UNIVERSITÉ DE CERGY

Année 2013 - 2014

LICENCE d'ÉCONOMIE FINANCE et GESTION

Première année - Semestre 2

Fonctions de plusieurs variables - Livret d'exercices II

Chapitre IV - Différentiabilité

Exercice I

Calculer les dérivées partielles d'ordre un des fonctions suivantes

a) $f_1 \ : \ (x,y) \mapsto 2\ln x - 5\ln y$; *b)* $f_2 \ : \ (x,y) \mapsto 5x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{4}{5}}$

c) $f_3 \ : \ (x,y) \mapsto 5xy^2 + e^{2x-y}$; *d)* $f_4 \ : \ (x,y) \mapsto (2x^2 - 5y)^3$

e) $f_5 \ : \ (x,y) \mapsto y.\exp(x^2)$; *f)* $f_6 \ : \ (x,y) \mapsto \dfrac{x + \ln y}{xy}$

Exercice II
Extrait du Test 2 de mars 2013

1. Donner la définition du vecteur gradient au point $M_0(x_0, y_0)$ (que l'on note $\overrightarrow{grad\ f}(M_0)$)
2. Donner un vecteur normal au plan tangent au graphe $\mathcal{G}_f$ de f au point $M_0'(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$, puis une équation cartésienne de ce plan tangent.
3. On considère la fonction f définie par : $f(x,y) = x^2 e^{x-y}$
   Donner une équation cartésienne du plan tangent à $\mathcal{G}_f$ au point $M_0'(1;1;1)$

Exercice III
Extrait du partiel d'avril 2013

Soit f une fonction définie sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^2$.

1. Rappeler la définition d'une fonction f homogène de degré k sur Ω.
2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2 \smallsetminus \{(Ox)\}$ par $f(x,y) = \dfrac{2x^3}{y}$
   Montrer que f est homogène de degré 2.
   Calculer $x\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$. Ce résultat était-il prévisible ?

Exercice IV

Soit f la fonction définie par $f(x,y) = \exp\left(\dfrac{x^2+y^2}{xy}\right)$

1. Déterminer le domaine de définition de f.
2. Montrer que pour tout $(x,y) \in D_f$ on a : $x.\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y.\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$. Ce résultat était-il prévisible ?

Exercice V

Soit f la fonction définie par $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$

1. Déterminer le domaine de définition de f.
2. Montrer que pour tout $(x, y) \in D_f$ on a : $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 0$

Exercice VI

Soient n un entier supérieur ou égal à 2 et f la fonction définie par $f(x, y) = \dfrac{x^n + y^n}{x + y}$

1. Déterminer le domaine de définition de f.
2. Montrer que f est homogène.
3. Pour quelle valeur de n, f est-elle homogène de degré 1 ? Vérifier l'identité d'Euler pour cette valeur de n.
4. On suppose dans cette question que $n = 2$ et on admet que f est de classe C^2 sur son domaine de définition. Montrer que pour tout $(x, y) \in D_f$:

$$\begin{cases} x.\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) + y.\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) &= 0 \qquad (1) \\ y\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) + x.\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) &= 0 \qquad (2) \\ y^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) - x^2.\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) &= 0 \qquad (3) \end{cases}$$

Indication : La question 4. peut être traitée sans utiliser la forme explicite de f.

Exercice VII

Soit Q une fonction de production de Cobb-Douglas définie par : $Q(K, L) = K^{\frac{1}{3}} \cdot L^{\frac{2}{3}}$

1. Calculer les productivités marginales $\dfrac{\partial Q}{\partial K}(K, L)$ et $\dfrac{\partial Q}{\partial L}(K, L)$.
2. Montrer que la fonction Q est homogène, puis vérifier l'identité d'Euler.
3. Donner l'équation de la tangente à la ligne de niveau 45 au point $M_0(K_0, L_0) = (125; 27)$.
4. Donner une valeur approchée de l'accroissement de production induit par un accroissement de $0,1$ du travail au point M_0.

Exercice VIII

Calculer la différentielle des fonctions suivantes :

$a)$ $f_1 \ : \ (x,y) \mapsto 2x^3 + x.y^2$ $\quad$ (df_1 en fonction de dx et de dy).

