ;\ )$
1	$y = -3x + 4$		
2	$y = -5$		
3	$y = -0{,}01x + 2{,}8$		
4	$y = \frac{3}{4}x - 1$		
5	$y = \frac{-2}{3}x + \frac{2}{3}$		

Exemple 123. Déterminer les équations réduites des droites suivantes :



6.2 Régionnement du plan

Proposition 124. *Toute droite $\mathcal{D}$ d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$ partage le plan en trois sous-ensembles :*

- $\mathcal{D} = \{M(x; y) \in \mathbb{R}^2 / ax + by + c = 0\}$
- $\Delta_+ = \{M(x; y) \in \mathbb{R}^2 / ax + by + c \geq 0\}$
- $\Delta_- = \{M(x; y) \in \mathbb{R}^2 / ax + by + c \leq 0\}$

Δ_+ *et* Δ_- *sont les demi-plans fermés de frontière* $\mathcal{D}$.

Pour déterminer l'ensemble-solution d'une inéquation linéaire à deux inconnues du type $ax+by+c \geq 0$ ou $ax+by+c \leq 0$, on commence par tracer la droite-frontière, puis à l'aide d'un point, on détermine par substitution de quel côté de la frontière sont les couples qui satisfont à l'inéquation. Lorsque l'inéquation ne comporte qu'une inégalité stricte $<$ ou $>$ la frontière ne fait pas partie de l'ensemble-solution de l'inéquation.

Exemple 125. Représenter l'ensemble solution de l'inéquation $x + 2y \leq 5$.

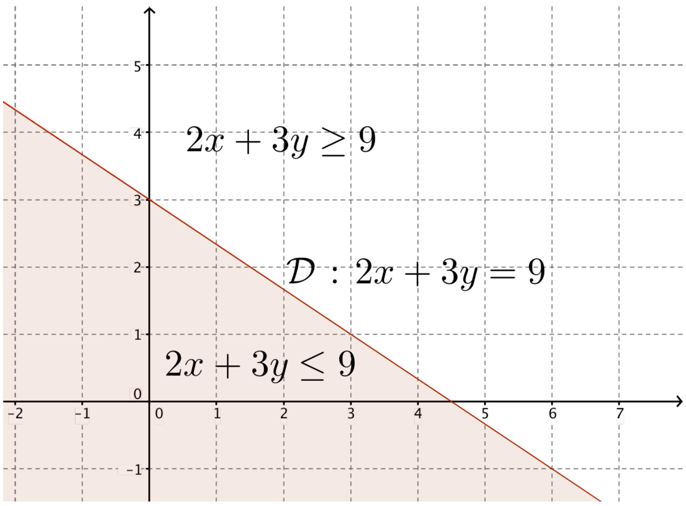


FIGURE 6.2 – Régionnement du plan

Définition 126. On appelle système de m inéquations linéaires à n inconnues un système de la forme :

$$\left\{\begin{array}{ccccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & a_{13}x_3 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & \leq & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & a_{23}x_3 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & \leq & b_2 \\ a_{31}x_1 & + & a_{32}x_2 & + & a_{33}x_3 & + & \cdots & + & a_{3n}x_n & \leq & b_3 \\ \vdots & & & & & & \vdots & & & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & a_{m3}x_3 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & \leq & b_m \end{array}\right.$$

où x_j est une variable dans la colonne j, a_{ij} est le coefficient de la variable x_j sur la ligne i, b_i est la constante de la ligne i, n est le nombre d'inconnues et m est le nombre d'inéquations.

Définition 127. Un $n-$uplet $(k_1; k_2; k_3; ...; k_n)$ est une solution d'un système de m inéquations à n inconnues s'il est solution de chacune des inéquations du système, L'ensemble-solution d'un système d'inéquations linéaires est l'intersection des ensembles-solutions de chacune des inéquations du système.

Exemple 128. Représenter graphiquement l'ensemble solution du système d'inéquations linéaires suivant :

$$\left\{\begin{array}{lll} x_1 & & \geq 0 \\ & x_2 & \geq 1 \\ x_1 & +x_2 & \leq 9 \\ 2x_1 & +3x_2 & \leq 24 \\ 3x_1 & +2x_2 & \leq 24 \end{array}\right.$$

On prendra comme convention de hachurer (ou colorier) le demi-plan **EXCLU** . ON donnera les coordonnées des sommets du polygone solution.

Réponse :

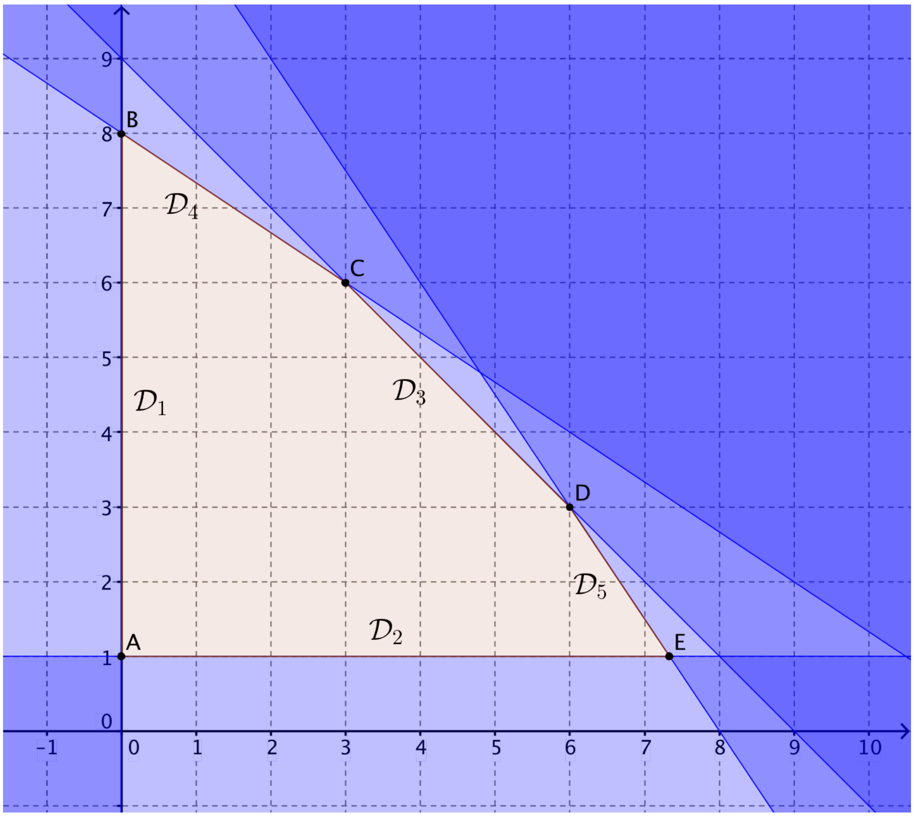


Figure 6.3 – Exemple

Exemple 129. Représenter graphiquement l'ensemble solution des systèmes d'inéquations linéaires suivants, puis déterminer les coordonnées des sommets des polygones.

1. $\begin{cases} x_1 & & \geq 0 \\ & x_2 & \geq 0 \\ x_1 & +x_2 & \leq 12 \\ 2x_1 & +x_2 & \leq 22 \\ x_1 & +2x_2 & \leq 20 \end{cases}$

2. $\begin{cases} x_1 & & \geq 0 \\ & x_2 & \geq 0 \\ x_1 & +4x_2 & \leq 24 \\ 3x_1 & +x_2 & \leq 21 \\ x_1 & +x_2 & \leq 9 \end{cases}$

3. $\begin{cases} x_1 & & \geq -1 \\ & x_2 & \geq -2 \\ 2x_1 & +x_2 & \leq 6 \\ x_1 & +x_2 & \geq 0 \end{cases}$

6.3 Un premier exemple : maximisation

Ce premier exemple sera résolu graphiquement, mais cette méthode n'est applicable que lorsqu'il n'y a que deux variables.

Exemple 130. Un fabricant produit des tables et des bureaux. Chaque table nécessite 2,5 heures pour l'assemblage (A), 3 heures pour le polissage (P) et 1 heure pour la mise en caisse (C). Chaque bureau exige 1 heure pour l'assemblage, 3 heures pour le polissage et 2 heures pour la mise en caisse. L'entreprise ne peut disposer, chaque semaine, de plus de 20 heures pour l'assemblage, de 30 heures pour le polissage, et de 16 heures pour la mise en caisse. Sa marge de profit est de 3 euros par table et de 4 euros par bureau.

Quelle est la combinaison des produits qui maximisera les profits hebdomadaires de l'entreprise ? Pour la déterminer, on recourt ci-dessous à la méthode graphique. Elle se décompose en quatre étapes simples.

1. Formalisation On exprime les données sous forme d'équations ou d'inégalités. Soient x_1 le nombre de tables et x_2 le nombre de bureaux produits. On appelle x_1 et x_2 les *variables de décision* ou *variables structurelles*. La fonction à optimiser, ou *fonction objectif*, est le profit
$$\Pi = 3x_1 + 4x_2$$
avec les contraintes :
   - Contrainte sur A : $2{,}5x_1 + x_2 \leq 20$
   - Contrainte sur P : $3x_1 + 3x_2 \leq 30$
   - Contrainte sur C : $x_1 + 2x_2 \leq 16$
   - Contraintes de non-négativité : $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$.

   Les trois premières inégalités sont des *contraintes techniques* déterminées par l'état de la technologie et la disponibilité des facteurs de production ; la quatrième est une contrainte de *non-négativité*, qui est imposée dans tous les problèmes car on ne peut accepter des productions aux quantités négatives. L'entreprise doit donc résoudre le problème L'ébénisterie doit donc résoudre le problème :
$$\left\{\begin{array}{rr} \text{maximiser} & 3x_1 + 4x_2 = \Pi \\ \text{sous les contraintes} & 2{,}5x_1 + x_2 \leq 20 \\ & 3x_1 + 3x_2 \leq 30 \\ & x_1 + 2x_2 \leq 16 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{array}\right.$$

2. Région accessible Les inégalités du problème déterminent une région du plan, dite *région accessible* ou *acceptable*, dénotée FR (en anglais, *feasible region*), qui est la région de toutes les productions *possibles*, c-a-d qui respectent toutes les contraintes. Pour dessiner cette

région, on trace les trois droites

$$\begin{array}{rc} \text{Pour A :} & x_2 = -2{,}5x_1 + 20 \\ \text{Pour B :} & x_2 = -x_1 + 10 \\ \text{Pour C :} & x_2 = -0{,}5x_1 + 8 \end{array}$$

plus les deux axes Ox_1 et Ox_2.

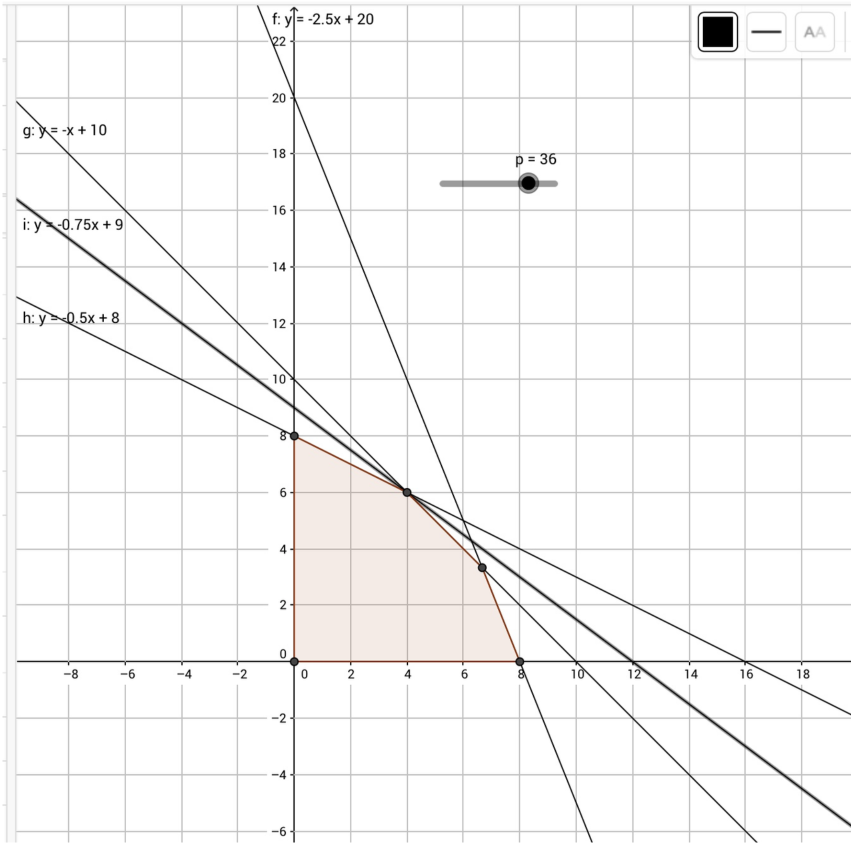
3. Maintenant que toutes les solutions acceptables au problème ont été dessinées, il s'agit de trouver la solution optimale, c-a-d celle qui maximise la fonction objectif. On trace pour cela les « lignes de niveaux »de la fonction objectif : ici il s'agit de toutes les *droites d'isoprofit* d'équations $3x_1 + 4x_2 = \Pi$, au varier de Π : puisque

$$x_2 = -\frac{3}{4}x_1 + \frac{\Pi}{4},$$

ces droites sont toutes parallèles et de pente $-\frac{3}{4}$. En traçant une série de droites d'isoprofit telles que les profits soient de plus en plus grands, on trouve que la droite d'isoprofit correspondant au profit maximal possible touche la région accessible au point de coordonnées $\tilde{x_1} = 4$ et $\tilde{x_2} = 6$, qui est à l'intersection des deux droites

$$\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 = 30 \\ x_1 + 2x_2 = 16 \end{cases}$$

4. Conclusion : la production qui assure le plus grand profit possible est de 4 tables et 6 chaises. En calculant le profit correspondant, on trouve $\tilde{\Pi} = 3 \times 4 + 4 \times 6 = 36$ euros.



Remarque 131. On peut déjà remarquer deux faits, qui sont vrais en général :

- la solution optimale ne se trouve pas à l'intérieur de la région accessible, mais à l'intersection de deux contraintes, en un point qualifié de *point extrême*. Dans cet exemple, il y a dix points extrêmes : (0,20), (0,10), (6,5), (10,0), (0,8), (4,6), (20/3,10/3), (8,0) et (0,0). Le dernier, qui est l'origine, est l'intersection des contraintes de non-négativité. Tous ces points sont qualifiés de *solutions de base*, mais seuls les cinq derniers sont des solutions acceptables, les autres ne tombant pas dans la région accessible. Généralement (mais pas toujours) une seule des solutions de base accessibles sera optimale. Ainsi, si on essaye la solution (20/3,10/3), correspondant à l'intersection des contraintes A et P, on trouve $\Pi = 3 \times \frac{20}{3} + 4 \times \frac{10}{3} \approx 33{,}33$, qui est moins que la valeur optimale $\tilde{\Pi} = 36$ trouvée plus haut.
- Parmi les solutions de bases accessibles, la solution trouvée correspond au point extrême situé le plus loin de l'origine. Ceci est vrai pour tous les problèmes de maximisation, car si $ax_1 + bx_2 = \Pi$ est une droite

d'isoprofit, alors sa distance de l'origine est

$$\frac{\Pi}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

donc si a et b sont constants, cette distance est d'autant plus grande que Π est plus grand.

