

Année 2016-2017

UNIVERSITÉ DE CERGY

LICENCE d'ÉCONOMIE et FINANCE LICENCE de GESTION

Seconde année - Semestre 3

MATHÉMATIQUES FINANCIÈRES

Cours de M. J. Stéphan

Travaux Dirigés de M. Candoni, C. Guvenir & J. Stéphan

Livret d'exercices I

Chapitre 1 : Suites numériques

Exercice I

Soient (u_n) et (v_n) deux suites définies pour tout entier naturel n respectivement par $u_n = 3^n$ et $v_n = 5n + 3$

1. Calculer u_0, u_1, u_2 et u_{10} (respectivement v_0, v_1, v_2 et v_{10}).
2. Exprimer u_{2n} et u_{n+1} (respectivement v_{2n} et v_{n+1}) en fonction de n .

Exercice II

Montrer par récurrence que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, $P(n) : \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$

Exercice III

Montrer par récurrence que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, $P(n) : \sum_{k=1}^n k \cdot k! = (n+1)! - 1$

Exercice IV

D'après le Test de Novembre 2015

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{-2}{3} \right\}$ par $f(x) = \frac{2x+1}{3x+2}$. Etudier les variations de f sur $[0; 1]$. En déduire que pour tout $x \in [0; 1]$, $f(x) \in [0; 1]$.
2. On considère la suite (u_n) définie par récurrence :

$$\begin{cases} u_0 &= 0 \\ u_{n+1} &= \frac{2u_n + 1}{3u_n + 2} \end{cases}$$

Démontrer par récurrence que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0; 1]$.

Exercice V

1. Soit (u_n) la suite arithmétique de premier terme $u_0 = 7$ et de raison $r = 1000$: exprimer u_n en fonction de n puis calculer u_{15} .
2. Soit (u_n) la suite géométrique de premier terme $u_0 = 10000$ et de raison $q = 1,03$: exprimer u_n en fonction de n puis donner une valeur approchée (à 10^{-2} près) de u_{15} .

Exercice VI

Préciser si les suites suivantes sont ou non arithmétiques ou géométriques :

1. (u_n) définie par $u_n = 1 + 3n$, $n \in \mathbb{N}$
2. (v_n) définie par $v_n = n^2 - 2n$, $n \in \mathbb{N}$
3. (w_n) définie par $w_n = 1 + 3^n$, $n \in \mathbb{N}$
4. (x_n) définie par $x_n = 5^{-n}$, $n \in \mathbb{N}$
5. (y_n) définie par $y_n = 1,025^{n+3}$, $n \in \mathbb{N}$
6. (z_n) définie par $z_n = \frac{2}{3^{n+1}}$, $n \in \mathbb{N}$

Exercice VII

(u_n) est une suite arithmétique telle que $u_{10} = -12$ et $u_{20} = -32$. Déterminer u_0 et la raison r de cette suite.

Exercice VIII

1. Soit (u_n) la suite géométrique de premier terme $u_0 = 100$ et de raison $q = \frac{4}{3}$.

Exprimer u_n en fonction de n puis donner la valeur exacte de la somme $S = \sum_{n=0}^{25} u_n$.

2. Soit (u_n) la suite géométrique de premier terme $u_1 = 150\,000$ et de raison $q = 1,025$. Exprimer u_n en fonction de n puis donner une valeur approchée de la somme

$$S = \sum_{n=1}^{15} u_n.$$

Exercice IX

Calculer en fonction de n , la somme $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{(1,04)^k}$. En déduire la limite $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$.

Exercice X

1. (u_n) est une suite géométrique de raison $q = 3$ et telle que $u_{11} = 295\,245$. Déterminer u_0 .
2. (u_n) est une suite géométrique telle que $u_{10} = 320$ et $u_{13} = 2560$. Déterminer u_0 et la raison q de cette suite.

Exercice XI

Donner le sens de variations, puis la limite éventuelle des suites géométriques suivantes :

1. $u_n = 2^n, n \in \mathbb{N}$
2. $u_n = (-1,07)^n, n \in \mathbb{N}$
3. $u_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n, n \in \mathbb{N}$
4. $u_n = 1,01^{-n}, n \in \mathbb{N}$
5. $u_n = (-0,8)^n, n \in \mathbb{N}$

Exercice XII

Un jeu propose les gains suivants : le premier jour le vainqueur gagne 1 000 €, et il revient le lendemain où s'il est de nouveau vainqueur, il gagne 20% de plus que la veille plus 100 €, et ainsi de suite : lorsqu'il est vainqueur, il revient le jour suivant où s'il est de nouveau vainqueur, il reçoit 20% de plus que le jour précédent plus 100 €.