$b)$ $f_2 \ : \ (x,y) \mapsto \dfrac{x}{y^2}$ $\quad$ (df_2 en fonction de dx et de dy).

$c)$ $f_3 \ : \ (r,s) \mapsto \dfrac{rs}{r^2+rs}$ $\quad$ (df_3 en fonction de dr et de ds).

Exercice IX

Calculer la dérivée de la fonction z par rapport à t en utilisant le théorème de dérivation des fonctions composées :

1) $z(x,y) = x^2 + \dfrac{y}{x}$ avec $x = x(t) = e^t + t$ et $y = y(t) = t^2$

2) $z(x,y) = (\ln y)\, e^{x^2}$ avec $x = x(t) = 3t + 5$ et $y = y(t) = e^{4t}$

Exercice X

Calculer la différentielle de la fonction z en fonction de du et dv, puis en fonction de dr et ds.

$$z = z(u,v) = ue^v \text{ avec } u = u(r,s) = r^2 + s \quad \text{et } v = v(r,s) = s - r$$

Exercice XI

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = e^x - (x+2)y$

1. Déterminer le gradient de f.
2. Dans les questions 2. et 3. on suppose que le point $M(x,y)$ se déplace sur la ligne de niveau zéro :
   Justifier que la condition $M(x,y) \in I_f^0$ permet de définir implicitement y en fonction de x.
3. Calculer la dérivée de $y(x)$ par rapport à x de deux manières différentes.
4. Donner l'équation de la tangente à la ligne de niveau -1 au point $M_0(0;1)$.
5. Donner l'équation du plan tangent au graphe de f au point $M_0'(0;1;-1)$

Exercice XII

Soit z la fonction définie par $z(x,y) = f(x-y)$. Montrer que $\dfrac{\partial z}{\partial x} = -\dfrac{\partial z}{\partial y}$. ($f$ de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$)

Exercice XIII

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$. Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

$$g \ : \ g(x) = f(x,x) \quad \text{et } h \ : \ h(x) = f(x, f(x,x))$$

Vérifier votre résultat avec $f \ : \ f(x,y) = e^{2x} + y^3$

Chapitre V - Extrema - Convexité

Exercice I

1. Déterminer les coordonnées du barycentre G des points : $M_1(1;3)$, $M_2(-1;2)$, $M_3(3;-3)$ et $M_4(-6;5)$ affectés respectivement des coefficients $3;2;1$ et 4.
2. Déterminer les coordonnées du barycentre G des points : $M_1(1;-1;2)$, $M_2(-3;0;1)$ et $M_3(-1;2;2)$ affectés respectivement des coefficients $1;1$ et 3.

Exercice II

Le plan $\mathbb{R}^2$ étant muni d'un repère orthonormé,

1. Montrer que $E = \{M(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \, y \geq x^2\}$ est convexe.
2. Montrer que $D_r = \{M(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \, x^2 + y^2 \leq r^2\}$ est convexe.

Exercice III

Déterminer les intervalles de convexité des fonctions suivantes :

1. f_1 définie sur $\mathbb{R}$ par $f_1(x) = x^3 - 3x$
2. f_2 définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f_2(x) = \dfrac{\ln x}{x}$

Exercice IV

Soit $\alpha \in]0;1[$. Montrer que

$$\forall (x,y) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2, \; x^\alpha y^{1-\alpha} \leq \alpha x + (1-\alpha) y$$

a. En utilisant la concavité de la fonction logarithme népérien.
b. En utilisant la convexité de la fonction exponentielle.

Exercice V

Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer le vecteur gradient $\overrightarrow{grad} \, f(x,y)$, puis déterminer les points stationnaires en précisant leurs natures respectives :

1. $f_1 \; : \; f_1(x,y) = \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{4y^3}{3} - x^2 - 3x - 4y - 3$. (d'après le partiel d'Avril 2013)
2. $f_2 \; : \; f_2(x,y) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + xy$.

