Année 2013-2014

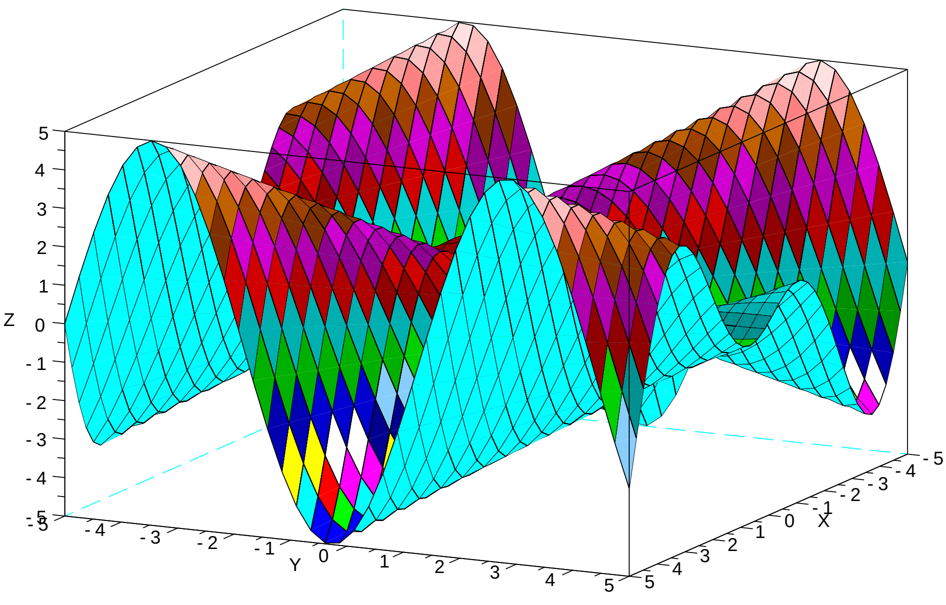
UNIVERSITÉ DE CERGY

UFR D'ECONOMIE ET DE GESTION

LICENCE d'ÉCONOMIE FINANCE et GESTION

Première année - Semestre 2

FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES



Équipe enseignante :

Enseignant responsable : M. Caleb Andrianasitera

M. J. Stéphan : cours

MM. Ch. Grzanka, Th. Homshaw

H. Moutima-Backenga, J.-P. Passy et H. Rajoharison : T.D.

Livret d'exercices I

Chapitre I : courbes et surfaces

Dans ce chapitre tous les repères $(O;\vec{i},\vec{j})$ et $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ considérés sont orthonormés.

Exercice I

On considère la droite $\mathcal{D}$ d'équation $2x+3y-5=0$.

1. Tracer $\mathcal{D}$ dans un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.
2. Donner un vecteur normal et un vecteur directeur de $\mathcal{D}$.
3. Donner une représentation paramétrique de $\mathcal{D}$.
4. Déterminer les coordonnées des points d'intersection de $\mathcal{D}$ avec les axes du repère.

Exercice II

1. Soient $A(1;-2)$ et $B(-1;2)$. Déterminer une équation cartésienne de la droite $\mathcal{D}$ passant par $C(1;-1)$ et orthogonale à la droite (AB), puis une représentation paramétrique de $\mathcal{D}$.
2. Les points $E(5;1)$ et $F(-1;2)$ appartiennent-ils à $\mathcal{D}$?
3. Donner une équation cartésienne de (AB). Déterminer les coordonnées du point d'intersection de (AB) et $\mathcal{D}$.

Exercice III

On considère le triangle OAB avec $A(3;0)$ et $B(0;2)$. Déterminer une équation de la hauteur $\mathcal{D}$ issue de 0, puis les coordonnées du point d'intersection H des droites $\mathcal{D}$ et (AB).

Exercice IV

Représenter graphiquement le domaine du plan $\mathbb{R}^2$ défini par le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2x+3y & < & 6 \\ y-x & < & 0 \\ y & > & -1 \end{array}\right.$$

Exercice V

1. Déterminer une équation cartésienne du cercle de centre $\Omega(-2;3)$ et de rayon 5.
2. Déterminer une équation cartésienne du cercle de diamètre $[AB]$ où $A(-1;5)$ et $B(3;-1)$.
3. Déterminer le centre et la rayon du cercle dont une équation est $x^2-x+y^2+3y=\dfrac{27}{2}$.