1. Soit $u_n, n \in \mathbb{N}^*$, le gain du joueur le $n^{\text{ième}}$ jour. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n
2. Soit (v_n) la suite définie par $v_n = u_n + 500$. Montrer que (v_n) est une suite géométrique : préciser sa raison.
3. En déduire une expression de v_n puis de u_n en fonction de $n, n \in \mathbb{N}^*$.
4. Au bout de combien de jours, le joueur aura-t-il perçu des gains cumulés supérieurs à 20 000 € ?

FIN 201 - Mathématiques financières**Chapitre 2 - Intérêts simples et composés****Exercice I****D'après le Test - Novembre 2015**

Dans cet exercice, tous les taux d'intérêts considérés sont des taux d'intérêts simples commerciaux (sauf question 2). Les questions sont indépendantes les unes des autres :

1. Calculer le montant des intérêts produits par un placement de 24 000 € à 6% du 10 avril au 7 septembre 2015.
2. La différence entre intérêt commercial et intérêt civil d'un capital placé à 7,3% pendant 108 jours est égal 1,26 €. Calculer ce capital.
3. Un capital de 18 000 € prêté le 13 novembre 2015 à 2,2% a une valeur acquise à la fin du prêt de 18 053,90 €. A quelle date le prêt sera-t-il remboursé ?
4. Une banque prête à intérêts précomptés au taux de 6% un capital de 28 000 000 € pendant 21 jours. Déterminer le taux effectif de ce placement.

Exercice II

Un premier capital de 9 000 € est placé à intérêts simples à 4%. Un second capital de 8 000 € est placé le même jour à intérêts simples à 6%. Au bout de combien de temps les deux capitaux auront acquis la même valeur ? (sous l'hypothèse d'intérêts commerciaux)

Exercice III

Un capital de 20 000 € est placé à intérêts simples au taux $r\%$ deux ans après le capital acquis est placé à intérêts simples au taux $(r+2)\%$. Deux ans après ce nouveau placement, le prêteur dispose d'un capital acquis de 25 984 €. Calculer le taux d'intérêt r .

Exercice IV

Un organisme financier vous propose pour 6 mois les deux types de placement suivants :

- Placement A : intérêts simples postcomptés, taux annuel de 5%
- Placement B : intérêts simples précomptés, taux annuel 4,9%

Quel placement choisiriez-vous ?

Exercice V

D'après le Test - Novembre 2015

Dans cet exercice, tous les taux d'intérêts considérés sont des taux d'intérêts composés. Les questions sont indépendantes les unes des autres :

1. Quelle sera la valeur acquise au bout de 4 ans d'une somme de 100 000 € placée au taux de 2,4% (capitalisation annuelle) ? Même question lorsque la capitalisation est trimestrielle au taux proportionnel.
2. Au bout de combien d'années un investisseur aura-t-il doublé son capital initial si le taux est toujours de 2,4% (capitalisation annuelle). Même question si la capitalisation est trimestrielle au taux proportionnel.
3. Quel devrait-être le taux d'intérêt annuel pour que le capital initial voit sa valeur doubler au bout de 25 ans ?
4. Un établissement financier vous propose de placer 100 000 € au taux de 5% pendant 4 ans, puis 6% les 3 années suivantes et enfin de 6,5% les 3 dernières années.
 - (a) Quelle est la valeur acquise à la fin des 10 années ?
 - (b) Quel est, sur la période, le taux moyen annuel du placement ?
5. On dépose à la banque 10 000 €. Un an après on retire 6 000 €. Encore un an après, on dispose sur notre compte de 4 105,56 €. Calculer le taux d'intérêt associé à ce compte.

Exercice VI

1. Calculer la valeur acquise, à intérêts composés, par un capital de 10 000 €, au bout de 10 ans, au taux annuel $r = 6\%$, avec une capitalisation annuelle des intérêts.
2. Même calcul en intérêts simples.
3. Au bout de combien de temps la valeur acquise à intérêts simples serait-elle égale à la valeur acquise obtenue en 1., capital et taux demeurant inchangés ?
4. Au bout de combien de temps la valeur acquise à intérêts composés était-elle égale à la valeur obtenue en 2. (même capital, même taux) ?
5. A quel taux un capital de 10 000 €, placé à intérêts simples, atteindra-t-il en 10 ans la valeur acquise obtenue en 1. ?

Exercice VII

On considère 2 placements à intérêts composés annuellement, l'un de 10 k€ à 6%, l'autre de 9 k€ à 7%.