Exercice VI

Étudier la convexité des fonctions suivantes :

$f_1 \; : \; f_1(x,y) = 2x^2 + y^2$ $\qquad$ $f_2 \; : \; f_2(x,y) = x^4 + 6x^2y^2 + y^4$

Exercice VII
Extrait du partiel d'Avril 2013

Dans cet exercice on cherche à étudier les extrema éventuels de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - 4xy$$

Sous la contrainte

$$g(x, y) = x^2 + y^2 - 8 = 0$$

On note Γ la courbe d'équation $g(x, y) = 0$

1. Calculer les dérivées partielles premières de f et de g.
2. Déterminer les quatre points de la courbe Γ pour lesquels les vecteurs gradients $\overrightarrow{grad\, f}(x, y)$ et $\overrightarrow{grad\, g}(x, y)$ sont colinéaires.
3. On veut montrer que f atteint un minium relatif (sous la contrainte $g(x, y) = 0$) en $A(-2; -2)$.
   (a) Calculer $f(A)$.
   (b) Montrer que pour tout $M(x, y) \in \Gamma$, $f(x, y) - f(A) = 2(x - y)^2$.
   (c) Conclure.
4. *Question bonus :* Par une méthode analogue à la celle utilisée à la question précédente, montrer que f admet un maximum relatif (sous la contrainte $g(x, y) = 0$) en $B(-2, ; 2)$.

Exercice VIII

Montrer que le produit de deux nombres réels x et y, de somme S_0 donnée est maximal lorsque ces deux nombres sont égaux

Exercice IX

Étudier les extrema de f sous la contrainte $g(x, y) = 0$ dans les cas suivants :

1. $f(x, y) = 2x^2 + 2xy + y^2 - 6x - 2y - 3$ et $g(x, y) = x + y - 4$.
2. $f(x, y) = 10x^{\frac{1}{4}} + 2y^{\frac{1}{3}}$ et $g(x, y) = \dfrac{1}{4}\ln(x) + \dfrac{1}{3}\ln(y) - 3$

   (On pourra poser $X = x^{\frac{1}{4}}$ et $Y = y^{\frac{1}{3}}$)

UNIVERSITÉ DE CERGY — **Licence d'Économie et Gestion**

U.F.R. Economie et Gestion — **L1 - S2**

FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES

Partiel - Avril 2013 - 2 heures

Les exercices sont indépendants et peuvent être traités dans l'ordre choisi par le candidat.
Il sera tenu compte du soin apporté à la rédaction.
CALCULATRICES INTERDITES
LES PORTABLES DOIVENT ÊTRE DÉBRANCHÉS ET RANGÉS.

Exercice 1 - $2+3,5+0,5+2=8$ points

Les questions qui suivent peuvent être traitées indépendamment les unes des autres. Cependant c'est la même fonction qui intervient aux questions 2 et 3

1. Définir graphiquement une partie convexe Ω de $\mathbb{R}^2$. Faire une représentation graphique.

   Montrer par un calcul que $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / y \geq 0\}$ est convexe.
2. Soit f une fonction définie sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^2$.
   (a) Rappeler la définition d'une fonction f homogène de degré k sur Ω.
   (b) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(Ox)\}$ par $f(x,y) = \dfrac{2x^3}{y}$
   Montrer que f est homogène de degré 2.
   Calculer $x\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$. Ce résultat était-il prévisible ?
3. Déterminer la différentielle de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(Ox)\}$ par $f(x,y) = \dfrac{2x^3}{y}$
4. Soit f une fonction définie et de classe C^1 sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^2$ où les variables x et y sont des fonctions d'une variable t, définies et dérivables sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ tel que pour tout $t \in I$, $(x(t), y(t)) \in \Omega$. Soit F définie sur I par $F(t) = f(x(t), y(t))$

   Donner la formule de dérivation de F en fonction des dérivées partielles de f et des dérivées de x et y.

   Application : Soit f définie par $f(x,y) = x\sqrt{y}$ où $x = x(t) = t + \dfrac{1}{t}$ et $y = y(t) = t^2 + 1$. En utilisant la formule énoncée plus haut, déterminer la dérivée de F définie sur $\mathbb{R}^*$ par $F(t) = f(x(t), y(t))$ (on ne cherchera pas à simplifier l'expression de $F'(t)$)

Exercice 2 - 6,5 points

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{4y^3}{3} - x^2 - 3x - 4y - 3$

1. Calculer les dérivés partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$
2. En déduire que f admet quatre points stationnaires.
3. Calculer les dérivées partielles secondes puis déterminer la nature de chaque point stationnaire.