Exercice VI

Déterminer les coordonnées des points d'intersection du cercle $\mathcal{C}(O;6)$ de centre O et de rayon $R=6$ et de la première bissectrice du repère d'équation $y=x$.

Exercice VII

L'équation $x^2 + y^2 + 2y = m$ est-elle l'équation d'un cercle ? Pour quelle(s) valeur(s) de m est-ce l'équation d'un cercle passant par l'origine ?

Exercice VIII

Extrait du Test 1 de Février 2013 (3,5 points)

On considère la parabole $\mathcal{P}$ d'équation $x = y^2 + 6y + 5$

1. Déterminer les éléments caractéristiques de $\mathcal{P}$ (orientation, axe de symétrie, sommet, intersections avec les deux axes du repère).
2. Justifier que l'équation $(E)\ :\ F(x,y) = y^2+6y+5-x = 0$ ne permet pas de définir implicitement y en fonction de x.

Exercice IX

Extrait du Test 1 de Février 2012 (5 points)

Soit $\mathcal{H}$ la conique d'équation cartésienne : $x^2 - y^2 + 4y - 3 = 0$

1. Justifiez $\mathcal{H}$ est une hyperbole dont vous donnerez le centre Ω, les coefficients α et β, et les asymptotes.
2. Soit $\mathcal{C}$ le cercle de centre $I(0;3)$ et de rayon 2. Donner une équation cartésienne de $\mathcal{C}$.
3. Déterminer les coordonnées des points d'intersection de $\mathcal{H}$ et $\mathcal{C}$.

Exercice X

Extrait du Test 1 de Février 2013 (5 points)

On considère la conique $\mathcal{E}$ d'équation $(E)\ :\ 4x^2 - 16x + y^2 - 2y + 13 = 0$

1. Déterminer une équation cartésienne de $\mathcal{E}$: vous préciserez alors sa nature, son centre et ses coefficients.
2. Tracez $\mathcal{E}$ dans le repère joint en annexe.
3. Soit $\mathcal{D}$ la droite d'équation réduite $y = 2x - 1$: tracez $\mathcal{D}$ dans le repère.
4. Déterminer par un calcul les coordonnées des points d'intersections de $\mathcal{E}$ et $\mathcal{D}$.

Exercice XI

1. Déterminer une représentation paramétrique et une représentation cartésienne de la droite (AB) où $A(-2;1;3)$ et $B(2;3;1)$.
2. Déterminer une équation du plan médiateur au segment $[AB]$: c'est le plan orthogonal à la droite (AB) et passant par le milieu de $[AB]$.

Exercice XII

Déterminer un point et un vecteur directeur de la droite $\mathcal{D}$ dont un système d'équations cartésiennes est :

$$\begin{cases} x+y+z &= 3 \\ x+2y-z &= 0 \end{cases}$$

Exercice XIII

Soit $\mathcal{P}$ le plan d'équation cartésienne : $6x+3y+z=6$.

1. Donner trois points de $\mathcal{P}$.
2. Donner une représentation cartésienne de la droite passant par le point $A(1;1;1)$ et orthogonale à $\mathcal{P}$.
3. Donner les représentations cartésiennes de deux droites orthogonales et contenues dans $\mathcal{P}$.

Exercice XIV

Donner une représentation paramétrique de la droite $\mathcal{D}$ passant par $A(-3;2;1)$ et orthogonale au plan $\mathcal{P}$ d'équation $2x-y+z=5$. Justifier que $\mathcal{P}$ et $\mathcal{D}$ sont sécants en un point M dont vous donnerez les coordonnées.

Exercice XV

On considère les points $A(1;2;3)$ et $B(-1;3;m)$ (où $m \in \mathbb{R}$) et la droite $\mathcal{D}$ de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x &= 1+2t \\ y &= 3+t\ , \quad t \in \mathbb{R} \\ z &= -2+3t \end{cases}$$

1. Déterminer m de telle sorte que (AB) soit orthogonale à $\mathcal{D}$. Pour cette valeur de m, les droites (AB) et $\mathcal{D}$ sont-elles sécantes ?
2. Déterminer une équation du plan $\mathcal{P}$ orthogonal à (AB) et contenant $\mathcal{D}$.