6.3.1 Un autre exemple de maximisation

Exemple 132. Une ébénisterie fabrique deux modèles de bureaux : B_1 et B_2. Les temps de découpe, assemblage et finition nécessaires pour chaque modèle sont indiqués (en heures) dans le tableau suivant, ainsi que le nombre d'heures disponibles quotidiennement dans chaque atelier.

	B_1	B_2	heures atelier
Découpe	1	2	20
Assemblage	2	1	22
Finition	1	1	12

Un tel tableau se lit de la manière suivante : « Fabriquer un bureau du modèle B_1 nécessite une heure dans l'atelier de découpe, deux heures dans l'atelier d'assemblage et une heure dans l'atelier de finition ».

L'entreprise vendra 300 € chaque bureau du modèle B_1 et 200 € chaque bureau du modèle B_2. Déterminer le chiffre d'affaire maximum que peut réaliser l'ébénisterie quotidiennement.

1. On traduit chaque contrainte :
   Contrainte de l'atelier de découpe : $x_1 + 2x_2 \leq 20$
   Contrainte de l'atelier d'assemblage : $2x_1 + x_2 \leq 22$
   Contrainte de l'atelier de finition : $x_1 + x_2 \leq 12$
   À cela s'ajoutent des contraintes de non-négativité puisque le nombre de bureaux ne peut être négatif, on a donc : $x_1 \geq 0$ et $x_2 \geq 0$
   Le C.A. z réalisé par l'ébénisterie est alors : $z = 300x_1 + 200x_2$
   L'ébénisterie doit donc résoudre le problème :

$$\begin{cases} \text{maximiser} & 300x_1 + 200x_2 = z \\ \text{sous les contraintes} & x_1 + 2x_2 \leq 20 \\ & 2x_1 + x_2 \leq 22 \\ & x + y \leq 12 \\ & x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$$

2. On construit le polygone des contraintes : on trace les 5 droites des contraintes : soit $\mathcal{D}_1$ la droite d'équation $x + 2y = 20$, $\mathcal{D}_1$ passe par $(0; 10)$ et $(20; 0)$. Soit $\mathcal{D}_2$ la droite d'équation $2x + y = 22$, $\mathcal{D}_2$ passe par $(0; 22)$ et $(11; 0)$. Soit D_3 la droite d'équation $x + y = 12$, $\mathcal{D}_3$ passe par $(0; 12)$ et $(12; 0)$. Ne pas oublier l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées.

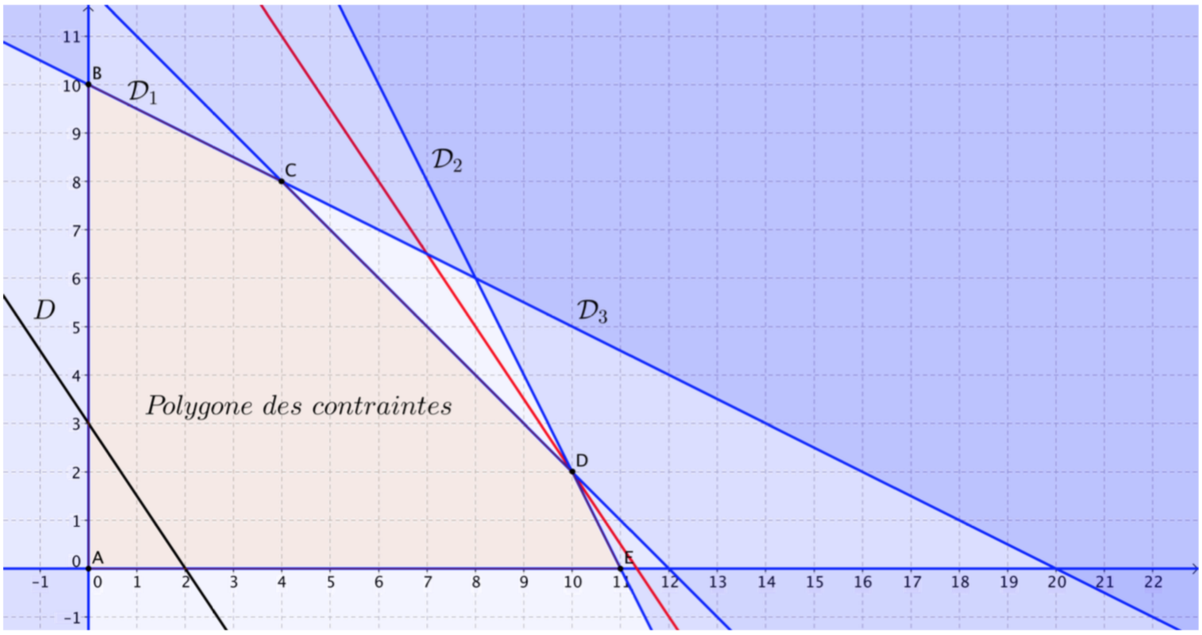


FIGURE 6.4 – Exemple

3. On trace les « lignes de niveaux » du chiffre d'affaire z : ce sont les droites d'équations $300x+200y = z$: toutes ces droites sont parallèles : on en trace une sur la figure et on utilise une règle pour simuler les autres.

   Sur la figure, on a tracé la droite D d'équation $300x + 200y = 600$ ou $3x + 2y = 6$.

4. On cherche parmi toutes les parallèles à D celle qui à la fois à une intersection non vide avec la zone des contraintes et dont l'ordonnée à l'origine est la plus grande : ici cette droite passe par le point $D(10; 2)$ qui correspond à un sommet du polygone de la zone des contraintes.

5. En conclusion, le C.A. sera maximal dès lors que l'ébénisterie produira 10 bureaux du modèle B_1 et 2 bureaux du modèle B_2 : dans ce cas elle

utilise la capacité maximale d'heures dans les ateliers d'assemblage et de finition. Enfin son CA sera de $10 \times 300 + 2 \times 200 = 3\,400$ €.

On appelle Programme Linéaire le problème mathématique qui consiste à optimiser (maximiser ou minimiser) une fonction linéaire de plusieurs variables qui sont reliées par des relations linéaires appelées contraintes.

Remarque 133. Il ne faut se tromper sur les mots : ici « programme » ne signifie pas un programme informatique, mais un « programme de production », c-a-d simplement toute production (x_1,x_2). Ainsi, les points de la région accessible donnent les *programmes réalisables.*

6.4 Un exemple de minimisation

Exemple 134. Un éleveur souhaite que son troupeau consomme la plus faible ration quotidienne de trois éléments nutritifs A, B et C. Il faut bien sûr satisfaire les exigences nutritives quotidiennes, qui sont de 14 unités de A, 12 unités de B et 18 unités de C. L'éleveur peut choisir entre deux produits alimentaires : une unité du produit 1, qui coûte 2 euros, contient deux unités de A, une unité de B et une unité de C ; une unité du produit 2, qui coûte 4 euros, contient une unités de A, une unité de B et trois unités de C. Quelle est la combinaison la moins coûteuse de ces deux produits, qui respecte l'exigence de consommation minimale d'éléments nutritifs ?

Réponse :

1. La fonction objectif à minimiser est

$$c = 2x_1 + 4x_2$$

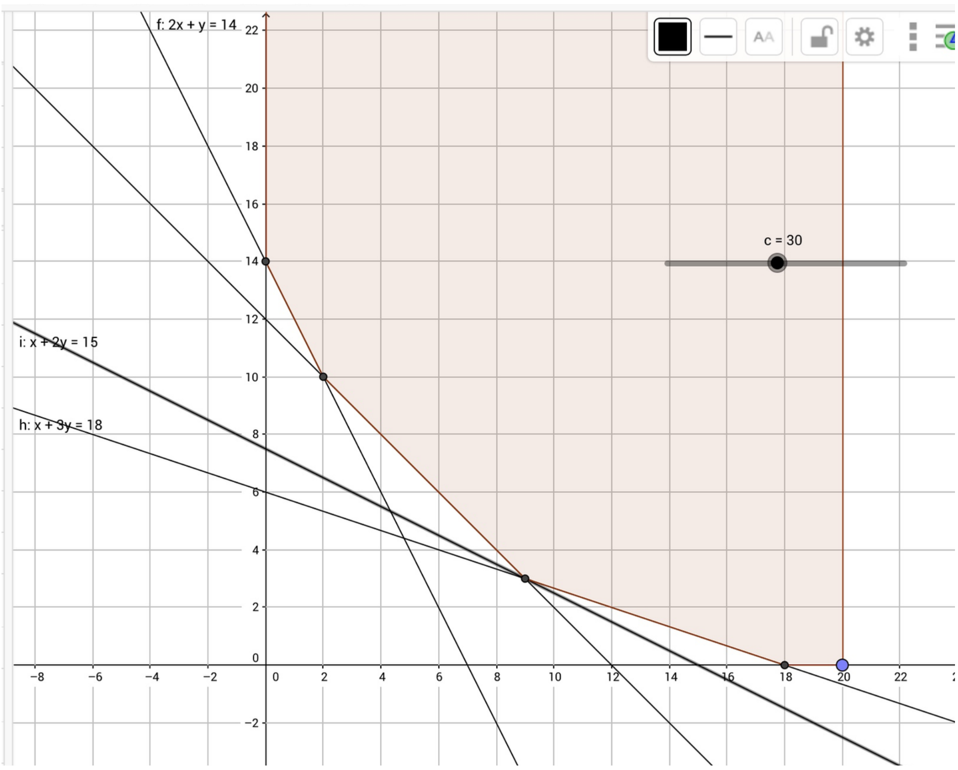
   avec les contraintes :
   - Contrainte sur A : $2x_1 + x_2 \geq 14$
   - Contrainte sur P : $x_1 + x_2 \geq 12$
   - Contrainte sur C : $x_1 + 3x_2 \geq 18$
   - Contraintes de non-négativité : $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$.

   Les contraintes techniques s'écrivent $\geq$ parce qu'il faut respecter les exigences de consommation minimales, mais que celles-ci peuvent être dépassées.

2. Traitons les inégalités comme des équations, exprimons dans chacune x_2 en fonction de x_1 et traçons-les sur un graphique. Sur le graphique„ aux inégalités « supérieur ou égal à » correspondront tous les points situés sur la droite et à droite de celle-ci. La surface ombrée est la région

accessible, qui comprend tous les points respectant les trois contraintes minimales ainsi que la contrainte de non-négativité.

3. Pour trouver la solution optimale, traçons la fonction objectif sous la forme d'une série de droites d'isocoût. Nous avons
$$x_2 = -\frac{1}{2}x_1 + \frac{c}{4}$$
La droite d'isocoût la plus basse qui touche la région accessible est tangente à celle-ci au point $\tilde{x_1} = 9$ et $\tilde{x_2} = 3$.
4. ALors le minimum du coût est $\tilde{c} = 2 \times 9 + 4 \times 3 = 30$. Tous les autres programmes réalisables ont un coût strictement supérieur.



Remarque 135.
- Dans les cas de minimisation, la solution trouvée correspond au point extrême situé le plus près de l'origine. Ceci est vrai pour tous les problèmes de minimisation.
- Le point (0,0) continue d'être un point extrême dans un problème de minimisation, mais en général il n'est pas un point accessible. Cela nous posera un problème plus tard, lorsqu'il sera question de la méthode du simplexe.

Exemple 136. Dans un gymnase, un groupe d'élèves se charge de la distribution de pains au chocolat et de croissants lors de la pause de 10 heures. Pour pouvoir satisfaire la demande, ils doivent disposer au minimum de 108 pains au chocolat et de 96 croissants. Deux boulangers proposent pour le même prix :

- l'un le lot A comprenant 12 pains au chocolat et 8 croissants,
- l'autre le lot B composé de 9 pains au chocolat et 12 croissants.

Déterminer le nombre de lots A et le nombre de lots B qui doivent être achetés pour satisfaire la demande au moindre coût.

Réponse :

On note x_1 le nombre de lots A achetés et x_2 le nombre de lots B achetés.

$$\left\{\begin{array}{rc} \text{minimiser} & x_1 + x_2 = c \\ \text{sous les contraintes} & 12x_1 + 9x_2 \geq 108 \\ & 8x_1 + 12x_2 \leq 96 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rc} \text{minimiser} & x_1 + x_2 = z \\ \text{sous les contraintes} & 4x_1 + 3x_2 \geq 36 \\ & 2x_1 + 3x_2 \leq 24 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{array}\right.$$

Graphique

Le choix qui minimise la dépense est 6 lots A et 4 lots B : dans ce cas il y aura exactement le nombre de pains au chocolats et de croissants nécessaires.

6.5 sensibilité à la variation des données, desserrement des contraintes

Exemple 137. Un constructeur automobile propose deux modèles sur le marché français : un modèle A moyen de gamme et un modèle B début de gamme.

Le modèle A est vendu 16 000 € et le modèle B 10 000 €. On suppose que le marché est tel que toute voiture construite est vendue.

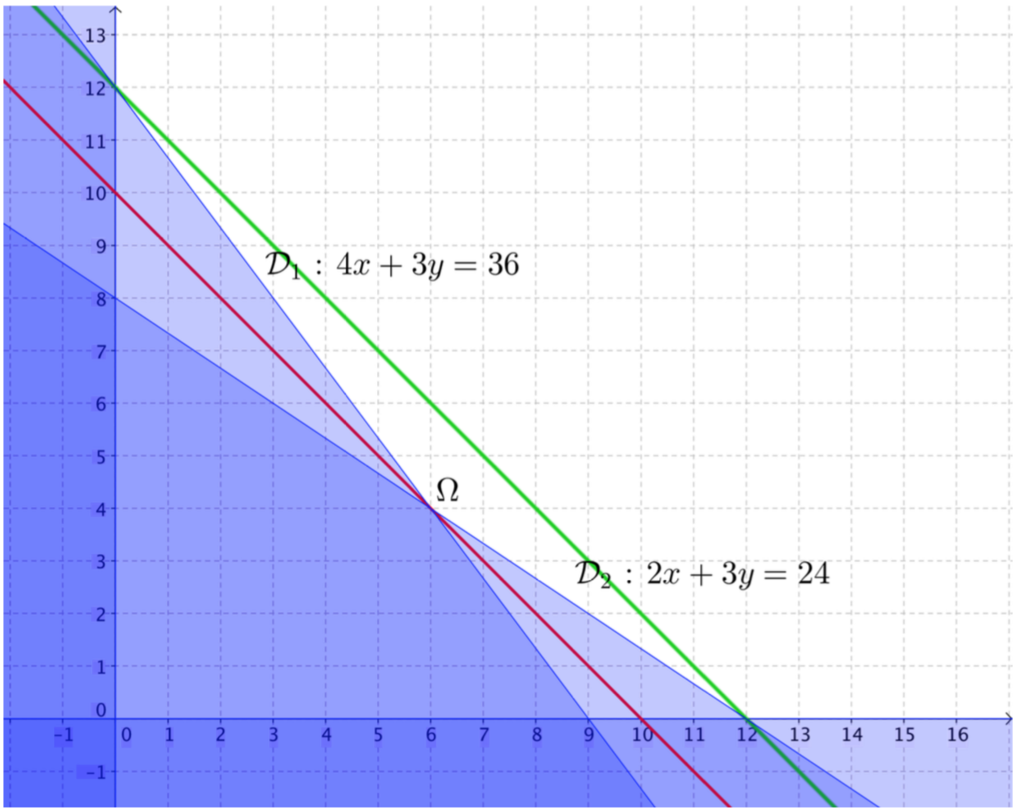
Cependant la construction de chacun de ces modèles nécessite (entre autres) de l'acier et des heures de travail dont les quantités sont limités.

