

L2 Gestion, 2014 - 2015

Statistique

Examen du 11 mai 2015

Durée : 2 heures

L'objectif ici n'est pas de tout traiter mais, d'en couvrir une part significative de manière convaincante. Les réponses devront être soigneusement argumentées et justifiées. Les points 1. et 2. de l'exercice sont indépendants. Vous pourriez vous servir de la table de la loi normale se trouvant à la page 3.

Exercice (9 pts)

1. Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires discrètes dont la loi est donnée par le tableau

X \ Y	-1	0	1
-1	1/8	1/16	2a
0	1/8	1/8	1/8
1	1/8	a	1/8

où $a \in]0, 1[$.

- Déterminer a et ainsi que les lois marginales de X et Y .
 - Calculer $Cov(X, Y)$.
 - Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes?
2. Dans un pays, on s'intéresse à la proportion p d'entreprises qui ont respecté ou dépassé les prévisions de bénéfice l'année précédente. On a trouvé 104 sur un échantillon de 162 entreprises.
- Déterminer un intervalle de confiance de niveau 0,95 pour p .
 - Quelle taille minimale d'échantillon doit-on avoir si l'on souhaite que l'amplitude de cet intervalle soit inférieure à 0.1?

Problème (14 pts)

Une entreprise a passé une importante commande de pièces chez un sous-traitant. La hauteur d'une pièce doit être de 400 millimètres. On désigne par X la variable aléatoire égale à la hauteur d'une pièce prélevée au hasard dans la livraison. On sait que X suit la loi normale de moyenne m (inconnue) et d'écart type $\sigma = 5$. Soit (X_1, \dots, X_n) un n -échantillon ($n \geq 1$) issu de X . On pose

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \text{ et } Z_n = \frac{X_1 + X_n}{2}.$$

Partie A : Estimation

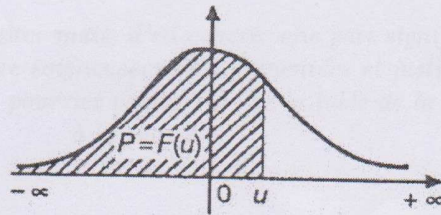
1. (a) Déterminer $E(\bar{X}_n)$, $Var(\bar{X}_n)$, $E(Z_n)$ et $Var(Z_n)$.
 (b) En déduire les lois de \bar{X}_n et Z_n .
2. Montrer que \bar{X}_n est un estimateur sans biais et convergent de m .
3. Montrer que Z_n est un estimateur sans biais de m .
4. (a) Déterminer l'erreur quadratique moyenne de l'estimation de m par \bar{X}_n .
 (b) Déterminer l'erreur quadratique moyenne de l'estimation de m par Z_n .
5. Lequel des deux estimateurs \bar{X}_n et Z_n , qu'auriez-vous conseillé à l'entreprise?

Partie B : Test de conformité

L'entreprise souhaite construire un test d'hypothèse bilatéral pour contrôler, au moment de la livraison, la moyenne m de l'ensemble des hauteurs, des pièces.

1. Formuler les hypothèses (nulle et alternative) permettant de tester que les hauteurs sont en moyenne égales à 400 millimètres.
2. Déterminer la valeur de la statistique du test et ainsi que la région critique à un seuil α .
3. Sur un échantillon de 100 pièces livrées, la moyenne empirique des hauteurs des pièces est $\bar{x} = 399,12$. Peut-on, au seuil de 5%, conclure que la livraison est conforme pour la hauteur?

Fonction de répartition de la loi normale centrée réduite
 Probabilité $F(u)$ d'une valeur inférieure à u



u	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9779	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986

Tables pour les grandes valeurs de u

u	3,0	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6	3,8	4,0	4,5
$F(u)$	0,99865	0,99904	0,99931	0,99952	0,99966	0,99976	0,999841	0,999928	0,999968	0,999997