Exercice XVI
Extrait du Test 1 de Février 2012 (6 points)

Soit $\mathcal{D}$ la droite dont une représentation paramétrique est :

$$\begin{cases} x &= t \\ y &= 2t-2 \quad , \ t \in \mathbb{R} \\ z &= -t+2 \end{cases}$$

1. Justifier que la point $A(1;0;1)$ appartient à $\mathcal{D}$.
2. Donner l'équation du plan $\mathcal{P}$ orthogonal à $\mathcal{D}$ et passant par A.
3. Soit $\mathcal{D}'$ La droite dont une représentation cartésienne est :

   $$\begin{cases} -2x+y+z+2 &= 0 \\ 3x-y+z-4 &= 0 \end{cases}$$

   Donner une représentation paramétrique de $\mathcal{D}'$.
4. Les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont-elles parallèles ? sécantes ? Justifiez !

Chapitre II
Généralités sur les fonctions de deux variables

Exercice I

Définir l'ensemble de définition des fonctions suivantes à l'aide d'équations et d'inéquations, puis le représenter en hachurant la partie du plan correspondante (préciser si les bords sont inclus ou non).

$$f_1(x,y) = \ln(2x+y-2) \quad ; \quad f_2(x,y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{\ln y} \quad ; \quad f_3(x,y) = \ln(y-x) + \frac{1}{x}$$

$$f_4(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2-y^2}} \quad ; \quad f_5(x,y) = \sqrt{x^2+y^2-1} + \sqrt{4-x^2-y^2}$$

Exercice II
Extrait du Test 1 de février 2012 (5 points)

Soit f la fonction définie par

$$f(x,y) = \sqrt{2x+y+1} + \ln(-x-y^2+2y+3)$$

Déterminer le domaine de définition de la fonction f et le représenter avec soin dans un repère orthonormé (hachurer la partie du plan qui **N'est PAS** dans le domaine)

Vous devez expliquer précisément la construction des deux « courbes » qui bordent le domaine et vous préciserez les coordonnées des points d'intersection de ces deux courbes.

Exercice III

Déterminer le degré d'homogénéité des fonctions suivantes :

$$f_1(K,L) = K^\alpha L^{1-\alpha} \quad ; \quad f_2(P,Q) = \frac{P^2+QP}{P+Q} \quad ; \quad f_3(x,y) = \sqrt{x^4+y^4+x^2y^2}$$

Exercice IV

Etudier si les relations suivantes définissent implicitement $x(y)$ (c.a.d. x en fonction de y) ou $y(x)$ (c.a.d. y en fonction de x) :

$$a)\ x^2-y^2=1 \quad ; \quad b)\ y^2-xy=1 \quad ; \quad c)\ \frac{2x+y}{xy^2}=2$$

Exercice V

Déterminer les courbes de niveau des fonctions suivantes :

$f_1(x,y) = \sqrt{xy} \quad ; \quad f_2(x,y) = 2x^2 + 3y^2 \quad ; \quad f_3(x,y) = y^2 - x^2$

Exercice VI
Extrait du Test 2 de Mars 2013 (3,5 points)

Soit f une fonction définie sur $D_f \subset \mathbb{R}^2$.

1. Donner la définition de la courbe de niveau $k \in \mathbb{R}$ de f.
2. On considère la fonction f définie par :

$$f(x,y) = \frac{2x^2 + 2x}{x^2 - y^2}$$

Définir puis représenter l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ de f (le plan étant muni d'un repère orthonormé d'unité 2 cm (ou 2 carreaux))

Définir précisément la courbe de niveau 1, notée L_1, puis représenter L_1 sur le graphique précédent.

Exercice VII

Représenter la ligne de niveau k de la fonction f suivante dans les cas suivants :

$f_1(x,y) = 2x + 3y \qquad$ pour $k = 1; k = 2;$ et $k = -1$

$f_2(x,y) = \ln(x+y) \qquad$ pour $k = 1$ et $k = -1$

$f_3(x,y) = 4x^2 + 25y^2 \qquad$ pour $k = 100$

$f_4(x,y) = \exp\left(\dfrac{x^2 - x}{y - y^2}\right) \qquad$ pour $k = e$

Exercice VIII
Extrait du Test 1 de février 2012 (3 points)

Soit f la fonction définie par $f(x,y) = \dfrac{x^2 + y^2}{x - y}$

1. Déterminer le domaine de définition de f.
2. Démontrer que f est une fonction homogène dont vous préciserez le degré.
3. Définir et décrire la ligne de niveau 2.

