/ (2) L2 05-2014

Université de Cergy-Pontoise *UFR économie et gestion*

L2 Gestion, 2013 - 2014

Statistique
Examen du 05 mai 2014
Durée : 2 heures

L'objectif ici n'est pas de tout traiter mais, d'en couvrir une part significative de manière convaincante. Les réponses devront être soigneusement argumentées et justifiées. Les points 1. *et* 2. *de l'exercice sont indépendants. Vous pourriez vous servir de la table de la loi normale se trouvant à la page* 3.

Exercice (12 pts)

1. Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires discrètes dont la loi est donnée par le tableau

Y \ X	0	1	2
1	1/12	0	1/12
2	$2a$	1/12	1/12
3	3/12	2/12	a

où $a \in]0, 1[$.

   (a) Déterminer a.

   (b) Déterminer les lois marginales de X et Y. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes?

   (c) Déterminer la loi conditionnelle de Y sachant $X = 0$. Comparer cette loi à la loi marginale de Y. Y a-t-il contradiction avec la réponse sur l'indépendance de la question (b) ?

2. Dans un pays, la facture moyenne des ménages s'élève à 32, 79€ . On désigne par X la variable aléatoire égale au montant de facture de ménage dans une région A. Sur un échantillon de taille 50 issu de X, on a observé une moyenne empirique $\overline{x} = 30,63$. On pose $m = E(X)$. On sait par des études antérieures que $\text{Var}(X) = 31,36$.

   (a) Déterminer un intervalle de confiance de niveau $0,95$ pour m.

   (b) Formuler les hypothèses (nulle et alternative) qui permettront de déterminer si la facture mensuelle dans la région A est inférieure à la moyenne nationale.

   (c) Déterminer la valeur de la statistique du test et ainsi que la conclusion au seuil $\alpha = 0,05$.

Problème (13 pts)

On fait l'hypothèse que la durée de vie X d'une ampoule électrique de marque A est une loi exponentielle de paramètre $\frac{1}{\theta}$ avec $\theta > 0$. Ainsi, $E(X) = \theta$. θ est un paramètre inconnu qu'une association de consommateurs souhaite estimer. Elle achète donc n ampoules de la marque et mesure leurs durées de vie $(x_1, \cdots, x_n)$ qui est une réalisation du n-échantillon $(X_1, \cdots, X_n)$ issu de X.

1. On désigne par f et F respectivement la densité et la fonction de répartition de X.

(a) Rappeler l'expression de f.

(b) Déterminer F.

2. On admet que l'estimateur du maximum de vraisemblance (EMV) de θ est $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$. Montrer que cet estimateur est sans biais.

3. On pose $m_n = \min_{1 \leq i \leq n} X_i$.

   (a) Exprimer la fonction de répartition de m_n en fonction de F. En déduire la densité de m_n.

   (b) Quelle est la loi de m_n? En déduire son espérance et sa variance.

4. On suppose que m_n suit une loi exponentielle de paramètre n/θ.

   (a) On rappelle alors que $E(m_n) = \theta/n$. En déduire un estimateur sans biais de θ. Déterminer la variance de cet estimateur.

   (b) Entre cet estimateur et l'EMV de θ, qu'auriez-vous conseillé à l'association?

5. Deux mois, soit environ 1400 heures après le début du test, le cabinet auquel le travail a été confié envoi les résultats suivants : la durée de vie moyenne d'une ampoule de marque A, estimée à l'aide d'essais sur cent ampoules, est de 110000 heures. A votre avis, lequel des deux estimateurs ci-dessus (l'EMV et celui trouvé au 4.) a été utilisé ?