La fabrication d'une voiture du modèle A nécessite 1 unité de travail et 2 unités d'acier. (on n'a pas besoin de connaître l'expression exacte de chacune de ces unités)

La fabrication d'une voiture du modèle B nécessite 1 unité de travail et 1 unité d'acier.

Les quantités disponibles pour l'entreprise sont de 400 unités de travail et 600 unités d'acier.

On se demande donc combien le constructeur doit-il produire de voitures des modèles A et B, connaissant ces contraintes de production, afin de maximiser son chiffre d'affaire.



Notons x_1 le nombre de voitures du modèle A, x_2 le nombre de voitures du modèle B, et z le chiffre d'affaire obtenu.

Déterminer graphiquement la répartition qui permet à 'l'entreprise de maximiser son chiffre d'affaire.

Réponse :

1. Le problème se traduite alors sous la forme :

$$\left\{\begin{array}{rc} \text{maximiser} & 16000x_1 + 10000x_2 = \Pi \\ \text{sous les contraintes} & x_1 + x_2 \leq 400 \\ & 2x_1 + x_2 \leq 600 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{array}\right.$$

2. On trace les 4droites des contraintes : Soit $\mathcal{D}_1$ la droite d'équation $x + y = 400$, $\mathcal{D}_1$ passe par $(0; 400)$ et $(400; 0)$. Soit $\mathcal{D}_2$ la droite d'équation $2x + y = 600$, $\mathcal{D}_2$ passe par $(0; 100)$ et $(300; 0)$. Ne pas oublier l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées.

   On en déduit le polygone des contraintes

3. On »trace « les lignes de niveaux du chiffre d'affaire z : ce sont les droites d'équations $16000x + 10000y = z$

   Sur la figure, on a tracé la droite D d'équation $16\,000x + 10\,000y = 8\,000\,000$ ou $8x + 5y = 4000$

4. On cherche parmi toutes les parallèles à D celle qui à la fois à une intersection non vide avec la zone des contraintes et dont l'ordonnée à l'origine est la plus grande : ici cette droite passe par le point $\Omega(200; 200)$.

5. En conclusion, le C.A. sera maximal dès lors que l'entreprise produira 200 véhicules de modèle A et 200 véhicules de modèle B : dans ce cas elle utilise tout son stock d'acier et la capacité maximale d'unités de travail. Enfin son CA sera de $200 \times 16000 + 200 \times 10000 = 5\,200\,000$ €.

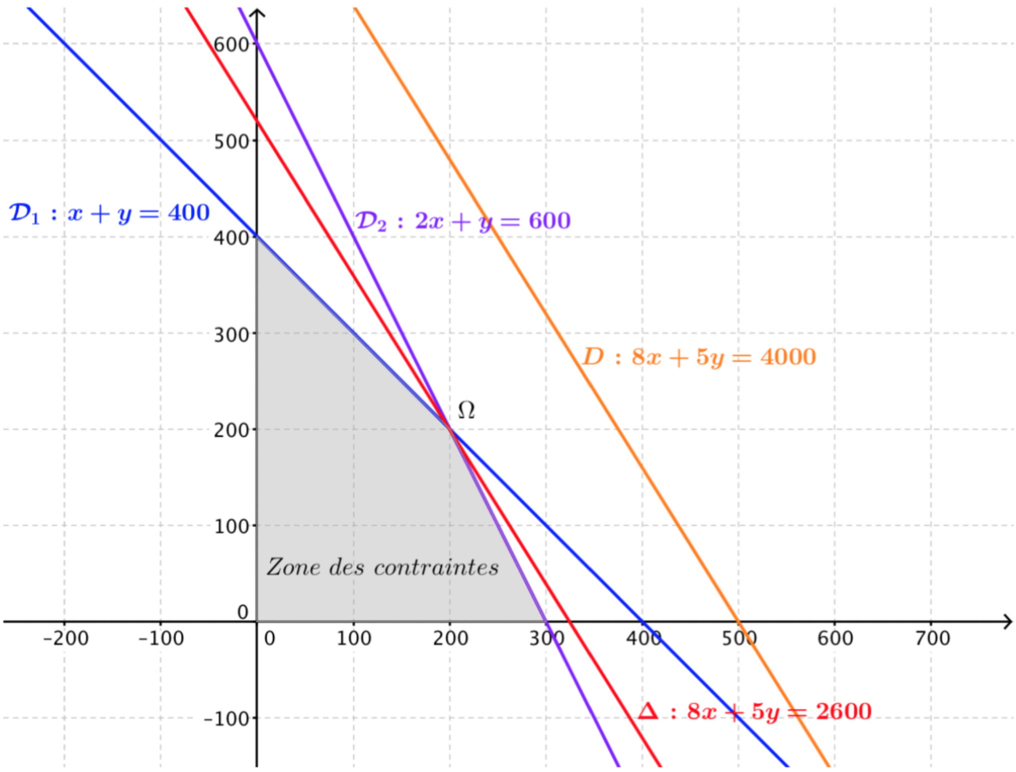


FIGURE 6.5 – Exemple 3-A

Remarque : ***sensibilité à la variation des données***

• Supposons maintenant que le stock d'acier disponible soit maintenant de 700 unités au lieu de 600 : l'entreprise doit résoudre le nouveau système :

$$\left\{\begin{array}{rc} \text{maximiser} & 16000x_1 + 10000x_2 = \Pi \\ \text{sous les contraintes} & x_1 + x_2 \leq 400 \\ & 2x_1 + x_2 \leq 700 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{array}\right.$$

La figure ci-dessous permet de résoudre ce système : la droite $\mathcal{D}_1$ ne change pas, $\mathcal{D}_2$ est remplacée par $\mathcal{D}'_2 \ : \ 2x + y = 700$. La parallèle à D optimale est maintenant $\Delta' \ : \ 8x + 5y = 2900$

Le C.A. sera maximal avec une production de 300 véhicules du modèle A et 100 véhicules du modèle B

Le C.A. maximal est alors $300 \times 16000 + 100 \times 10000 = 5\,800\,000$ €.

Ainsi, l'augmentation le stock d'acier de 100 unités permet une augmentation du CA de 600 000 € : on dit que le prix marginal de l'unité d'acier est 6 000 €.

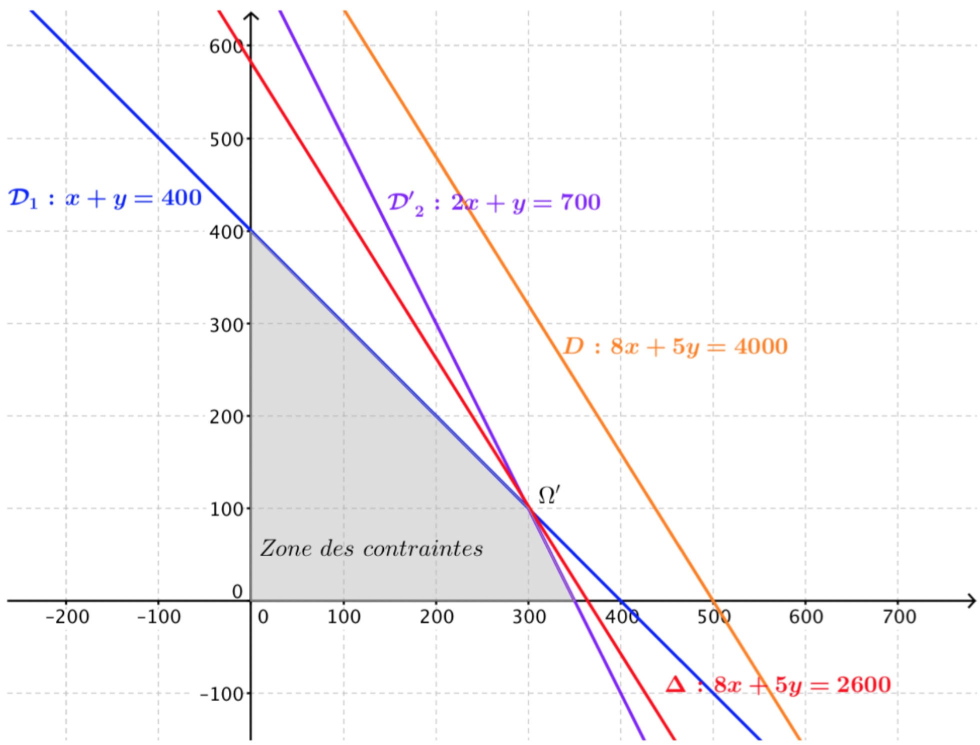


FIGURE 6.6 – Exemple 3-B

• Supposons maintenant que le volume d'unités de travail disponible soit maintenant de 500 unités au lieu de 400 (le nombre d'unités d'acier restant à 600) : l'entreprise doit résoudre le nouveau système :

$$\left\{\begin{array}{rc} \text{maximiser} & 16000x_1 + 10000x_2 = \Pi \\ \text{sous les contraintes} & x_1 + x_2 \leq 500 \\ & 2x_1 + x_2 \leq 600 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{array}\right.$$

Le C.A. sera maximal avec une production de 100 véhicules du modèle A et 400 véhicules du modèle B

Le C.A. maximal est alors $100 \times 16000 + 400 \times 10000 = 5\,600\,000$ €.

Ainsi, l'augmentation du volume d'unités de travail de 100 unités permet une augmentation du CA de 400 000 € : on dit que le prix marginal de l'unité de travail est 4 000 €.

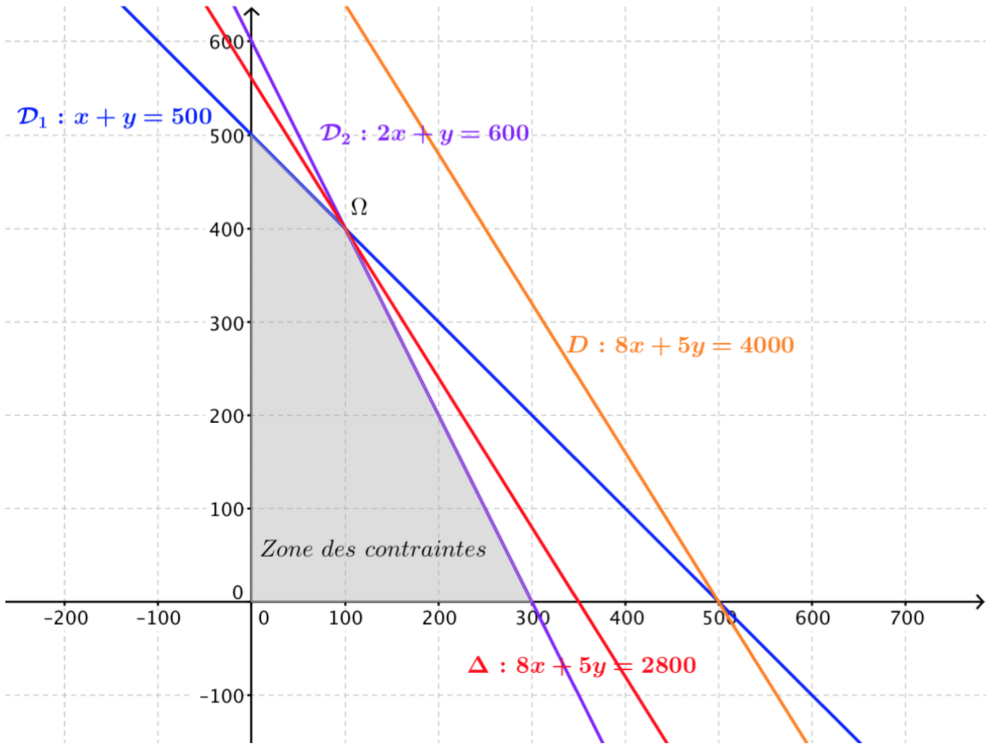


Figure 6.7 – Exemple 3-C

Leçon 7

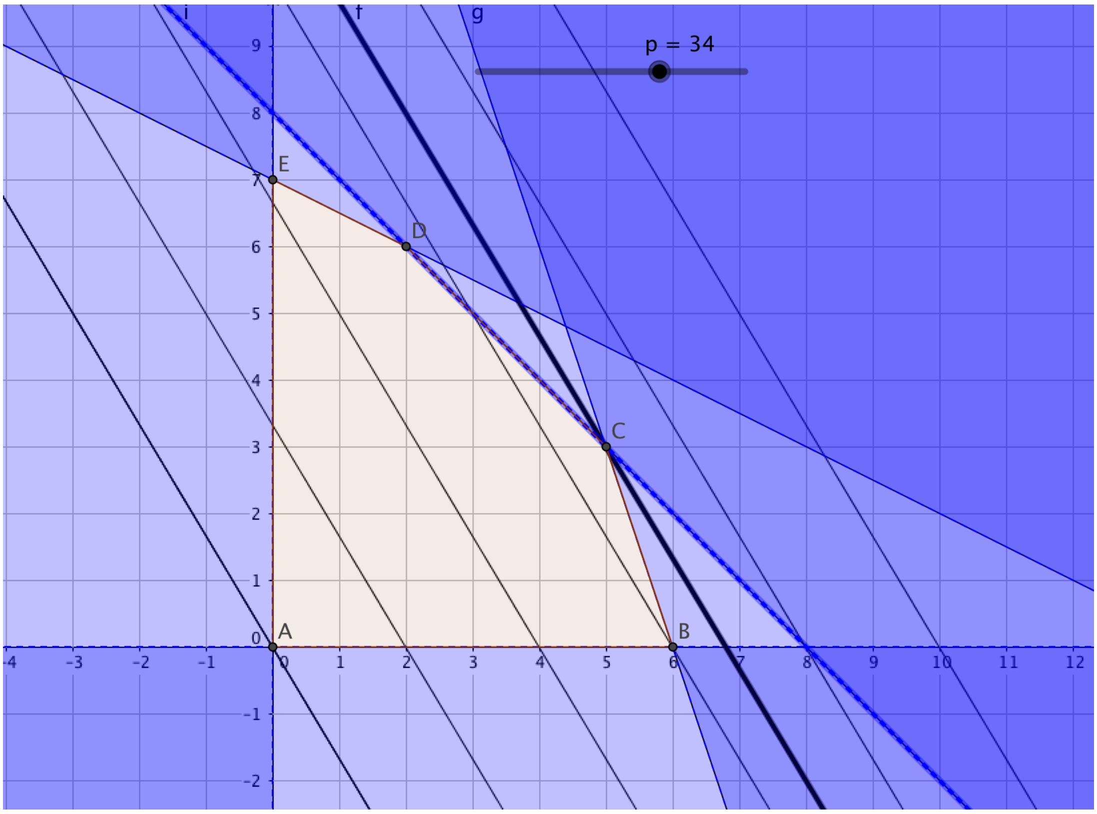
Programmation linéaire : la méthode du simplexe

La méthode graphique que nous avons vue dans le chapitre précédent ne convient que pour des problèmes à deux variables. Elle ne peut donc pas servir à résoudre des problèmes réels. Mais elle a un grand intérêt pédagogique pour comprendre la *méthode du simplexe* que nous présenterons sur un exemple, ainsi que les théorèmes généraux.