Exercice IX

Soit f définie par $f(x,y) = \dfrac{2x + y}{xy^2}$. L'équation de la courbe de niveau 1 définit-elle implicitement x en fonction de y ? y en fonction de x ?

Chapitre III
Limites et continuité d'une fonction de deux variables

Exercice I
Équivalents en zéro de fonctions d'une variable réelle

Donner un équivalent simple en $x_0 = 0$ des fonctions suivantes ; en déduire la limite en x_0 de ces fonctions :

- $f_1 : x \mapsto \dfrac{3x^2 - 6x}{4x - 2}$
- $f_2 : x \mapsto \dfrac{-5x^3 + 4x^2 + 9}{12x^2 - 5x}$
- $f_3 : x \mapsto \dfrac{\ln(1 + 2x)}{x^2 + 1}$
- $f_4 : x \mapsto \dfrac{(e^x - 1)^2}{1 - e^{2x}}$
- $f_5 : x \mapsto \dfrac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{x}$
- $f_6 : x \mapsto \dfrac{\ln(x^2 + x + 1)}{\sqrt{x^2 + x + 1} - 1}$

Exercice II

Soit f la fonction définie par $f(x, y) = \dfrac{2x \ln(1 + y)}{\exp(x^2 + x) - 1}$.

1. Déterminer puis représenter le domaine de définition D_f de cette fonction.
2. Donner un équivalent simple de f au voisinage de $O(0, 0)$. En déduire la limite de f en O.
3. Quelle est la limite de f lorsque (x, y) tend vers $(-1^+, 2)$?

Exercice III

Soit f la fonction définie par $f(x, y) = \dfrac{\ln(1 + 2x^2 + 2y^2)}{5(x^2 + y^2)}$.

Déterminer un équivalent simple de f au voisinage de $O(0, 0)$. f admet-elle une limite en O ?

Exercice IV

Soit f la fonction définie par $f(x, y) = \dfrac{3x^2 \ln(1 + 2y^2)}{\exp(x^2 y) - 1}$.

1. Donner un équivalent simple de f au voisinage de $O(0, 0)$. En déduire la limite de f en O.
2. Quelle est la limite de f lorsque (x, y) tend vers $(0; 1)$?

Exercice V

Soit f la fonction définie par $f(x,y) = \dfrac{x(e^y - 1)}{\ln(1+xy)}$

1. Déterminer puis représenter le domaine de définition D_f de cette fonction.
2. Donner un équivalent simple de f au voisinage de $O(0,0)$.
3. f peut-elle être prolongée par continuité en $(0,0)$?

Exercice VI
Extrait du Test 2 de Mars 2013 (5 points)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{\ (Ox), (Oy)\}$ par :

$$f(x,y) = \frac{(x^2+2x)\ln(1+2y^2)}{e^{xy}-1}$$

1. Donner un équivalent simple de $f(x,y)$ au voisinage de $O(0;0)$
2. Peut-on prolonger f par continuité en $(0,0)$? Si oui, définir le prolongement de f.
3. f admet-elle une limite réelle lorsque (x,y) tend vers $(0;1)$?

Exercice VII
Extrait du Test 2 de Mars 2012 (6,5 points)

Soit f la fonction définie par $f(x,y) = \dfrac{x^2+2x}{4y^2}$

1. Déterminer et représenter le domaine de définition de f. (Unité graphique : 2 cm ou 2 grands carreau)
2. Définir et représenter sur le graphique de **1.** les courbes de niveau 0 et -1 (notées respectivement L_0 et L_{-1}).
3. Étudier la limite de f lorsque (x,y) tend vers $O(0;0)$ en parcourant L_0, puis L_{-1}.
4. f admet-elle une limite en $O(0,0)$? Justifier.