Au bout de combien de temps auront-ils la même valeur acquise ? Quelle sera cette valeur ?

Exercice VIII

1. Quelle est la valeur actuelle d'un capital dont la valeur sera de 400 000 € dans 3 ans sachant que le taux d'intérêt est de 8% et la capitalisation est annuelle ?
2. Un investisseur doit choisir entre deux types de contrats pour un versement initial de 100 000 € : soit percevoir 130 000 € dans 4 ans, soit percevoir 140 000 € dans 5 ans. Quelle contrat doit-il retenir ?

Exercice IX

Une personne dispose de 50 000 € qu'elle désire partager entre ses 4 enfants âgés respectivement de 10, 12, 14 et 16 ans. La part attribuée à chaque enfant sera placée sur un compte en banque au taux annuel de 3,75% (capitalisation annuelle). Calculer les quatre parts de telle manière que les quatre enfants disposent du même capital à leur majorité.

Exercice X

D'après le Test - Novembre 2014

Un investisseur dispose d'une fortune évaluée à X euros.

Il décide de l'investir sur trois comptes distincts dont les caractéristiques sont résumées ci-dessous. Peu familier des mathématiques financières, il choisit de placer un montant identique (soit $X/3$) sur chacun des trois comptes, ceci pour une période de 3 ans.

- Compte N°1 : taux annuel $r_1 = 6\%$, capitalisation annuelle des intérêts
- Compte N°2 : taux trimestriel $r_2 = 1,5\%$, capitalisation trimestrielle des intérêts (taux équivalent)
- Compte N°3 : taux semestriel $r_3 = 3\%$, capitalisation semestrielle des intérêts (taux équivalent)

1. On cherche à comparer les placements sur les comptes N°1 et N°2.
 - (a) Sans calculatrice et en utilisant une propriété vue en cours, préciser quel est le placement le plus avantageux. Retrouver votre résultat par un calcul.
 - (b) La différence entre les intérêts acquis par les placements sur les comptes N°1 et N°2 s'élève à 8 283,91 € : Combien l'investisseur a-t-il investi sur chaque compte (arrondir à l'euro près)
2. On cherche à comparer maintenant les placements sur les comptes N°2 et N°3.
 - (a) Quel est le taux annuel équivalent au taux semestriel du placement sur le compte N°3 ?
 - (b) Calculer la différence entre les intérêts produits par les placements sur les comptes N°2 et N°3.
3. On s'intéresse désormais au placement 3. A quel taux d'intérêt simple le montant investi sur le compte 3 devrait-il être placé pour que, à l'issue de la période de placement, la valeur acquise à intérêts simples soit égale à la valeur acquise à intérêts composés ?

Exercice XI

D'après le partiel - Janvier 2015

1. Quels sont les taux mensuels proportionnel et équivalent au taux annuel de 7,5% ?
2. Un capital de 200 000 € rapporte des intérêts semestriels de 10 000 €. Quel est le taux annuel équivalent de ce placement ?
3. Une banque annonce qu'elle pratique un taux annuel de 3,6% pour ses prêts immobiliers. En réalité, les intérêts sont versés mensuellement au taux proportionnel. Quel est le taux annuel équivalent ?

Exercice XII

1. Une banque annonce un taux annuel de $7,2\%$, les intérêts sont versés tous les deux mois en retenant le taux proportionnel. Quel est le taux annuel équivalent ?
2. Quel est le taux annuel r annoncé par un établissement financier qui, réglant les intérêts tous les semestres à taux proportionnel, assure un taux annuel effectif de 6% ?

Exercice XIII

On vous propose le contrat de placement suivant : placer aujourd'hui en une seule fois un capital C au taux de $2,5\%$; cette somme doit rester bloquée pendant cinq ans. A l'issue de ce placement, une prime égale au montant des intérêts acquis vous sera octroyée. Quel est le taux effectif r de placement de ce contrat ?

Exercice XIV

1. Calculer le taux de capitalisation instantané j correspondant au taux d'intérêt annuel de 6%
2. Quel taux d'intérêt annuel r correspond à une capitalisation continue du capital qui permet à celui-ci d'être multiplié au bout d'un an par $1,06$

Exercice XV

D'après le Test - Novembre 2015

1. Le 22 octobre 2015 un effet commercial à échéance du 30 janvier 2016 et de nominal égal à $18\,000\text{€}$ est remis à l'escompte, au taux d'escompte 5% . Calculer l'escompte commercial et la valeur actuelle commerciale de cet effet.
2. Deux capitaux, de valeurs nominales respectives $50\,000\text{€}$ et $100\,000\text{€}$ et d'échéances respectives les 01/01/2017 et 01/01/2019 sont remis à l'escompte le 01/01/2015. L'escompte commercial total de ces deux capitaux retenu par la banque est de $27\,242,85\text{€}$. Calculer le taux d'actualisation de négociation appliqué par la banque.