Exemple 138. Soit le problème de maximisation suivant :

$$\begin{cases} \text{maximiser} & 5x + 3y = \Pi \\ \text{sous les contraintes} & 6x + 2y \leq 36 \\ & 2x + 4y \leq 28 \\ & 5x + 5y \leq 40 \\ & x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$$

Comme il y a deux variables de décision x et y, ce problème peut être résolu graphiquement, ce que nous faisons d'abord. Après avoir dessiné la région accessible, on voit que les droites d'isoprofit ont pour équation $y = -\frac{5}{3}x + \frac{\Pi}{3}$. Il s'agit d'une famille de droites de pente $m = -5/3$. La méthode graphique montre que l'optimum est $\tilde{\Pi} = 34$, atteint au point $(x{,}y) = (5{,}3)$.



7.1 Définitions et notations

Le *problème général* de programmation linéaire consiste en l'optimisation (maximisation ou minimisation) d'une fonction linéaire de plusieurs variables, sujette à des *contraintes* qui peuvent être des équations ou des inéquations linéaires.

Contraintes Les contraintes se répartissent en deux catégories :

- Celles de type $x_j \geq 0$ appelées *conditions de non-négativité*
- toutes les autres, appelées *contraintes techniques* ou *vraies contraintes*.

Le variables x_j peuvent prendre n'importe quelles valeurs *réelles*, pourvu qu'elles vérifient les contraintes. Elles ne prennent donc pas nécessairement dans la solution optimale des *valeurs entières*, ce qui est souvent incompatible avec les phénomènes d'indivisibilité technique et économique : on ne peut pas construire, par exemple, 0,5 chaises, etc. Pour éviter ces difficultés, on a mis au point des méthodes de programmation en *nombres entiers*, qu'on ne traitera pas ici.

Cela étant, les *vraies contraintes* peuvent se présenter sous forme d'inéquations linéaires de sens quelconque (dans le même problème) $\geq$ ou $\leq$ ou d'équations linéaires. Les *variables* peuvent être positives, négatives ou de signe quelconque. Enfin la *fonction objectif* peut être maximisée ou minimisée.

7.1.1 Forme générale, standard, canonique

On peut présenter un problème de PL sous trois formes codifiées : forme générale, forme standard, forme canonique.

7.1.1.1 Forme générale

dans cette formulation, on admet des contraintes sous forme d'équation et d'inéquation. Toutes les inéquations doivent avoir le même sens ($\leq$ pour une maximisation et $\geq$ pour une minimisation), et les variables de décisions sont soit positives soit de signe quelconque (mais pas seulement négatives). Un problème de PL en forme générale se présente ainsi :

Forme générale	1. contraintes sous forme d'équation 2. Contraintes sous forme d'inéquations ($\leq$ si pb de max $\geq$ si pb de min) 3. Variables positives 4. Variables de signe quelconque

Pour mettre un problème de PL en forme générale :

Règle 1. pour obtenir que les inéquations linéaires, vraies contraintes, soient écrites avec des inégalités de même sens ($\leq$ pour une maximisation et $\geq$ pour une minimisation), on multiplie par -1 les deux membres d'une inégalités dont on veut changer de sens. P.ex. $x_1 - x_2 \leq 5$ devient $-x_1 + x_2 \geq -5$.

Règle 2. Les variables négatives $u_j \leq 0$ sont transformées en variables positives en remplaçant chaque variable négative par son opposée $x_j = -u_j$.

Exemple 139. Soit le problème initial

$$\begin{cases} \text{maximiser} & 4x_1 - 3u - 4v = z \\ \text{sous les contraintes} & 3x_1 + 2u - v = 4 \\ & x_1 - u + 2v \geq -2 \\ & 2x_1 + u + v \leq 8 \\ & x_1 \geq 0, u \leq 0, v \text{ de signe quelconque} \end{cases}$$

- On remplace la variable u négative par son opposée $x_2 = -u$, $x_2 \geq 0$.

- On multiplie par -1 la première inéquation.

D'où la forme générale :

$$\begin{cases} \text{maximiser} & 4x_1 + 3x_2 - 4v = z \\ \text{sous les contraintes} & 3x_1 - 2x_2 - v = 4 \\ & -x_1 - x_2 - 2v \leq 2 \\ & 2x_1 - x_2 + v \leq 8 \\ & x_1{,}x_2 \geq 0,\ v \text{ de signe quelconque} \end{cases}$$

Exemple 140. Le problème de l'exemple 138

$$\begin{cases} \text{maximiser} & 5x + 3y = \Pi \\ \text{sous les contraintes} & 6x + 2y \leq 36 \\ & 2x + 4y \leq 28 \\ & 5x + 5y \leq 40 \\ & x \geq 0, x \geq 0 \end{cases}$$

est déjà donné en forme générale.

7.1.1.2 Forme standard

Cette forme est celle utilisée par l'algorithme du simplexe, donc elle est particulièrement importante d'un point de vue pratique. Dans la forme générale, les contraintes techniques sont soit des équations soit des inéquations linéaires. Pour la forme standard, on transforme toutes les inéquations en équations, et on fait en sorte que toutes les variables soient positives : par conséquent, le système des contraintes techniques se présente en forme de système d'équations linéaires à variables positives :

Forme standard	1. contraintes sous forme d'équation 3. Variables positives

Pour mettre un problème de PL en forme standard :

Règle 3. La transformation d'une inéquation en équation se fait en introduisant dans le premier membre de l'inéquation une *variable d'écart* positive, qui comme son nom l'indique représente l'écart entre le niveau de la contrainte et la valeur du premier membre.

On procède de la façon suivante :

- On transforme une inégalité $\leq$, p.ex. $5x_1 + 3x_2 \leq 30$ en équation *en ajoutant* une variable d'écart positive $s \geq 0$, de façon que $5x_1 + 3x_2 + s = 30$. Cette variable représente le deficit, égal à la différence entre $5x_1 + 3x_2$ et 30.

- On transforme une inégalité $\geq$, p.ex. $4x_1 + 7x_2 \geq 60$ en équation *en soustrayant* une variable d'écart positive $s \geq 0$, de façon que $4x_1 + 7x_2 - s = 60$. Cette variable représente l'excédent, égal à la différence entre $4x_1 + 7x_2$ et 60.

Exemple 141. Le problème de l'exemple 138 : on transforme les inégalités en égalités en introduisant les variables d'écart s_1, s_2, s_3. D'où le nouveau problème

$$\text{Maximiser } 5x + 3y = \Pi$$
$$\begin{cases} 6x + 2y + s_1 = 36 \\ 2x + 4y + s_2 = 28 \\ 5x + 5y + s_3 = 40 \end{cases} \tag{7.1}$$
$$x,\ y,\ s_1,\ s_2\ ,s_3 \geq 0$$

On peut aussi exprimer le système des contraintes en forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} 6 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 36 \\ 28 \\ 40 \end{pmatrix} \tag{7.2}$$

Remarque 142.
- On introduit autant de variables d'écart distinctes qu'il y a d'inéquations. En effet, une variable d'écart donnée n'apparaît que dans une seule contrainte.
- Le variables d'écart sont affectées d'un coefficient nul dans la fonction objectif.

Règle 4. Dans la forme standard, toutes les variables sont positives. Lorsqu'une variable est de signe quelconque, on la remplace par la différence de deux variables positives : soit v une variable de signe quelconque ; on pose $v = (v_1 - v_2)$ avec $v_1 \geq 0$, $v_2 \geq 0$.

Exemple 143. Le problème de l'exemple 139 était en forme générale :

$$\begin{cases} \text{maximiser} & 4x_1 + 3x_2 - 4v = z \\ \text{sous les contraintes} & 3x_1 - 2x_2 - v = 4 \\ & -x_1 - x_2 - 2v \leq 2 \\ & 2x_1 - x_2 + v \leq 8 \\ & x_1, x_2 \geq 0,\ v \text{ de signe quelconque} \end{cases}$$

On remplace v par $(x_3 - x_4)$, avec $x_3 \geq 0$, $x_4 \geq 0$, et on introduit deux variables d'écart s_1 et s_2 dans les deux inéquations :

$$\begin{cases} \text{maximiser} & 4x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 4x_4 = z \\ \text{sous les contraintes} & 3x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 = 4 \\ & -x_1 - x_2 - 2x_3 + 2x_4 + s_1 = 2 \\ & 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + s_2 = 8 \\ & x_1,\, x_2,\, x_3,\, x_4,\, s_1,\, s_2 \geq 0 \end{cases}$$

On peut aussi exprimer le système des contraintes en forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -2 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix} \tag{7.3}$$

7.1.1.3 Forme canonique

La forme canonique est surtout utilisée dans le cadre de la théorie de la dualité, qui sera développée dans les chapitres suivants. Alors que dans la forme standard, toutes les contraintes techniques sont écrites sous forme d'équation, elles le sont sous forme d'inéquations dans la forme canonique. Dans les deux cas, on requiert que les variables soient positives.

Forme canonique	2. contraintes sous forme d'inéquation ($\leq$ si pb de max $\geq$ si pb de min) 3. Variables positives

Exemple 144. Le problème de l'exemple 138

$$\begin{cases} \text{maximiser} & 5x + 3y = \Pi \\ \text{sous les contraintes} & 6x + 2y \leq 36 \\ & 2x + 4y \leq 28 \\ & 5x + 5y \leq 40 \\ & x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$$

est déjà donné en forme canonique (et générale).

Règle 5. La transformation d'une équation en inéquation se fait en dédoublant chaque équation en deux inéquations de sens contraire. P.ex $x_1 - x_2 = 30$ équivaut à

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \leq 30 \\ x_1 - x_2 \geq 30 \end{cases} \tag{7.4}$$

Exemple 145. Mettre en forme canonique le problème de forme générale :

$$\begin{cases} \text{maximiser} & 4x_1 - 3x_2 - 4v = z \\ \text{sous les contraintes} & -x_1 - x_2 - 2v \leq 2 \\ & 2x_1 - x_2 + v \leq 4 \\ & 3x_1 - 2x_2 - v = 4 \\ & x_1,\, x_2 \geq 0, v \text{ de signe quelconque} \end{cases}$$

On dédouble la troisième contrainte en deux inéquations :

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - v \leq 4 \\ 3x_1 - 2x_2 - v \geq 4 \end{cases} \tag{7.5}$$

ou encore (règle 1)

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - v \leq 4 \\ -3x_1 + 2x_2 + v \leq -4 \end{cases} \tag{7.6}$$

d'où la forme canonique, après remplacement de v par $(x_3 - x_4)$

$$\begin{cases} \text{maximiser} & 4x_1 - 3x_2 - 4x_3 + 4x_4 = z \\ \text{sous les contraintes} & -x_1 - x_2 - 2x_3 + 2x_4 \leq 2 \\ & 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 \leq 4 \\ & 3x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 \leq 4 \\ & -3x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 \leq -4 \\ & x_1,\, x_2,\, x_3,\, x_4 \geq 0 \end{cases}$$

7.2 Théorème fondamental de la programmation linéaire

La forme standard d'un problème de PL permet de travailler avec des systèmes d'équations linéaires, desquels on connaît bien la théorie, et pour lesquels on dispose de puissants outils mathématiques (pivot de Gauss). Soit par exemple le problème du début du chapitre :

$$\begin{cases} \text{maximiser} & 5x + 3y = \Pi \\ \text{sous les contraintes} & 6x + 2y \leq 36 \\ & 2x + 4y \leq 28 \\ & 5x + 5y \leq 40 \\ & x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$$

en forme standard il devient

$$
\text{Maximiser } 5x+3y=\Pi
$$

$$
\begin{cases} 6x + 2y + s_1 = 36 \\ 2x + 4y + s_2 = 28 \\ 5x + 5y + s_3 = 40 \end{cases} \tag{7.7}
$$

$$
x,\ y,\ s_1,\ s_2\ ,s_3 \geq 0
$$

Nous avons à faire à un système de $m = 3$ équations en $n = 5$ variables. Comme $n > m$, ce système est soit incompatible, soit il admet une infinité de solutions.

Définition 146. On appelle *solution réalisable* (ou *programme réalisable*) tout choix des valeurs des variables vérifiant et les équations des contraintes et les conditions de non-négativité.

Le théorème du point extrême, que nous avons introduit au chapitre précédent, affirme que les valeurs optimales de la fonction objectif se situent aux coins, ou points extrêmes, de la région accessible. Quand on travaille avec la forme standard, on préfère parler de *solutions de base* du système. Or, le nombre de solutions de base est *fini*. En effet,

Théorème 147 (Théorème de la base)**.** *Dans un système de m équations et n variables, avec $n > m$, une solution dans laquelle au moins $n-m$ variables sont égales à zéro est une solution de base.*

Par conséquent, en posant $n - m$ variables égales à zéro et en résolvant les m équations pour les m variables restantes, on peut trouver une solution de base. Le nombre de solutions de base est ainsi au plus égal à

$$
\binom{n}{m} = \frac{n!}{(n-m)!\ m!}
$$

Précisons tout d'abord le vocabulaire :

Définition 148.
- On appelle *solution réalisable de base* toute solution de base du système des contraintes vérifiant les conditions de non-négativité (c'est une solution réalisable dans laquelle au moins $n - m$ variables sont égales à zéro).
- Dans une solution de base, les $n - m$ variables rendues égales à zéro sont appelées *variables hors base* ou *variables non principales*, tandis que les m variables qui ne sont pas rendues égales à zéro sont qualifiées de *variables de base* ou *variables principales*.

Exemple 149. Dans l'exemple de tout à l'heure, on peut choisir comme variables de base s_1, s_2, s_3. Alors

$$\begin{cases} s_1 & & & = 36 & -6x & - & 2y \\ & s_2 & & = 28 & -2x & - & 4y \\ & & s_3 & = 40 & -5x & - & 5y \end{cases}$$

Les variables x et y sont hors base : si on les rend égales à zéro, on trouve la solution de base $(x,y,s_1,s_2,s_3) = (0,0,36,28,40)$. Puisque toutes les valeurs respectent les conditions de positivité, c'est une solution de base réalisable. Elle correspond en effet à l'origine $(x,y) = (0,0)$, qui est bien un point extrême de la région accessible.