Exercice VIII

Les fonctions suivantes sont-elles prolongeables par continuité en $(0,0)$?

a) $f_1 \ : \ (x,y) \mapsto \dfrac{x+y}{\exp(x).\exp(y)-1}$; *b)* $f_2 \ : \ (x,y) \mapsto f_2(x,y) = \dfrac{y^2\left(\sqrt{1+x}-1\right)^3}{x^2\ln(1+y)}$

UNIVERSITÉ DE CERGY **Licence d'Économie et Gestion**
U.F.R. Economie et Gestion **L1 - S2**

FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES

TEST 1 - Février 2013 - 1h 30 min

Les exercices sont indépendants et peuvent être traités dans l'ordre choisi par le candidat.
Il sera tenu compte du soin apporté à la rédaction.
CALCULATRICES INTERDITES
LES PORTABLES DOIVENT ÊTRE DÉBRANCHÉS ET RANGÉS.

Questions de cours - 7 points

Les questions qui suivent sont indépendantes les unes des autres.

1. Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on considère les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ d'équations réduites respectives $\mathcal{D}\ : y = 3x - 4$ et $\mathcal{D}'\ : y = \frac{-1}{3}x + 6$. Donner un vecteur directeur et un vecteur normal pour chacune de ces droites, puis justifier qu'elles sont perpendiculaires. Déterminer les coordonnées du point d'intersection I de ces deux droites.
2. L'espace étant muni d'un repère orthonormé, on considère les deux points $A(-5;2;4)$ et $B(3;2;-2)$.
   a) Calculer la distance AB.
   b) En déduire une équation cartésienne de la sphère $\mathcal{S}$ de diamètre $[AB]$.
3. On considère la parabole $\mathcal{P}$ d'équation $x = y^2 + 6y + 5$
   a) Déterminer les éléments caractéristiques de $\mathcal{P}$ (orientation, axe de symétrie, sommet, intersections avec les deux axes du repère)
   b) Justifier que l'équation $(E)\ :\ F(x,y) = y^2 + 6y + 5 - x = 0$ ne permet pas de définir implicitement y en fonction de x.

Exercice 1 - 8 points

Dans l'espace $\mathbb{R}^3$ muni d'un repère orthonormé, on considère le point $N(1;1;1)$ et le vecteur $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

1. Déterminer une équation du plan $\mathcal{P}$ de vecteur normal $\vec{n}$ et passant par N.
2. Donner une représentation cartésienne de l'axe (Ox), puis justifier que le point A intersection de $\mathcal{P}$ avec l'axe (Ox) a pour coordonnées $(6;0;0)$.
   De même, soient $B(0;2;0)$ le point d'intersection de $\mathcal{P}$ avec l'axe (Oy) et $C(0;0;3)$ le point d'intersection de $\mathcal{P}$ avec (Oz).
3. Déterminer une équation cartésienne du plan médiateur $\mathcal{P}_M$ au segment $[AB]$.
4. En déduire une représentation cartésienne de la médiatrice $\mathcal{M}$ à $[AB]$ dans le triangle ABC.
5. Déterminer une représentation paramétrique de $\mathcal{M}$.
6. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (BC), puis les coordonnées du point d'intersection de $\mathcal{M}$ et (BC).

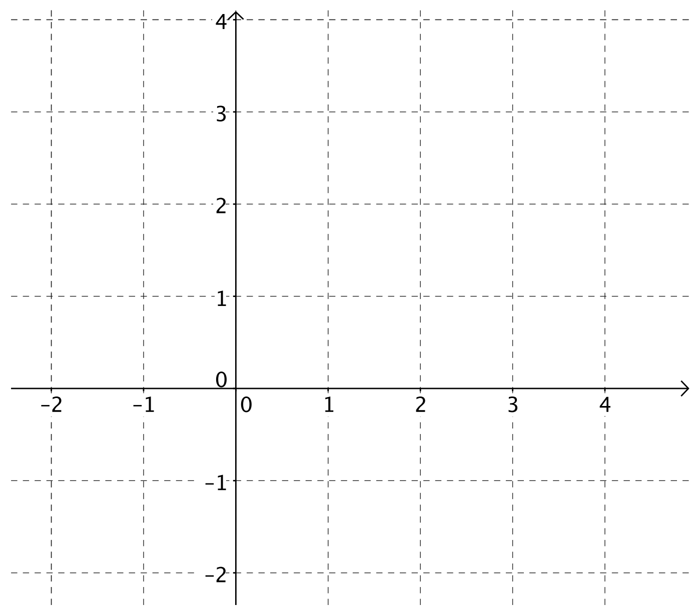
Exercice 2 - 5 points

On considère la conique $\mathcal{E}$ d'équation $(E)\ :\ 4x^2 - 16x + y^2 - 2y + 13 = 0$