FIN 201 - Mathématiques financières**Chapitre 3 - Séquences de flux - Annuités****Exercice I**

1. Résoudre l'équation (E) : $(1 + i)^5 = 1,12$. En donner la valeur exacte et une valeur approchée à 10^{-4} près.
2. Donner une valeur approchée de la solution de (E') : $\frac{(1 + i)^{10} - 1}{i} = 12,9$ en utilisant le solveur de votre calculatrice.

Exercice II

Une personne verse tous les 1er janvier, du 01/01/2014 au 01/01/2029, la somme de 5 000 € à un organisme de capitalisation qui lui propose un rendement annuel de 6%.

1. Déterminer le montant du capital au 01/01/2029, juste après le dernier versement.
2. Déterminer le montant du capital au 01/01/2030 : on suppose que le client n'a pas retiré de fonds.
3. Déterminer le montant du capital au 01/01/2035 : on suppose que le client n'a toujours pas retiré de fonds.

Exercice III**D'après le partiel - Juin 2015**

Je souhaite me constituer un capital, afin d'avoir 60 000 € dans 8 ans.

1. Combien dois-je placer chaque année pour y parvenir, le taux d'intérêt étant de 1,75% ?
2. De fait, ce montant dépasse mes possibilités et je ne peux économiser que 6 000 € par an. Au bout de combien d'années aurai-je constitué mon capital ? (taux toujours égal à 1,75%)
3. Quel devrait-être le taux d'intérêt annuel pour que j'obtienne un capital de 60 000 € au bout de 8 ans en plaçant 6 000 euros par an ?

Exercice IV

D'après le Test - Novembre 2014

Deux frères jumeaux Paul et Hugo n'ont pas du tout le même comportement : Paul fume 2 paquets de cigarettes par semaine alors que Hugo décide de placer la somme correspondante sur un compte d'épargne rémunéré à 3%

Hugo commence à épargner le premier janvier de ses 16 ans.

1. On suppose que le prix du paquet de cigarettes reste constant égal à 6,50 € pendant toute la durée du placement.
 - (a) Hugo place la somme correspondante, soit $A = 676$ €, chaque premier janvier, et envisage de retirer l'argent le premier janvier de ses 65 ans, juste après le versement.
Exprimer le capital acquis en fonction de A . Calculer ce capital acquis.
 - (b) En se renseignant, Hugo trouve une banque qui lui propose une capitalisation mensuelle (au taux proportionnel), il décide donc de placer le premier jour de chaque mois 56,33 €, et envisage de retirer l'argent le premier décembre de ses 65 ans, juste après le versement. De quelle somme disposera-t-il alors ?
2. Afin d'ajuster son estimation, Hugo estime que le prix du paquet de cigarettes va augmenter de 6% par an
 - (a) Il place chaque premier janvier la somme correspondante et envisage de retirer l'argent le premier janvier de ses 65 ans, juste après le versement. Calculer le capital acquis.
 - (b) Il place chaque début de mois la somme correspondante, et envisage de retirer l'argent le premier décembre de ses 65 ans, juste après le versement. Calculer le capital acquis (**en utilisant des taux équivalents**).

Exercice V

M. X. désire emprunter 20 000 € auprès de sa banque pour acquérir un véhicule. Son banquier lui propose de verser 4 800 € à la date anniversaire du prêt et ceci pendant 5 ans. Quel est le coût actuariel de cette offre pour l'emprunteur ?

Exercice VI

D'après le Partiel - Janvier 2016

À la naissance de leur fils Tirion, M. et Mme Lannyster décident d'ouvrir un compte qu'ils approvisionneront une fois par an le jour de l'anniversaire de leur fils, le premier versement ayant lieu le jour de la naissance et le dernier versement ayant lieu le jour de ses 18 ans.

Tirion disposera ainsi d'un capital qui devra lui permettre de financer ses longues études supérieures de sténo-dactylo.

Titi prévoit d'avoir besoin de revenus **mensuels** réguliers pendant 5 ans à compter du mois suivant son 18^{ième} anniversaire.

La banque propose un placement à 3% par an. On utilisera un taux proportionnel.