Mais on aurait pu choisir d'autres variables de base, p.ex. x, s_2, s_3 de base et y, s_1 hors base. En portant au second membre y et s_1 et en exprimant les variables principales en fonctions de y et s_1, on trouve :

$$\begin{cases} x & & & = & 6 & - & \frac{1}{6}s_1 & -\frac{1}{3}y \\ & s_2 & & = & 16 & + & \frac{1}{3}s_1 & -\frac{10}{3}y \\ & & s_3 & = & 10 & + & \frac{5}{6}s_1 & -\frac{10}{3}y \end{cases} \tag{7.8}$$

Cela donne, si on annule les variables non principales $y = s_1 = 0$, une autre solution de base qui est $(x,y,s_1,s_2,s_3) = (6,0,0,16,10)$. Elle est encore une solution de base réalisable, et graphiquement elle correspond au point extrême $(x,y) = (6,0)$.

Remarque 150. On voit ainsi que les variables de base correspondent aux variables « de pivot » de la méthode de Gauss, tandis que les variables hors base correspondent aux variables libres.

Théorème 151 (Théorème du point extrême)**.** *(i) Si un problème de PL sous forme standard admet une solution réalisable, alors il admet aussi une solution réalisable de base.*

(ii) Si un problème de PL sous forme standard admet une solution optimale (finie), alors il admet aussi une solution optimale de base.

Conclusion La portée du théorème du point extrême est essentielle : la (les) solutions du problème devait être cherchée dans l'*infinité* des solutions possibles du système d'équations des contraintes (en forme standard). Grâce au théorème, elle n'a plus à être recherchée que parmi les solutions de base de ce système, dont le nombre est *fini* et $\leq \binom{n}{m}$.

D'un point de vue mathématique, le problème est donc résolu : on pourrait toujours calculer toutes les solutions de base, éliminer celles qui ne sont pas réalisables, et finalement trouver celle(s) maximisant la valeur de la fonction objectif.

Mais ce processus de calcul et de tri serait extrêmement lourd à mettre en oeuvre pour des valeurs élevées de m et de n, même avec l'aide d'un puissant ordinateur. La méthode du simplexe permet au contraire d'explorer rapidement l'ensemble des solutions de base pour trouver une solution optimale.

Le théorème du point extrême a également *une portée économique essentielle*. Dans toute solution de base, les niveaux de m activités, au plus, sont positifs. Ceci signifie qu'un fonctionnement optimal du système étudié implique la mise en oeuvre d'activités en nombre au plus égal à celui des contraintes. *Le théorème fondamental est donc un théorème de spécialisation des activités.*

Remarque 152. Rien n'assure que le problème admet une solution réalisable (et donc une solution réalisable de base). Il peut être impossible.

7.3 Méthode du simplexe : un exemple en détail

Sachant que l'optimum de la fonction objectif, s'il existe, se trouve en (au moins) un point extrême de la région accessible, on pourrait trouver cet optimum simplement en calculant la valeur de la fonction objectif en chaque point extrême et choisir la plus grande valeur obtenue. Toutefois, cette méthode n'est pas faisable en pratique, car le nombre de points extrêmes devient très élevé et cela conduit à un grand nombre de calcul inutiles.

La *méthode du simplexe* (Dantzig 1947) réduit considérablement le nombre d'essais. Elle consiste à :

- déterminer un point extrême accessible.
- cheminer de point extrême en point extrême toujours en améliorant la valeur de la fonction objectif
- savoir s'arrêter quand le point extrême optimal est atteint.

Reprenons l'exemple 138, et résolvons-le en détail avec la méthode du simplexe. On part du problème en forme canonique

$$\begin{cases} \text{maximiser} & 5x + 3y = \Pi \\ \text{sous les contraintes} & 6x + 2y \leq 36 \\ & 2x + 4y \leq 28 \\ & 5x + 5y \leq 40 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Pour mettre le programme linéaire en forme standard, on transforme les inégalités en égalités en introduisant les variables d'écart s_1, s_2, s_3. D'où le nouveau problème

$$\text{Maximiser } 5x + 3y = \Pi$$
$$\begin{cases} 6x + 2y + s_1 = 36 \\ 2x + 4y + s_2 = 28 \\ 5x + 5y + s_3 = 40 \end{cases} \tag{7.9}$$

Ceci est un système de 3 équations à 5 inconnues. Pour écrire l'ensemble de ses solutions, on peut choisir s_1,s_2,s_3 comme variables principales (variables de base) et les exprimer en fonction de x et y qui sont hors base ou non principales (variables libres). On a donc

$$\text{Maximiser } 5x + 3y = \Pi$$
$$\begin{cases} s_1 = 36 - 6x - 2y \\ s_2 = 28 - 2x - 4y \\ s_3 = 40 - 5x - 5y \end{cases} \tag{7.10}$$

Cela donne, si on annule les variables non principales $x = y = 0$, la première solution de base accessible qui est $(x,y,s_1,s_2,s_3) = (0,0,36,28,40)$. De plus, $\Pi(0,0) = 0$. Ceci correspond bien à l'origine (0,0), qui est bien un programme principal réalisable, où Π vaut 0.

Si on passe à un autre programme principal réalisable dans lequel x et y ne sont plus nuls, on aura augmenté Π et le programme sera meilleur puisqu'il s'agit d'un problème de maximisation. Dans la méthode du simplexe, on ne fait varier qu'une seule variable non principale à la fois. On a $\Pi = 5x + 3y$: si on augmente x, Π augmente car $5 > 0$; de même si on augmente y, Π augmente car $3 > 0$; nous choisissons d'augmenter x, car c'est x qui a le plus grand coefficient positif (et donc Π augmentera davantage).

Maintenant on observe les contraintes : y est fixé à 0, et l'on a, si l'on augmente x,

$$\begin{cases} s_1 = 36 - 6x - 2y & \text{donc } s_1 \text{ diminue et s'annule pour } x = 36/6 = 6 \\ s_2 = 28 - 2x - 4y & \text{donc } s_2 \text{ diminue et s'annule pour } x = 28/2 = 14 \\ s_3 = 40 - 5x - 5y & \text{donc } s_3 \text{ diminue et s'annule pour } x = 40/5 = 8 \end{cases}$$

Comme on doit avoir $s_1,s_2,s_3 \geq 0$, on ne peut augmenter x au-delà de 6.

La méthode du simplexe consiste désormais à introduire x dans l'ensemble des variables de base, et en faire sortir s_1, qui est la première variable de base à s'annuler quand x croît. On dit que x est la variable entrante et s_1 la variable sortante. On substitue $x = 6 - \frac{1}{6}s_1 - \frac{1}{3}y$ dans les contraintes et aussi dans l'expression de Π. On arrive à

$$\text{Maximiser } 30 - \frac{5}{6}s_1 + \frac{4}{3}y = \Pi$$
$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} x & & & = & 6 & - & \frac{1}{6}s_1 & -\frac{1}{3}y \\ & s_2 & & = & 16 & + & \frac{1}{3}s_1 & -\frac{10}{3}y \\ & & s_3 & = & 10 & + & \frac{5}{6}s_1 & -\frac{10}{3}y \end{array}\right. \tag{7.11}$$

Cela donne, si on annule les variables non principales $y = s_1 = 0$, la deuxième solution de base accessible qui est $(x,y,s_1,s_2,s_3) = (6,0,0,16,10)$. De plus, $\Pi = 30$. Graphiquement, on s'est déplacé de l'origine (0,0) au point extrême (6,0) le long de la contrainte donnée par la droite horizontale (car on a augmenté x seulement). (6,0) est bien un programme principal réalisable, où Π vaut 30, donc il y a bien eu augmentation.

Nouvelle étape : on part de $\Pi = 30 - \frac{5}{6}s_1 + \frac{4}{3}y$. On itère le procédé :

- si l'on augmente s_1, Π diminue car $-5/6 < 0$;
- si l'on augmente y, Π augmente, car $4/3 > 0$

On choisit d'augmenter y, qui entre dans les variables principales. Jusqu'où peut-on augmenter y ? On observe les contraintes (rappel : $s_1 = 0$) : si y augmente

$$\left\{\begin{array}{cccccccc l} x & & & = & 6 & - & \frac{1}{6}s_1 & -\frac{1}{3}y & \text{donc } x \text{ diminue et s'annule pour } y = 6/(1/3) = 18 \\ & s_2 & & = & 16 & + & \frac{1}{3}s_1 & -\frac{10}{3}y & \text{donc } s_2 \text{ diminue et s'annule pour } x = 16/(10/3) = \\ & & s_3 & = & 10 & + & \frac{5}{6}s_1 & -\frac{10}{3}y & \text{donc } s_3 \text{ diminue et s'annule pour } x = 10/(10/3) = \end{array}\right.$$

Donc y peut augmenter jusqu'à 3. Alors s_3 sort de la base et y entre dans la base. Exprimons tout en fonction de s_1,s_3 : en substituant $y = 3 + \frac{1}{4}s_1 - \frac{3}{10}s_3$ on obtient :

$$\text{Maximiser } 34 - \frac{1}{2}s_1 - \frac{2}{5}s_3 = \Pi$$
$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} x & & & = & 5 & - & \frac{1}{4}s_1 & +\frac{1}{10}s_3 \\ & y & & = & 3 & + & \frac{1}{4}s_1 & -\frac{3}{10}s_3 \\ & & s_2 & = & 6 & - & \frac{1}{2}s_1 & +s_3 \end{array}\right. \tag{7.12}$$

Cela donne, si on annule les variables non principales $s_1 = s_3 = 0$, la troisième solution de base accessible qui est $(x,y,s_1,s_2,s_3) = (5,3,0,6,0)$. De plus, $\Pi = 34$. Graphiquement, on s'est déplacé du point extrême (6,0) au point extrême (5,3) le long d'une droite, et il y a bien eu augmentation de Π, car maintenant Π vaut 34.

On itère encore le procédé, mais cette fois $\Pi = 34 - \frac{1}{2}s_1 - \frac{2}{5}s_3$:

- si l'on augmente s_1, Π diminue car $-1/2 < 0$;

- si l'on augmente s_3, Π diminue, car $-2/5 < 0$

Donc on ne peut plus augmenter Π : le maximum de Π réalisable est 34, atteint par la production réalisable $(x,y) = (5,3)$.

7.4 Les tableaux du simplexe

Les calculs que nous avons décrits ci-dessus peuvent être présentés de façon plus lisible et plus mécanique avec les tableaux du simplexe.

présentation du tableau Le problème en forme standard

$$\text{Maximiser } 5x + 3y = \Pi$$
$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} 6x & + & 2y & + & s_1 & & & = & 36 \\ 2x & + & 4y & & & + & s_2 & = & 28 \\ 5x & + & 5y & & & & + \; s_3 & = & 40 \end{array}\right. \tag{7.13}$$

se réécrit

$$\text{Maximiser } \Pi$$
$$\left\{\begin{array}{cccccccccc} -\Pi & +5x & + & 3y & & & & & = & 0 \\ & 6x & + & 2y & + & s_1 & & & = & 36 \\ & 2x & + & 4y & & & + & s_2 & = & 28 \\ & 5x & + & 5y & & & & + \; s_3 & = & 40 \end{array}\right. \tag{7.14}$$
$$x,\, y,\, s_1,\, s_2,\, s_3 \geq 0.$$

Ce système donne le tableau du simplexe numéro 1 :

	base	2nd membres	$-\Pi$	x	y	s_1	s_2	s_3
	$-\Pi$	0	1	5	3			
	s_1	36		6	2	1		
	s_2	28		2	4		1	
	s_3	40		5	5			1

- la première colonne est pour l'instant libre, elle sera utilisée tout à l'heure ;
- la deuxième colonne sert à rappeler quelles sont les variables de base à chaque étape ; leurs valeurs figurent dans la colonne suivante lorsqu'on annule les variables non principales. On considère $-\Pi$ comme une autre variable, et elle est toujours de base.

Choix du pivot Dans la section précédente, nous avons d'abord choisi de faire croître une variable non principale : ici, dans la présentation adoptée, et parce qu'il s'agit d'un problème de maximisation, on choisit la variable qui présente sur la ligne de $-\Pi$ le plus grand coefficient positif. Ce coefficient est 5 qui correspond à x. On ajoute à 5 une flèche descendante : nous disposons ainsi d'une *colonne remplaçante*. Si on a le choix entre plusieurs variables, on en choisit une au hasard.

Ensuite, nous avons été amenés à calculer pour quelle valeur de x les variables principales s_1,s_2,s_3 s'annulaient. Pour ceci, il suffit de calculer pour chaque ligne autre que celle de $-\Pi$ le quotient du second membre par le coefficient situé dans (la même ligne et dans) la colonne remplaçante. On appelle v_1,v_2,$\ldots$ ces quotients et on les écrit dans la première colonne à gauche. On retient le plus petit v_i positif (qui existe !), ici $v_1 = 6$. Ce choix détermine la variable principale qui va sortir de base, ici s_1 : on marque ceci par une flèche sortante sur s_1 : nous disposons ainsi d'une *ligne remplacée*.

Le coefficient situé à l'intersection de la colonne remplaçante et de la ligne remplacée s'appelle le *pivot*. On l'entoure d'une case.

v_i	base	2nd membres	$-\Pi$	x	y	s_1	s_2	s_3
	$-\Pi$	0	1	$5\downarrow$	3			
$v_1 = 36/6 = 6$	$\leftarrow s_1$	36		$\boxed{6}$	2	1		
$v_2 = 28/2 = 14$	s_2	28		2	4		1	
$v_3 = 40/5 = 8$	s_3	40		5	5			1

Pivotage Ensuite, nous avons substitué $x = 6 - \frac{1}{6}s_1 - \frac{1}{3}y$ dans les contraintes et aussi dans l'expression de Π. Ici, on fait des opérations élémentaires sur les lignes du tableau : on garde la ligne du pivot et l'on élimine x des autres lignes, puis on divise la ligne de x par 6 pour avoir un pivot égal à 1. Cela donne d'abord

v_i	base	2nd membres	$-\Pi$	x	y	s_1	s_2	s_3	
	$-\Pi$	0	1	$5\downarrow$	3				
		6		$\boxed{1}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{6}$			$L_1 \leftarrow \frac{1}{6}L_1$
		28		2	4		1		
		40		5	5			1	

puis

v_i	base	2nd membres	$-\Pi$	x	y	s_1	s_2	s_3	
	$-\Pi$	-30	1		$\frac{4}{3}$	$-\frac{5}{6}$			$L_0 \leftarrow L_0 - 5L_1$
	x	6		1	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{6}$			
	s_2	16		0	$\frac{10}{3}$	$-\frac{1}{3}$	1		$L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$
	s_3	10		0	$\frac{10}{3}$	-$\frac{5}{6}$		1	$L_3 \leftarrow L_3 - 5L_1$

Nous sommes arrivés à la deuxième solution de base : ici les variables hors base sont y et s_1, donc si on les pose égales à 0 on obtient, sur la ligne L_0 : $-\Pi = -30$, donc la nouvelle valeur de la fonction objectif est bien 30, et la solution de base est $(x,y,s_1,s_2,s_3) = (6{,}0{,}0{,}16{,}10)$ qui correspond au point (6,0) trouvé tout à l'heure.