Exercice 3 - 6,5 points

Dans cet exercice on cherche à étudier les extrema éventuels de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$f(x,y) = x^2 + y^2 - 4xy$$

Sous la contrainte

$$g(x,y) = x^2 + y^2 - 8 = 0$$

On note Γ la courbe d'équation $g(x,y) = 0$

1. Calculer les dérivées partielles premières de f et de g.
2. Déterminer les quatre points de la courbe Γ pour lesquels les vecteurs gradients $\overrightarrow{grad\, f}(x,y)$ et $\overrightarrow{grad\, g}(x,y)$ sont colinéaires.
3. On veut montrer que f atteint un minium relatif (sous la contrainte $g(x,y) = 0$) en $A(-2;-2)$.
   (a) Calculer $f(A)$.
   (b) Montrer que pour tout $M(x,y) \in \Gamma$, $f(x,y) - f(A) = 2(x-y)^2$.
   (c) Conclure.
4. *Question bonus :* Par une méthode analogue à la celle utilisée à la question précédente, montrer que f admet un maximum relatif (sous la contrainte $g(x,y) = 0$) en $B(-2,;2)$.

lf

UNIVERSITÉ DE CERGY — **Licence d'Économie et Gestion**

U.F.R. Economie et Gestion — **L1 - S2**

FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES

Partiel - Seconde session - Juin 2013 - 2 heures

Les exercices sont indépendants et peuvent être traités dans l'ordre choisi par le candidat.
Il sera tenu compte du soin apporté à la rédaction.
CALCULATRICES INTERDITES
LES PORTABLES DOIVENT ÊTRE DÉBRANCHÉS ET RANGÉS.

Exercice 1 - 1 + 1,5 + 1,5 + 2 = 6 points

Les questions qui suivent sont indépendantes les unes des autres.

1. Soit f une fonction définie sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^2$ et $M_0(x_0, y_0) \in \Omega$.

   Donner la définition de la dérivée partielle première de la fonction f par rapport à la variable x au point M_0 (lorsqu'elle existe).

   Donner la définition de : « la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω ».

2. Soit f une fonction d'une variable définie sur un intervalle ouvert I. Donner la définition de : « f est une fonction concave sur I ».

   En supposant que f soit deux fois dérivable sur I, donner un critère simple de concavité.

   Dessiner à main levée la courbe d'une fonction concave sur $\mathbb{R}$.

3. Déterminer la différentielle au point $M_0(2; 1)$ de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0x)\}$ par $f(x, y) = \dfrac{3x}{y}$

4. Soit f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x, y) = x^2 + 2x - 3y$. Déterminer le vecteur gradient de f au point $M(1; 2)$ puis donner une équation cartésienne du plan tangent au graphe de f au point $M'(1; 2; -3)$

Exercice 2 - 5 points

Soit la fonction f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x, y) = (x + y)e^x - y$.

1. Calculer les dérivées partielles premières de f
2. Montrer que f admet exactement un point stationnaire.
3. Calculer les dérivées partielles secondes $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y)$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y)$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y)$ en un point quelconque $M(x, y)$.
4. En déduire la nature de ce point stationnaire.

Exercice 3 - 9 points

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x, y) = x^4 + x^2 + y^2 - 2xy$

1. Déterminer les dérivées partielles premières de f.
2. Justifier que f possède un unique point stationnaire.
3. Calculer les dérivées partielles secondes de f puis étudier la convexité de f. En déduire la nature du point stationnaire.
4. On cherche à optimiser f sous la contrainte :

   $$g(x, y) = x - y - 1 = 0$$

   on note Γ la courbe d'équation $g(x, y) = 0$

   (a) Première méthode :

   i. Calculer les dérivées partielles de g.

   ii. Montrer qu'il existe unique point A de Γ vérifiant la colinéarité des vecteurs gradients $\overrightarrow{grad}\, f(x, y)$ et $\overrightarrow{grad}\, g(x, y)$

   iii. Montrer que pour tout point (x, y) de Γ, $f(x, y) - f(0; -1) = x^4$

   En déduire que f admet un minimum relatif en $(0; -1)$ sous la contrainte $g(x, y) = 0$.

   (b) Seconde méthode : Justifier que la contrainte permet de définir implicitement y en fonction de x : on note : $y = \varphi(x)$. Etudier les variations de la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = f(x, \varphi(x))$ puis retrouver le résultat de la question précédente.

lf