1. On suppose que M. et Mme L. versent 1 000 € chaque année sur le compte de Tirion : de quelle somme disposera-t-il le jour de ses 18 ans, juste après le versement ?

2. On suppose que M. et Mme L. versent 1 000 € la première année et qu'ensuite ils augmentent les versements de 3% : de quelle somme disposera leur fils le jour de ses 18 ans, juste après le versement ?
3. En tenant compte de cette seconde hypothèse, de quelle somme (constante) peut disposer Tirion chaque mois pendant 5 ans, en supposant que le compte soit vide après le 60^{ième} retrait ?
4. Une banque concurrente leur propose de verser 1 000 € chaque année, sur la même durée, pour que leur fils puisse percevoir 600 € par mois pendant 60 mois : quel est le taux de placement proposé par cette banque ?

Exercice VII

1. Calculer la valeur acquise et la valeur actuelle d'une suite de 15 annuités en progression géométrique, les annuités progressant de 10% par an. Le taux de capitalisation est de 8%, la première annuité s'élève à 1 000 €.
2. Même question en retenant un taux de capitalisation de 10%.

Exercice VIII

Monsieur X. a entrepris d'effectuer des placements annuels de 20 000 € chacun, les 1er juillet de chacune des années N à N+9 (inclusivement). Le taux d'intérêt prévu est de 4% l'an.

1. De quelle somme peut-espérer disposer M. X le 1er juillet N+14, le capital constitué au 01/07/N+9 ayant continué à porter intérêt ?
2. Immédiatement après avoir effectué le placement du 01/07/N+5, M. X constate que le capital déjà constitué ainsi que les placements à venir ne pourront plus désormais produire des intérêts qu'à un taux de 3,5%.
Dans ces conditions, de quelle somme disposera M. X le 1er juillet N+14 ?
3. Dans les conditions précédentes (i.e. nouveau taux de 3,5% après avoir effectué le placement du 01/07/N+5), Mr X envisage d'effectuer des versements supplémentaires constants les 1er juillet de chaque année entre N+10 et N+13 (inclusivement) de façon à obtenir le 1er juillet N+14 la somme calculée en 1.. Déterminer le montant unitaire de ces versements supplémentaires constants.

Exercice IX

D'après le Partiel - Juin 2016

Mme Dursley vient d'acquérir une action de la Société Wizard pour un montant de 800 €. La Sté Wizard pense verser un dividende de 50 € par action et maintenir la rémunération à ce niveau à l'avenir.

On suppose que Mme Dursley percevra son premier dividende dans exactement un an.

On suppose que la valeur actuelle d'une action est la somme des flux futurs actualisés qu'elle rapporte.

On retiendra dans tout l'exercice un taux d'actualisation de 4%.

1. On suppose que Mme Dursley vendra son action 1 000 € dans exactement 5 ans, juste après le versement du dividende. Qu'elle est la valeur actuelle de cette action ? Quel est le taux d'intérêt actuariel associé à ce placement ?
2. Mme Dursley pense plutôt conserver indéfiniment cette action, pour la transmettre à son héritier Harry. Quel est dans ce cas la valeur actuelle de cette action ?
3. En fait, on s'aperçoit que le dividende versé pour chaque action augmente de 2% chaque année. Qu'elle est la valeur actuelle de cette action, en considérant que Mme Dursley conserve indéfiniment cette action ? (**Indication** : on pourra dans un premier temps raisonner sur la valeur actuelle en considérant qu'il y a n versements, puis déterminer une limite)

Exercice X

Une société envisage de se développer à l'international et souhaite ouvrir des filiales en Allemagne et en Italie. Le coût d'ouverture de ces filiales (embauche du personnel, achat de locaux, publicité, etc.) est évaluée à 4 M€. Le directeur financier de la société, considère que les flux nets de trésorerie générés par cet investissement seront les suivants :

Année	1	2	3	4
Flux (en M€)	1,7	1,4	1,3	1,2

Les apporteurs de capitaux de cette société ont une exigence de rentabilité de 10% (taux d'actualisation).

1. Calculer la valeur actuelle des flux de trésorerie futurs.
2. Calculer la valeur actuelle nette. Faut-il entreprendre ce projet ?
3. Représenter graphiquement la valeur actuelle nette en fonction du taux d'actualisation.
4. Calculer le taux de rentabilité interne. Le situer sur le graphique précédent.
5. Le directeur financier a peut-être été un peu optimiste pour le flux d'année 4 qui pourrait s'avérer bien inférieur à 1,2 M€. En dessous de quel flux d'année 4 le projet ne doit-il plus être entrepris ?