Itération Maintenant on itère les opérations de choix du pivot et du pivotage : le plus grand coefficient positif de la ligne de $-\Pi$ est 4/3, donc y entre dans la base. En calculant les ratios de déplacement v_i on trouve que le plus petit est $v_3 = 3$.

v_i	base	2nd membres	$-\Pi$	x	y	s_1	s_2	s_3	
	$-\Pi$	-30	1		$\frac{4}{3}\downarrow$	$-\frac{5}{6}$			
$v_1 = 6/(2/6) = 18$	x	6		1	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{6}$			
$v_2 = 16/(10/3) = 4{,}8$	s_2	16		0	$\frac{10}{3}$	$-\frac{1}{3}$	1		
$v_3 = 10/(10/3) = 3$	$\leftarrow s_3$	10		0	$\boxed{\frac{10}{3}}$	-$\frac{5}{6}$		1	

Alors s_3 sort de la base, et le pivot est 10/3. Le pivotage donne d'abord

v_i	base	2nd membres	$-\Pi$	x	y	s_1	s_2	s_3	
	$-\Pi$	-30	1		$\frac{4}{3}\downarrow$	$-\frac{5}{6}$			
		6		1	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{6}$			
		16		0	$\frac{10}{3}$	$-\frac{1}{3}$	1		
		3		0	$\boxed{1}$	-$\frac{1}{4}$		$\frac{3}{10}$	$L_3 \leftarrow \frac{3}{10}L_3$

puis

v_i	base	2nd membres	$-\Pi$	x	y	s_1	s_2	s_3	
	$-\Pi$	-34	1			$-\frac{1}{2}$		$-\frac{2}{5}$	$L_0 \leftarrow L_0 - \frac{4}{3}L_3$
	x	5		1	0	$\frac{1}{4}$		$-\frac{1}{10}$	$L_1 \leftarrow L_1 - \frac{2}{6}L_3$
	s_2	6		0	0	$\frac{1}{2}$	1	-1	$L_2 \leftarrow L_2 - \frac{10}{3}L_3$
	y	3		0	1	-$\frac{1}{4}$		$\frac{3}{10}$	

Nous sommes arrivés à la troisième solution de base : ici s_1 et s_3 sont hors base, donc si on les annule on obtient $x = 5$, $y = 3$ et $s_2 = 6$; de plus, la nouvelle valeur de Π est 34. Comme dans la ligne 0 tous les coefficients sont négatifs, on ne peut améliorer la valeur de Π, donc l'algorithme du simplexe s'arrête ici et (5,3) est la solution de base optimale.

Il est d'usage de regrouper les tableaux du simplexe des différentes étapes dans un seul tableau du simplexe : cela donne dans notre exemple :

v_i	base	2nd-m	$-\Pi$	x	y	s_1	s_2	s_3	opération
	$-\Pi$	0	1	$5\downarrow$	3				
$v_1 = 36/6 = 6$	$\leftarrow s_1$	36		$\boxed{6}$	2	1			
$v_2 = 28/2 = 14$	s_2	28		2	4		1		
$v_3 = 40/5 = 8$	s_3	40		5	5			1	
	$-\Pi$	-30	1		$\frac{4}{3}\downarrow$	$-\frac{5}{6}$			$L_0 \leftarrow L_0 - \frac{5}{6}L_1$
$v_1 = 6/(2/6) = 18$	x	6		1	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{6}$			$L_1 \leftarrow \frac{1}{6}L_1$
$v_2 = 16/(10/3) = 4{,}8$	s_2	16		0	$\frac{10}{3}$	$-\frac{1}{3}$	1		$L_2 \leftarrow L_2 - \frac{2}{6}L_1$
$v_3 = 10/(10/3) = 3$	$\leftarrow s_3$	10		0	$\boxed{\frac{10}{3}}$	$-\frac{5}{6}$		1	$L_3 \leftarrow L_3 - \frac{5}{6}L_1$
	$-\Pi$	-34	1			$-\frac{1}{2}$		$-\frac{2}{5}$	$L_0 \leftarrow L_0 - \frac{4}{10}L_3$
	x	5		1	0	$\frac{1}{4}$		$-\frac{1}{10}$	$L_1 \leftarrow L_1 - \frac{1}{10}L_3$
	s_2	6		0	0	$\frac{1}{2}$	1	-1	$L_2 \leftarrow L_2 - L_3$
	y	3		0	1	$-\frac{1}{4}$		$\frac{3}{10}$	$L_3 \leftarrow \frac{3}{10}L_3$

7.5 Un autre exemple

Voici un deuxième exemple résolu avec les tableaux du simplexe. Il s'agit de l'exemple 130, que nous avons résolu graphiquement dans le chapitre précédent. Le problème en forme canonique est le suivant :

$$\left\{\begin{array}{rr} \text{maximiser} & 3x_1 + 4x_2 = \Pi \\ \text{sous les contraintes} & 2{,}5x_1 + x_2 \leq 20 \\ & 3x_1 + 3x_2 \leq 30 \\ & x_1 + 2x_2 \leq 16 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{array}\right.$$

On introduit les variables d'écart : on obtient

Maximiser Π

$$\left\{\begin{array}{rrrrrrrrrrrr} -\Pi & +3x & + & 4y & & & & & & & = & 0 \\ & 2{,}5x & + & y & + & s_1 & & & & & = & 20 \\ & 3x & + & 3y & & & + & s_2 & & & = & 30 \\ & x & + & 2y & & & & & + & s_3 & = & 16 \end{array}\right. \tag{7.15}$$

$$x,\ y,\ s_1,\ s_2,\ s_3 \geq 0.$$

ce qui donne le premier tableau du simplexe :

	base	2nd-m	$-\Pi$	x	y	s_1	s_2	s_3
	$-\Pi$	0	1	3	4			
	s_1	20		2,5	1	1		
	s_2	30		3	3		1	
	s_3	16		1	2			1

Les calculs se poursuivent de tableau en tableau, chacun correspondant à un sommet de la région accessible. L'optimum est atteint lorsque tous les coefficients de la ligne 0 sont devenus négatifs.

v_i	base	2nd-m	$-\Pi$	x	y	s_1	s_2	s_3	opération
	$-\Pi$	0	1	3	$4\downarrow$				
$v_1 = 20/1 = 20$	s_1	20		2,5	1	1			
$v_2 = 30/3 = 10$	s_2	30		3	3		1		
$v_3 = 16/2 = 8$	$\leftarrow s_3$	16		1	$\boxed{2}$			1	
	$-\Pi$	-32	1	$1\downarrow$				-2	$L_0 \leftarrow L_0 - 2L_3$
$v_1 = 12/2 = 6$	s_1	12		2	0	1		$-\frac{1}{2}$	$L_1 \leftarrow L_1 - \frac{1}{2}L_3$
$v_2 = 6/(3/2) = 4$	$\leftarrow s_2$	6		$\boxed{\frac{3}{2}}$	0	0	1	$-\frac{3}{2}$	$L_2 \leftarrow L_2 - \frac{3}{2}L_3$
$v_3 = 8/(1/2) = 16$	y	8		$\frac{1}{2}$	1	0		$\frac{1}{2}$	$L_3 \leftarrow \frac{1}{2}L_3$
	$-\Pi$	-36	1			0	$-\frac{2}{3}$	-1	$L_0 \leftarrow L_0 - \frac{2}{3}L_2$
	s_1	4			0	1	$-\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$	$L_1 \leftarrow L_1 - \frac{4}{3}L_2$
	x	4		1	0	0	$\frac{2}{3}$	-1	$L_2 \leftarrow \frac{2}{3}L_2$
	y	6		0	1	0	$-\frac{1}{3}$	1	$L_3 \leftarrow L_3 - \frac{1}{3}L_2$

En lisant la ligne L_0, on obtient la valeur optimale de Π qui est 36 ; cette valeur est atteinte par le programme réalisable $(x,y) = (4,6)$, qui est bien conforme à ce qu'on a trouvé dans le chapitre précédent par voie graphique.

Leçon 8

Programmation linéaire : le dual

8.1 Un exemple de PL résolu par la méthode du simplexe : pour réviser !

Avant de commencer la théorie de la dualité, traitons encore un exemple de problème de PL par la méthode du simplexe. Soit le problème de PL suivant :

$$\begin{cases} \text{maximiser} & 14x_1 + 12x_2 + 18x_3 = \Pi \\ \text{sous les contraintes} & 2x_1 + x_2 + x_3 \leq 2 \\ & x_1 + x_2 + x_3 \leq 4 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0 \end{cases}$$

- Le problème est en forme générale et canonique (les contraintes sont toutes des $\leq$ car il s'agit d'un problème de maximisation, et les variables de décision sont non négatives)
- La fonction objectif est $\Pi = 14x_1 + 12x_2 + 18x_3$
- Les variables de décision sont x_1,x_2,x_3
- Les contraintes techniques sont $2x_1 + x_2 + x_3 \leq 2$ et $x_1 + x_2 + x_3 \leq 4$
- les conditions de non-négativité sont $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0$

Pour appliquer la méthode su simplexe, il faut d'abord écrire le problème en forme standard, en rajoutant les variables d'écart :

Maximiser Π

$$\begin{cases} -\Pi & +14x_1 + 12x_2 + 18x_3 & & & = 0 \\ & 2x_1 + x_2 + x_3 & +s_1 & & = 2 \\ & x_1 + x_2 + x_3 & & +s_2 & = 4 \end{cases} \tag{8.1}$$

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ s_1 \geq 0,\ s_2 \geq 0$

ce qui donne le premier tableau du simplexe :

	base	2nd-m	$-\Pi$	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2
	$-\Pi$	0	1	14	12	18		
	s_1	2		2	1	1	1	
	s_2	4		1	1	3		1

Maintenant, on applique la méthode : les calculs se poursuivent de tableau en tableau, chacun correspondant à un sommet de la région accessible. L'optimum est atteint lorsque tous les coefficients de la ligne 0 sont devenus négatifs (vous êtes fortement invités à refaire les calculs !)

v_i	base	2nd-m	$-\Pi$	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	opération
	$-\Pi$	0	1	14	12	$18\downarrow$	0	0	L_0
$v_1 = 2/1 = 2$	s_1	2		2	1	1	1		L_1
$v_2 = 4/3 = 1{,}33$	$\leftarrow s_2$	4		1	1	$\boxed{3}$		1	L_2
	$-\Pi$	-24	1	$8\downarrow$	6	0	0	-6	$L_0 - 6L_2$
$v_1 = \frac{2}{3}/\frac{5}{3} = \frac{2}{5}$	$\leftarrow s_1$	$\frac{2}{3}$		$\boxed{\frac{5}{3}}$	$\frac{2}{3}$	0	1	$-\frac{1}{3}$	$L_1 - \frac{1}{3}L_2$
$v_2 = \frac{4}{3}/\frac{1}{3} = 4$	x_3	$\frac{4}{3}$		$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	1	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}L_2$
	$-\Pi$	$-\frac{136}{5}$	1		$\frac{14}{5}\downarrow$	0	$-\frac{24}{5}$	$-\frac{22}{5}$	$L_0 - \frac{24}{5}L_1$
$v_1 = \frac{2}{5}/\frac{2}{5} = 1$	$\leftarrow x_1$	$\frac{2}{5}$		1	$\boxed{\frac{2}{5}}$	0	$\frac{3}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}L_1$
$v_2 = \frac{6}{5}/\frac{1}{5} = 6$	x_3	$\frac{6}{5}$		0	$\frac{1}{5}$	1	$-\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$L_2 - \frac{1}{5}L_1$
	$-\Pi$	-30	1	-7	0	0	-9	-3	$L_0 - 7L_1$
	x_2	1		$\frac{5}{2}$	1	0	$\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{5}{2}L_1$
	x_3	1		$-\frac{1}{5}$	0	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$L_2 - \frac{1}{2}L_1$

- On s'arrête car dans la ligne L_0 de Π, tous les coefficients sont négatifs. En effet, cette ligne signifie l'équation :

$$-30 = -\Pi - 7x_1 - 9s_1 - 3s_2 \iff \boxed{\Pi = 30 - 7x_1 - 9s_1 - 3s_2}$$

  donc si on augmente la valeur d'une quelconque des variables, la valeur de Π diminuera.
- La valeur optimale est $\tilde{\Pi} = 30$.
- Les variables x_1, s_1, s_2 sont hors base, donc à l'optimum elles valent 0
- Les variables x_2, x_3 sont de base, donc à l'optimum elles prennent la valeur de leur second membre : $x_2 = 1$, $x_3 = 1$.
- La solution optimale est donc $(\tilde{x_1},\tilde{x_2},\tilde{x_3}) = (0{,}1{,}1)$, avec des variables d'écart $(\tilde{s_1},\tilde{s_2}) = (0{,}0)$.

En plus, dans ce chapitre, nous allons voir que :

- 9 est la *valeur marginale* de la variable d'écart s_1 (ou de la première contrainte du problème), et 3 est la *valeur marginale* de la variable d'écart s_2 (ou de la deuxième contrainte du problème), cf. §8.5.2
- $\tilde{s_1} = \tilde{s_2} = 0$: à l'optimum, les deux contraintes du problème sont *saturées*, cf. §8.5.1

8.2 Définitions

Dans la programmation linéaire, à tout problème linéaire de maximisation correspond un problème de minimisation, et à tout problème de minimisation correspond un problème de maximisation. Le problème initial s'appelle *problème primal*, tandis que le problème qui lui correspond s'appelle *problème dual*.

Au départ, le problème dual est défini à l'aide d'une formulation mathématique ; mais des liens vont apparaître à l'aide de *théorèmes de dualité*. Et il arrive qu'un problème de programmation linéaire soit plus facile à résoudre en se servant du dual que du primal.

8.2.1 Cas où le primal est écrit sous forme canonique

Exemple 153. Soit le problème initial ou primal :

$$\left\{\begin{array}{rc} \text{maximiser} & 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = \Pi \\ \text{sous les contraintes} & 2{,}5x_1 + x_2 + 5x_3 \leq 20 \\ & 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 30 \\ & x_1 + 2x_2 + 4x_3 \leq 16 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0 \end{array}\right. \tag{8.2}$$

Le problème dual correspondant est

$$\left\{\begin{array}{rc} \text{minimiser} & 20y_1 + 30y_2 + 16y_3 = c \\ \text{sous les contraintes} & 2{,}5y_1 + 3y_2 + y_3 \geq 3 \\ & y_1 + 3y_2 + 2y_3 \geq 4 \\ & 5y_1 + 2y_2 + 4y_3 \geq 2 \\ & y_1 \geq 0, y_2 \geq 0,\ y_3 \geq 0 \end{array}\right. \tag{8.3}$$

Règles de transformation permettant d'obtenir le dual Lorsqu'on formule le dual à partir du primal donné en forme canonique (contraintes en forme d'inégalité et variables de décision positives) :

1. Le sens de l'optimisation est inversé : la maximisation dans le primal devient une minimisation dans le dual et inversement.
2. Dans les contraintes techniques, les sens de l'inégalité est inversé ($\geq$ devient $\leq$ et inversement). Cependant, la condition de non-négativité reste pour les nouvelles variables de décision.
3. Le dual comporte autant de variables de décision y_i qu'il y a de contraintes dans le primal.
4. Le dual comporte autant de contraintes qu'il y a de variables de décision x_j dans le primal.
5. Les coefficients de la fonction objectif du dual sont les seconds membres des contraintes du primal.
6. Les seconds membres des contraintes du dual sont les coefficients de la fonction objectif du primal.
7. Chaque colonne de coefficients dans les contraintes du primal devient une ligne de coefficients dans les contraintes du dual.