1. Déterminer une équation cartésienne de $\mathcal{E}$: vous préciserez alors sa nature, son centre et ses coefficients.
2. Tracez $\mathcal{E}$ dans le repère joint en annexe.
3. Soit $\mathcal{D}$ la droite d'équation réduite $y = 2x - 1$: tracez $\mathcal{D}$ dans le repère.
4. Déterminer par un calcul les coordonnées des points d'intersections de $\mathcal{E}$ et $\mathcal{D}$.

ANNEXE à L'EXERCICE 2

NOM & Groupe de TD :



UNIVERSITÉ DE CERGY — **Licence d'Économie et Gestion**

U.F.R. Economie et Gestion — **L1 - S2**

FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES

TEST 2 - Mars 2013 - 1h 30 min

Les exercices sont indépendants et peuvent être traités dans l'ordre choisi par le candidat.
Il sera tenu compte du soin apporté à la rédaction.
CALCULATRICES INTERDITES
LES PORTABLES DOIVENT ÊTRE DÉBRANCHÉS ET RANGÉS.

Questions de cours - 8 points

Les 4 parties qui suivent sont indépendantes les unes des autres.

1. Soit f une fonction définie sur $D_f \subset \mathbb{R}^2$.

   a. Donner la définition de la courbe de niveau $k \in \mathbb{R}$ de f.

   b. On considère la fonction f définie par :

   $$f(x,y) = \frac{2x^2+2x}{x^2-y^2}$$

   Définir puis représenter l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ de f (le plan étant muni d'un repère orthonormé d'unité 2 cm (ou 2 carreaux))

   Définir précisément la courbe de niveau 1, notée L_1, puis représenter L_1 sur le graphique précédent.

2. Soit f la fonction définie par :

   $$f(x,y) = x - y + 3x^2y - e^{2x-3y} - 5$$

   Définir les fonctions partielles de f au point $M_0(2;-3)$.

3. On considère la fonction f définie par :

   $$f(x,y) = \frac{2xy}{x^2-y^2}$$

   (f est définie sur le même ensemble que la fonction de la question 1*b*.)

   Montrer que f n'admet pas de limite en $O(0;0)$ en étudiant la limite de f lorsque (x,y) tend vers O en parcourant les droites de $\mathcal{D}_f$ passant par l'origine.

4. En utilisant des équivalents, donner une valeur approchée de $A = \dfrac{\ln(0,98)}{(e^{0,1}-1)^2}$

Exercice 1 - 5 points

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{\ (Ox),(Oy)\}$ par :

$$f(x,y) = \frac{(x^2+2x)\ln(1+2y^2)}{e^{xy}-1}$$

1. Donner un équivalent simple de $f(x,y)$ au voisinage de $O(0;0)$
2. Peut-on prolonger f par continuité en $(0,0)$? Si oui, définir le prolongement de f.
3. f admet-elle une limite réelle lorsque (x,y) tend vers $(0;1)$?

Exercice 2 - 4 points

Soient f une fonction définie sur $D_f \subset \mathbb{R}^2$ et k un nombre réel.

1. Donner la définition de f est homogène de degré k.
2. Donner l'expression de l'identité d'Euler pour une telle fonction f homogène de degré k.
3. Soit f définie sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0;0)\}$ par $f(x,y) = \dfrac{x}{x^2+y^2}$.

   Montrer que f est homogène, puis vérifier l'identité d'Euler pour la fonction f.

Exercice 3 - 3 points

1. Donner la définition du vecteur gradient au point $M_0(x_0,y_0)$ (que l'on note $\overrightarrow{grad\ f}(M_0)$)
2. Donner un vecteur normal au plan tangent au graphe $\mathcal{G}_f$ de f au point $M_0'(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$, puis une équation cartésienne de ce plan tangent.
3. On considère la fonction f définie par : $f(x,y) = x^2e^{x-y}$

   Donner une équation cartésienne du plan tangent à $\mathcal{G}_f$ au point $M_0'(1;1;1)$