Remarque 154. Pour passer aisément du primal au dual, il suffit d'écrire la transposée d'une matrice : en effet, si l'on écrit la matrice des coefficients des contraintes, et on y ajoute une ligne avec les coefficients de la fonction objectif, on obtient une matrice dont la transposée sera la matrice des coefficients du problème dual. P.ex. le problème de l'exemple précédent donne :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2{,}5 & 1 & 5 & 20 \\ 3 & 3 & 2 & 30 \\ 1 & 2 & 4 & 16 \\ \hline 3 & 4 & 2 & \Pi \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2{,}5 & 3 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \\ 5 & 2 & 4 & 2 \\ \hline 20 & 30 & 16 & c \end{array}\right) \tag{8.4}$$

Exemple 155. Le dual du problème §8.1 début du chapitre est :

$$\left\{\begin{array}{rc} \text{minimiser} & 2y_1 + 4y_2 = c \\ \text{sous les contraintes} & 2y_1 + y_2 \geq 14 \\ & y_1 + y_2 \geq 12 \\ & y_1 + 3y_2 \geq 18 \\ & y_1 \geq 0, y_2 \geq 0. \end{array}\right.$$

Exemple 156. Étant donné le problème primal :

$$\left\{\begin{array}{rc} \text{maximiser} & 5x + 3y = \Pi \\ \text{sous les contraintes} & 6x + 2y \leq 36 \\ & 5x + 5y \leq 40 \\ & 2x + 4y \leq 28 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{array}\right.$$

, le problème dual correspondant est :

$$\begin{cases} \text{minimiser} & 36y_1 + 40y_2 + 28y_3 = c \\ \text{sous les contraintes} & 6y_1 + 5y_2 + 2y_3 \geq 5 \\ & 2y_1 + 5y_2 + 4y_3 \geq 3 \\ & y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0 \end{cases}$$

Mini-exercice

1. Écrivez le dual du problème de PL :

$$\begin{cases} \text{minimiser} & 20y_1 + 30y_2 + 16y_3 = c \\ \text{sous les contraintes} & 2{,}5y_1 + 3y_2 + y_3 \geq 3 \\ & y_1 + 3y_2 + 2y_3 \geq 3 \\ & y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0 \end{cases}$$

2. Même question avec le problème :

$$\begin{cases} \text{maximiser} & 10x_1 + 13x_2 = \Pi \\ \text{sous les contraintes} & 5x_1 + 15x_2 \leq 6000 \\ & 10x_1 + 8x_2 \leq 7200 \\ & 11x_1 + 20x_2 \leq 9000 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

On remarque aisément que :

Proposition 157. *Le dual du dual est le primal de départ. Autrement dit, le passage au dual est une opération* involutive*.*

8.2.2 Cas où le primal n'est pas écrit sous forme canonique

Quand le primal n'est pas écrit sous forme canonique, il faut d'abord le mettre en forme canonique, en utilisant les règles vue en §7.1.1

Exemple 158.

$$\begin{cases} \text{maximiser} & x_1 + x_2 + x_3 = \Pi \\ \text{sous les contraintes} & 2x_1 + 3x_2 - x_3 \leq 4 \\ & x_1 - 2x_2 + x_3 \geq 1 \\ & 6x_2 + 5x_3 = 6 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \ x_3 \text{ de signe quelconque} \end{cases}$$

Remarque 159. Ce qu'on vient de remarquer sur cet exemple est général :

- à toute contrainte représentée par une inéquation correspond une variable duale soumise à une condition de non-négativité, et réciproquement ;
- à toute contrainte représentée par une équation correspond une variable duale de signe quelconque, et réciproquement.

8.3 Théorème fondamental de la dualité

On peut démontrer que :

Théorème 160. *(Existence) Étant donnés un problème de programmation linéaire et son dual, une et une seule des trois affirmations suivantes est vraie :*

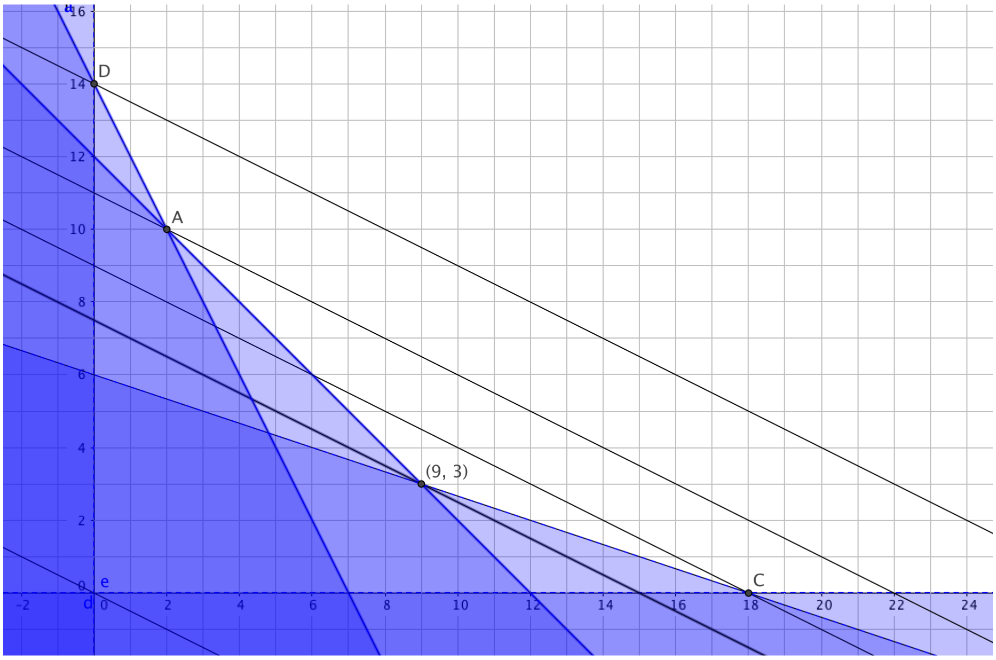
- *les deux problèmes sont impossibles (contraintes incompatibles) ;*
- *un problème est impossible, et l'autre a au moins un programme réalisable, mais n'admet pas de solution optimale (sa fonction objectif tend vers l'infini)*
- *les deux problèmes ont des programmes optimaux (finis).*

(Dualité) Si la troisième affirmation est vraie, alors ***la valeur optimale de la fonction objectif du primal est égale à la valeur optimale de la fonction objectif du dual****.*

Exemple 161. L'exemple du début §8.1 a comme valeur optimale $\tilde{\Pi} = 30$. Son problème dual a été écrit dans l'exemple 155. On remarque que le dual a 2 variables de décision, donc on peut le résoudre graphiquement :

$$\begin{cases} \text{minimiser} & 2x + 4y = c \\ \text{sous les contraintes} & 2x + y \geq 14 \\ & x + y \geq 12 \\ & x + 3y \geq 18 \\ & x \geq 0, y \geq 0. \end{cases}$$

Le graphique montre que la solution optimale est pour $(\tilde{y_1},\tilde{y_2}) = (9{,}3)$, et la valeur optimale de la fonction objectif est $\tilde{c} = 2 \times 9 + 4 \times 3 = 30$. Donc $\tilde{\Pi} = \tilde{c} = 30$, et le théorème est vérifié.



On remarque en passant, que la solution optimale du dual, $(\tilde{y_1},\tilde{y_2}) = (9{,}3)$, apparaît déjà dans le dernier tableau du simplexe du primal :

v_i	base	2nd-m	$-\Pi$	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	opération
	$-\Pi$	-30	1	-7	0	0	$\boxed{-9}$	$\boxed{-3}$	$L_0 - 7L_1$

Ce fait, qui est vrai en général, sera énoncé par la proposition 172

8.4 Résolution du primal par l'intermédiaire du dual

Les liens qui existent entre le programme primal et son dual sont bien plus nombreux que le théorème 160. En effet, il y a une relation de complémentarité entre les variables de décision d'un programme et les variables d'écart de son dual.

Remarque 162 (Notation). Pour bien distinguer les variables du problème primal et dual, on note :

$x_1,x_2,\ldots$	les variables de décision du primal	$y_1,y_2,\ldots$	les variables de décision du dual
$s_1,s_2,\ldots$	les variables d'ecart du primal	$t_1,t_2,\ldots$	les variables d'écart du dual

Théorème 163. *Soit $\mathcal{P}$ un programme primal admettant une solution optimale, et soit $\mathcal{P}'$ le programme dual. Dans la solution optimale accessible :*

- *si une variable* de décision x_i *du primal prend une valeur non nulle, alors la variable* d'écart *correspondante* t_i *du programme dual à nécessairement une valeur optimale égale à zéro.*
- *Vice-versa, si une variable d'écart du primal* s_i *prend (à l'optimum) une valeur non nulle, alors la variable de décision correspondante* y_i *du programme dual a nécessairement une valeur optimale égale à zéro.*

Grâce au théorème 163, la solution d'un problème fournit aussi la solution complète de l'autre. Cela a les avantages suivants :

1. En passant par le dual, on peut résoudre les problèmes de minimisation en termes de maximisation, ce qui est plus facile si on doit se servir de la méthode du simplexe.
2. Dans les exercices, si le primal a deux contraintes, le dual aura deux variables de décision, donc il peut être résolu par voie graphique.

Exemple 164. Le problème primal de la semaine dernière

$$\begin{cases} \text{maximiser} & 14x_1 + 12x_2 + 18x_3 = \Pi \\ \text{sous les contraintes} & 2x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 2 \\ & x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 4 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

Pour illustrer le théorème 163 nous allons :

1. d'abord résoudre le primal par la méthode du simplexe et en déduire une solution du dual ;
2. puis résoudre le dual (graphiquement) et en déduire une solution du primal.

Nous avons déjà résolu le primal par la méthode du simplexe : le primal en forme standard s'écrit

$$\begin{cases} \text{maximiser} & 14x_1 + 12x_2 + 18x_3 = \Pi \\ \text{sous les contraintes} & 2x_1 + x_2 + 3x_3 + s_1 = 2 \\ & x_1 + x_2 + 3x_3 + s_2 = 4 \\ & x_1,\, x_2,\, x_3,\, s_1,\, s_2 \geq 0 \end{cases}$$

Le simplexe donne une valeur optimale $\tilde{\Pi} = 30$ et une solution optimale

$$\begin{cases} \tilde{x_1} = 0 \\ \tilde{x_2} = 1 \\ \tilde{x_3} = 1 \\ \tilde{s_1} = 0 \\ \tilde{s_2} = 0 \end{cases}$$

Le dual s'écrit :

$$\text{en forme canonique}\left\{\begin{array}{rc}\text{minimiser} & 2y_1+4y_2=c\\ \text{sous les contraintes} & 2y_1+y_2\geq 14\\ & y_1+y_2\geq 12\\ & y_1+3y_2\geq 18\\ & y_1\geq 0, y_2\geq 0.\end{array}\right.$$

$$\text{et en forme standard}\left\{\begin{array}{rc}\text{minimiser} & 2y_1+4y_2=c\\ \text{sous les contraintes} & 2y_1+y_2-t_1=14\\ & y_1+y_2-t_2=12\\ & y_1+3y_2-t_3=18\\ & y_1,\, y_2,\, t_1,\, t_2,\, t_3\geq 0\end{array}\right. \tag{8.5}$$

Par le théorème 160, le dual a une solution optimale, et sa valeur optimale est la même, $\tilde{c}=30$.

Pour trouver une solution optimale du dual, on applique le théorème 163 :

- parmi les variables de décision du primal, $\tilde{x_1}=0$ et $\tilde{x_2}$, $\tilde{x_3}\neq 0$. Alors, parmi les variables d'écart du dual, $\tilde{t_1}\neq 0$ et $\tilde{t_2}=\tilde{t_3}=0$.
- les variables d'écart s_1 et s_2 du primal sont nulles à l'optimum, donc les variables de décision y_1 et y_2 du dual sont non nulles à l'optimum.

Donc $\tilde{t_2}=\tilde{t_3}=0$: on les remplace dans le dual, et on trouve le système linéaire

$$\begin{cases}2y_1+y_2-t_1=14\\ y_1+y_2=12\\ y_1+3y_2=18\end{cases} \tag{8.6}$$

dont la solution est vite calculée : $y_1=9$, $y_2=3$, $t_1=7$, ce qui concorde avec la solution graphique.

Le même procédé peut s'appliquer dans l'autre sens, à savoir déterminer la solution optimale du dual et en déduire la solution optimale du primal : la solution du dual a été trouvée graphiquement : $y_1=9$, $y_2=3$. Du problème en forme standard

$$\left\{\begin{array}{rc}\text{minimiser} & 2y_1+4y_2=c\\ \text{sous les contraintes} & 2y_1+y_2-t_1=14\\ & y_1+y_2-t_2=12\\ & y_1+3y_2-t_3=18\\ & y_1,\, y_2,\, t_1,\, t_2,\, t_3\geq 0\end{array}\right.$$

on déduit $t_1=7$, $t_2=t_3=0$. Appliquons le théorème 163 :

- les variables de décision du dual y_1 et y_2 sont non nulles à l'optimum, alors les variables d'écart du primal sont nulles : $s_1=s_2=0$.

- parmi les variables d'écart du dual, $t_1 \neq 0$, et $t_2 = t_3 = 0$. Alors parmi les variables de décision du primal, $x_1 = 0$, et x_2,$x_3 \neq 0$.

On remplace $s_1 = s_2 = x_1 = 0$ dans le système des contraintes, on trouve

$$\begin{cases} x_2 + x_3 = 2 \\ x_2 + 3x_3 = 4 \end{cases} \tag{8.7}$$

dont la solution est bien $\tilde{x_2} = 1$ et $\tilde{x_3} = 1$.

En conclusion, la connaissance de la solution du primal donne la solution du dual, et inversement.

Un autre exemple Le tout premier exemple de PL, au début du chapitre 7 :

Exemple 165. Un fabricant produit des tables et des bureaux. Chaque table nécessite 2,5 heures pour l'assemblage (A), 3 heures pour le polissage (P) et 1 heure pour la mise en caisse (C). Chaque bureau exige 1 heure pour l'assemblage, 3 heures pour le polissage et 2 heures pour la mise en caisse. L'entreprise ne peut disposer, chaque semaine, de plus de 20 heures pour l'assemblage, de 30 heures pour le polissage, et de 16 heures pour la mise en caisse. Sa marge de profit est de 3 euros par table et de 4 euros par bureau.

Quelle est la combinaison des produits qui maximisera les profits hebdomadaires de l'entreprise ?

Le problème en forme canonique est le suivant :

$$\begin{cases} \begin{array}{rc} \text{maximiser} & 3x_1 + 4x_2 = \Pi \\ \text{sous les contraintes} & 2{,}5x_1 + x_2 \leq 20 \\ & 3x_1 + 3x_2 \leq 30 \\ & x_1 + 2x_2 \leq 16 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{array} \end{cases}$$

Nous avons résolu ce problème au chapitre 7 par méthode graphique : la solution est $(\tilde{x_1},\tilde{x_2}) = (4{,}6)$ et $\Pi = 36$. Puis au chapitre 8 nous avons résolu ce même problème par la méthode du simplexe : nous avons écrit le problème en forme standard :

Maximiser Π

$$\begin{cases} \begin{array}{rrrrrrrrrl} -\Pi & +3x & + & 4y & & & & & = & 0 \\ & 2{,}5x & + & y & + & s_1 & & & = & 20 \\ & 3x & + & 3y & & & + s_2 & & = & 30 \\ & x & + & 2y & & & & + s_3 & = & 16 \end{array} \end{cases} \tag{8.8}$$

$x,\ y,\ s_1,\ s_2,\ s_3 \geq 0.$

Avec la méthode du simplexe (voir fin du chapitre 8) nous avons retrouvé la solution optimale qui est

$$\begin{cases} \tilde{x_1} = 4 \\ \tilde{x_2} = 6 \\ \tilde{s_1} = 4 \\ \tilde{s_2} = 0 \\ \tilde{s_3} = 0 \end{cases}$$

Avec la solution du primal, nous voulons déduire la solution du dual : le problème dual s'écrit

$$\begin{cases} \text{minimiser} & 20y_1 + 30y_2 + 16y_3 = c \\ \text{sous les contraintes} & 2{,}5y_1 + 3y_2 + y_3 \geq 3 \\ & y_1 + 3y_2 + 2y_3 \geq 4 \\ & y_1 \geq 0, y_2 \geq 0,\ y_3 \geq 0 \end{cases}$$

en forme canonique :

$$\begin{cases} \text{minimiser} & 20y_1 + 30y_2 + 16y_3 = c \\ \text{sous les contraintes} & 2{,}5y_1 + 3y_2 + y_3 - t_1 = 3 \\ & y_1 + 3y_2 + 2y_3 - t_2 = 4 \\ & y_1,\ y_2,\ y_3,\ t_1,\ t_2 \geq 0 \end{cases}$$

Appliquons le théorème 163 :

- $\tilde{x_1} = 4 \neq 0$ et $\tilde{x_2} = 6 \neq 0$ donc $\tilde{t_1} = \tilde{t_2} = 0$
- $\tilde{s_1} = 4$ donc $\tilde{y_1} = 0$; $\tilde{s_2} = \tilde{s_3} = 0$ donc $\tilde{y_2}$ et $\tilde{y_3}$ sont non nuls.

On remplace $t_1 = t_2 = y_1 = 0$ dans le système des contraintes du dual, on trouve

$$\begin{cases} 3y_2 + y_3 = 3 \\ 3y_2 + 2y_3 = 4 \end{cases} \tag{8.9}$$

dont la solution est $\tilde{x_3} = 1$ et $\tilde{x_2} = \frac{2}{3}$. La solution optimale du dual est la solution optimale qui est

$$\begin{cases} \tilde{y_1} = 0 \\ \tilde{y_2} = \frac{2}{3} \\ \tilde{y_3} = 1 \\ \tilde{t_1} = 0 \\ \tilde{t_2} = 0 \end{cases}$$

Encore un fois, remarquons que la solution du dual apparaît dans le dernier tableau du simplexe du primal (fin chapitre 8), à la ligne de Π.

8.5 Desserrement des contraintes et Valeurs marginales

8.5.1 Contraintes saturées

Considérons à nouveau le problème "production de tables et bureaux" de la section précédente. Le problème primal comporte trois contraintes :
- la contrainte "20 heures d'assemblage"
- la contrainte "30 heures de polissage"
- la contrainte "16 heures de mise en caisse"

Définition 166. Une contrainte est dite *saturée* si à l'optimum la variable d'écart correspondante est nulle, c-a-d si cette contrainte est satisfaite avec une égalité.

Dans notre exemple, à l'optimum
- $s_1 = 4$: cela signifie que la production optimale n'utilise pas entièrement les 20 heures d'assemblage disponibles, mais seulement 20-4=16. Donc la contrainte des heures d'assemblage n'est pas saturée.
- $s_2 = s_3 = 0$: cela signifie que la production optimale utilise entièrement les 30 heures de polissage et les 16 heures de mise en caisse. Ces facteurs de productions sont épuisés à l'optimum, et les deux contraintes sont saturées.

Exemple 167. L'exemple du début du chapitre §8.1 : la solution optimale étant $(\tilde{x_1},\tilde{x_2},\tilde{x_3}) = (0,1,1)$, avec des variables d'écart $(\tilde{s_1},\tilde{s_2}) = (0,0)$: cela signifie que les deux contraintes sont saturées.

8.5.2 Valeurs marginales

Toujours dans l'exemple tables-bureaux :

Exemple 168. La dernière ligne du simplexe nous dit qu'à l'optimum

$$\Pi = 36 - 0s_1 - \frac{2}{3}s_2 - s_3 \tag{8.10}$$

On en déduit que :
- si s_2 passe de 0 (qui est sa valeur en ce moment car s_2 est hors base) à 1, Π diminue de $\frac{2}{3}$. Vice-versa, si s_2 devient -1, alors Π augmente de $\frac{2}{3}$. Traduction concrète : si l'on *desserre* la contrainte « 30 heures de polissage », en ajoutant une heure disponible pour la porter à 31 (par exemple en agrandissant l'atelier ou en augmentant la main d'oeuvre), alors le profit maximal Π augmentera de $\frac{2}{3}$, et il sera $36 + \frac{2}{3} = 36{,}67$.

Définition 169. La *valeur marginal* (ou *prix marginal*) d'une contrainte est l'amélioraton maximale de la valeur de la fonction objectif, par rapport à une solution optimale, qui résulte d'un desserrement d'une unité de la contrainte.

Cette définition n'est valable que pour les contraintes définies par une inégalité, auxquelles sont associées des variable d'écart. On parle aussi de la valeur marginale d'une variable d'écart.

Exemple 170. Ainsi, dans l'exemple précédent,

- la valeur marginale de la contrainte « assemblage » est 0 ; on dit aussi que la valeur marginale de s_1 est 0.
- la valeur marginale de la contrainte « polissage » est $\frac{2}{3}$. on dit aussi que la valeur marginale de s_2 est 2/3.
- la valeur marginale de la contrainte « mise en caisse » est 1. on dit aussi que la valeur marginale de s_3 est 1.

Remarque 171. Les valeurs marginales des contraintes sont fournies par les opposés des coefficients de la fonction objectif dans le tableau du simplexe correspondant à une solution optimale.

Proposition 172. *À l'optimum,*

1. *la valeur absolue d'une variable de décision du dual est égale à celle de la valeur marginale de la variable d'écart associée du primal.*
2. *la valeur optimale de la fonction objectif est égale à la somme des produits des ressources (les seonds membres des contraintes) par leurs valeurs marginales.*

8.6 Interprétation de la dualité

Les programmes lineaires que nous avons vus ont un sens économique, tandis que leurs problemes duaux ont été définis à l'aide d'une formulation mathématique. Cependant, ces problèmes duaux peuvent recevoir une interprétation économique, bien qu'elle ne soit pas toujours simple à exprimer. Nous allons voir quelques cas classiques :

8.6.1 Production utilisant des ressources données et maximisant le bénéfice

Par exemple, le problème "tables/bureaux" traité ci-dessus. Dans le primal, les variables x_1 et x_2 sont des quantités, des niveaux de production. Dans le dual, les variables y_1, y_2 et y_3 seront des prix.

On peut interpreter le dual de la façon suivante : c'est le problème que se pose un autre fabricant qui veut louer (s'il s'agit de matériels, ateliers, heures de travail etc) ou acheter (s'il s'agit de matières premières) les moyens de production du premier fabricant, de façon à

- minimiser sa dépense c
- désintéresser le premier industriel de toute production.

Dans ce but, le second fabricant offre des prix de location y_1, y_2, y_3 (ici location à l'heure) pour, respectivement, une heure d'assemblage, une heure de polissage et une heure de mise en caisse, tels que

- sa dépense totale $c = 20y_1 + 30y_2 + 16y_3$ soit minimale ;
- mais qui puissent être intéressants pour le premier fabricant, le prix de la location étant au moins égal à son bénefice en cas de production, ce qui donne

$$\begin{cases} \text{minimiser} & 20y_1 + 30y_2 + 16y_3 = c \\ \text{sous les contraintes} & 2{,}5y_1 + 3y_2 + y_3 \geq 3 \\ & y_1 + 3y_2 + 2y_3 \geq 4 \\ & y_1 \geq 0, y_2 \geq 0,\ y_3 \geq 0 \end{cases}$$

soit précisément le dual.

8.6.2 Régime alimentaire du moindre coût

Exemple 173. Un éleveur souhaite que son troupeau consomme la plus faible ration quotidienne de trois éléments nutritifs A, B et C. Il faut bien sûr satisfaire les exigences nutritives quotidiennes, qui sont de 14 unités de A, 12 unités de B et 18 unités de C. L'éleveur peut choisir entre deux produits alimentaires : une unité du produit 1, qui coûte 2 euros, contient deux unités de A, une unité de B et une unité de C ; une unité du produit 2, qui coûte 4 euros, contient une unités de A, une unité de B et trois unités de C. Quelle est la combinaison la moins coûteuse de ces deux produits, qui respecte l'exigence de consommation minimale d'éléments nutritifs ? *Réponse :*

La fonction objectif à minimiser est

$$c = 2x_1 + 4x_2$$

avec les contraintes :

- Contrainte sur A : $2x_1 + x_2 \geq 14$
- Contrainte sur P : $x_1 + x_2 \geq 12$
- Contrainte sur C : $x_1 + 3x_2 \geq 18$
- Contraintes de non-négativité : $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$.

Les contraintes techniques s'écrivent $\geq$ parce qu'il faut respecter les exigences de consommation minimales, mais que celles-ci peuvent être dépassées.

Dans le primal, les variables de décision x_1 et x_2 sont des quantités. Dans le dual, les variables y_1, y_2, y_3 sont des prix.

Le dual est le problème d'un fabricant de produits de synthèse qui propose à l'éleveur les éléments nutritifs A, B et C aux prix unitaires y_1, y_2 et y_3 en quantités correspondant aux besoins minimaux. Ce fabricant cherche à maximiser son chiffre d'affaires $\Pi = 14y_1+12y_2+18y_3$ tout en offrant des prix raisonnables pour l'éleveur, c-a-d que les équivalents nutritifs des produits 1 et 2 ne devront pas coûter plus cher que le prix commercial de ces produits. Donc

$$\left\{\begin{array}{rc} \text{maximiser} & 14y_1 + 12y_2 + 18y_3 = \Pi \\ \text{sous les contraintes} & 2y_1 + y_2 + y_3 \leq 2 \\ & y_1 + 1y_2 + 3y_3 \leq 4 \\ & y_1 \geq 0, y_2 \geq 0,\ y_3 \geq 0 \end{array}\right.$$

soit précisément le dual.

8.6.3 Lien entre valeurs marginales et problème dual

- Quand une variable d'écart n'est pas nulle à l'optimum (contrainte non saturée) le desserrement d'une unité de la contrainte n'aura aucune influence sur la fonction objectif. Dans ce cas, la valeur marginale de la variable d'écart est nulle.
- Par contre, si une variable d'écart est nulle dans le programme optimal, c'est que la contrainte correspondante constitue une goulot d'étranglement de la production (contrainte non saturée). Dans ce cas, une desserrement de la contrainte aura un effet bénéfique sur la fonction économique, et la valeur marginale de la variable d'écart sera non nulle.

8.6.4 Production utilisant des ressources données et maximisant le bénéfice : un autre exemple

Le problème primal Un fabricant de chaînes stéréo en produit trois modèles : Budget, Mid-range et Splurge. Le bénéfice réalisé sur chacun est respectivement de 15, 20 et 24 euros. Le modèle Budget nécessite trois heures d'installation électrique et une heure d'enchâssement. Le modèle Mid-range nécessite une heure d'installation électrique et cinq heures d'enchâssement. Le modèle Splurge demande trois heures d'installation électrique et deux heures d'enchâssement.

Le fabricant dispose de 120 heures pour l'installation électrique et de 60 heures pour l'enchâssement.

Quel est le programme de production qui maximise le bénéfice en respectant les contraintes ?

Le problème dual Un deuxième fabricant souhaite louer les moyens de production du premier fabricant. La question est de savoir quels sont les meilleurs prix raisonnables, pour une heure d'installation électrique et une heure d'enchâssement, que le deuxième fabricant peut proposer premier, de façon à minimiser sa dépense totale et en même temps désintéresser le premier fabricant de toute production.

8.6.5 Outils informatiques

8.6.5.1 Site n. 1

`http://www.simplex-m.com/#`

8.6.5.2 Site n. 2

`http://www.phpsimplex.com/simplex/simplex.htm?l=en`

8.6.5.3 Wolfram Alpha

`https://www.wolframalpha.com/`

8.6.5.4 Excel

Installer le Solver

8.6.6 Autres problèmes modélisables par la PL

8.6.6.1 Une histoire de fromage

Le problème primal Une laiterie s'est spécialisée dans deux fromages. Le premier est un AOC qui exige plus d'heures de travail et un lait en provenance d'une région bien précise. Le second demande moins de travail, et peut être fabriqué avec n'importe quel lait. Par contre sa vente dégage une marge moindre. La laiterie dispose de 21 000 heures de travail annuel, elle reçoit 4 millions de litres de lait de la zone AOC, et 6 millions de litres d'autres zones. Le tableau suivant indique les ressources nécessaires pour produire 1 tonne de fromage.

Fromage	heures de travail par tonne de fromage	litres de lait par tonne de fromage
Fromage 1 (AOC)	30 h	10000 l
Fromage 2	15 h	7500 l

Sachant qu'un kilo du fromage AOC dégage une marge de 3 euros et qu'un kilo de l'autre fromage seulement 1 euro, quelle production doit fabriquer cette laiterie pour optimiser ses bénéfices ?

Le problème dual Formulez et résolvez le problème dual.

8.6.6.2 Un problème d'électricité

Un revendeur d'électricité a promis à sa clientèle qu'au moins 25% de son électricité serait d'origine renouvelable. Il a calculé que pour l'année qui arrive il aura un marché de 18 TWh (térawattheure). Il a aussi présélectionné trois fournisseurs à qui il va acheter son électricité en gros. Voici les quantités (en TWh), le taux d'électricité renouvelable et la marge dégagée (en k euro/TWh) que peuvent lui fournir ces trois producteurs.

Producteur	% électricité renouvelable	quantité achetable en TWh	Marge (Euro / TWh)
Producteur 1	10%	25	900
Producteur 2	46%	6	700
Producteur 3	100%	4	500

Chez quels producteurs et en quelle quantité ce revendeur doit-il acheter son électricité pour avoir le meilleurs bénéfice possible ?

Formulez et résolvez le problème dual.

Bibliographie

[1] Daniel Fredon, *mathématique, économie, gestion*, cedic, 1976.

[2] Louis Esch, *Mathématique pour économistes et gestionnaires*, de boek, 2010.

[3] G. Cullmann, *Recherche opérationnelle, théorie et pratique*, Masson et Cie, 1970.

[4] Edward T. Dowling, *Mathématiques pour l'économiste*, McGraw-Hill, 1995.