Les jeux séquentiels en économie: duopole de Stackelberg

Théorie des Jeux 2016-2017

17 Novembre 2016

Le Duopole de Stackelberg

- concurrence en quantité:
  - Cournot (jeu simultané): les deux entreprises font leurs décisions de production en même temps
  - Stackelberg (jeu sequentiel): les deux entreprises font leurs décisions de production à des moments différents

Le Duopole de Stackelberg

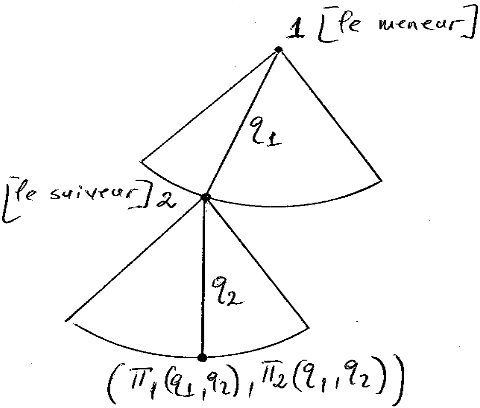
- Joueurs:
  1. Joueur 1: le meneur (leader)
  2. Joueur 2: le suiveur (follower)
- Le meneur choisit la production et après le suiveur, *en observant* la choix du meneur, fais sa decision de production

Le Duopole de Stackelberg

- joueurs: les deux firmes
- stratégies: les niveaux de production $q_1, q_2 \geq 0$
- noeuds terminaux: toutes les histoires/chemins de jeu (q_1, q_2)
- paiements (gains) après histoire (q_1, q_2) :

$$\begin{aligned} \Pi_i(q_1, q_2) \quad = \quad & q_i P(q_1 + q_2) - C_i(q_i), i = 1, 2 \\ & \text{ou } P(\cdot) \text{ - la fonction de demande inverse} \\ & \text{et } C_i(\cdot) \text{ les côuts de production de joueur } i \end{aligned}$$

Le Duopole de Stackelberg: la forme extensive



- chaque joueur i, $i = 1, 2$ a un continuum de stratégies: $q_i \in [0, \bar{q}_i]$ avec $P(\bar{q}_1 + \bar{q}_2) \geq 0$

Equilibre de Nash Parfait en Sous-Jeu: Induction à Rebours

- pour toutes $q_1 \geq 0$ de firme 1 (le meneur) , nous calculons la meilleur réponse du firme 2 (le suiveur)
- appelons $b_2(q_1)$ cette quantité q_2 qui maximise le profit Π_2 étant donné q_1 :

$$q_2 = b_2(q_1)$$

- dans chaque sous-jeu la stratégie du firme 2 sera $b_2(q_1)$
- $b_2(q_1)$ reste à déterminer...

Equilibre de Nash Parfait en Sous-Jeu: Induction à Rebours

- induction à rebours
- après avoir calculé la meilleur réponse du joueur 2, on remonte l'arbre de decision
- joueur 1 (le meneur) va calculer son niveau de production optimale - qui maximise Π_1 - en anticipant la stratégie optimale $b_2(q_1)$ du joueur 2 (le suiveur):

$$\begin{aligned} q_1^* &= \arg\max_{q_1} \Pi_1(q_1, q_2 = b_2(q_1)) \\ & \arg\max_{q_1} [q_1 P(q_1 + b_2(q_1)) - C_1(q_1)] \end{aligned}$$

Equilibre de Nash Parfait en Sous-Jeu

- Donc, l'équilibre de Nash parfait en sous-jeu, équilibre dit Stackelberg:

$$(q_1^*, b_2(q_1^*))$$

- ENPSJ appartient toujours à la courbe de meilleur réponse $b_2(q_1)$ du suiveur (firme 2)
- quel point sur cette courbe?
  - le point qui maximise le profit du meneur (leader)

Example avec demande et côuts linéaires

- la fonction de demande inverse:

$$\begin{aligned} P(Q) &= \alpha - Q, Q < \alpha \\ Q &= q_1 + q_2 \end{aligned}$$

- fonctions symétriques de coûts:

$$C_i(q_i) = C(q_i) = cq_i, i = 1, 2$$

- firme 1: le meneur
- firme 2: le suiveur

Example avec demande et côuts linéaires

- le suiveur observe la decision de production du meneur
- donc, il maximise:

$$\begin{aligned} \max_{q_2}[\Pi_2(q_1, q_2) &= q_2 P(q_1 + q_2) - C(q_2)) \\ &\Leftrightarrow \max_{q_2}\{q_2[\alpha - (q_1 + q_2)] - cq_2\} \end{aligned}$$

- condition du première-ordre:

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dq_2}\Pi_2(q_1, q_2) = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & \alpha - q_1 - 2q_2 - c = 0 \\ \Rightarrow \quad & q_2 = \frac{1}{2}(\alpha - q_1 - c) \equiv b_2(q_1) \end{aligned}$$

Example avec demande et côuts linéaires

- joueur 1 (le meneur) *anticipe* le comportament optimale du suiveur $q_2 = b_2(q_1)$ et joue son meilleur réponse:

$$q_1 = \arg\max_{q_1} \Pi_1(q_1, b_2(q_1))$$

- calculons les profits du meneur:

$$\begin{aligned}
\Pi_1(q_1, b_2(q_1)) &= q_1[\alpha - (q_1 + b_2(q_1))] - cq_1 \\
&= q_1[\alpha - c - [q_1 + \frac{1}{2}(\alpha - q_1 - c)]] \\
&= \frac{1}{2}q_1(\alpha - c - q_1)
\end{aligned}$$

- condition du première-ordre pour joueur 1:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dq_1}\Pi_1() = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{2}c - q_1 = 0 \\
\Leftrightarrow \quad q_1^* = \frac{1}{2}(\alpha - c).
\end{aligned}$$

Example avec demande et côuts linéaires

- alors, la production optimale du suiveur:

$$
\begin{aligned}
q_2^* &= b_2(q_1^*) \\
&= \frac{1}{2}(\alpha - q_1^* - c) \\
&= \frac{1}{2}[\alpha - \frac{1}{2}(\alpha - c) - c] \\
&= \frac{1}{4}(\alpha - c).
\end{aligned}
$$

- équilibre de Stackelberg:

$$
\begin{aligned}
q_1^S &= \frac{1}{2}(\alpha - c) \\
q_2^S &= \frac{1}{4}(\alpha - c)
\end{aligned}
$$

Stackelberg vs. Cournot: observations

- rappelons l'équilibre de Cournot:

$$\begin{aligned} q_1^C &= \frac{1}{3}(\alpha - c) < \frac{1}{2}(\alpha - c) = q_1^S \\ q_2^C &= \frac{1}{3}(\alpha - c) > \frac{1}{4}(\alpha - c) = q_2^S \end{aligned}$$

- les profits:

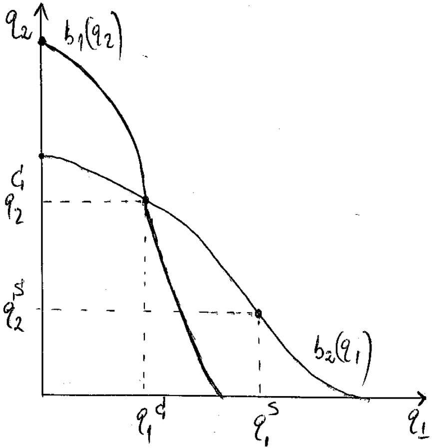
$$\begin{aligned} \Pi_1^C &= \frac{1}{9}(\alpha - c)^2 < \frac{1}{8}(\alpha - c)^2 = \Pi_1^S \\ \Pi_2^C &= \frac{1}{9}(\alpha - c)^2 > \frac{1}{16}(\alpha - c)^2 = \Pi_2^S \end{aligned}$$

- vis-a-vis le modèle avec decisions simultanés (Cournot):
  1. le leader produit *plus* et le suiveur produit *moins*
  2. le leader fait plus de profits et le suiveur moins de profits
- l'avantage du premier coup (first mover advantage)

Stackelberg vs. Cournot: intuition

- l'équilibre de Stackelberg appartient à la courbe de meilleur réponse $b_2(q_1)$ du suiveur...
- ...mais pas à la courbe de meilleur réponse $b_1(q_2)$ du meneur!
- en faisant le premier choix le meneur *peut effectivement choisir le point sur la meilleur réponse du suiveur* $b_2(q_1)$ qui sert le mieux ses intérêts
- à comparer avec Cournot: le point d'équilibre n'est pas *choisi* par l'un ou l'autre joueur mais il est *donné* par l'intersection des deux courbes de meilleure réponse
- graphiquement...

Stackelberg vs. Cournot: intuition



Stackelberg vs. Cournot: la valeur du engagement

- $q_1^S \notin b_1(q_2)$!
- le meneur (joueur 1) préfère d'être engagé au quantité de leader Stackelberg
- la valeur du engagement (value of commitment)

Modèle de Stackelberg: example avec côuts asymetriques

- Soit un duopole où la fonction de demande inverse este notée $P(Q) = 4 - Q$, Q désignant la production totale supposée homogène et où les fonctions de coût total sont les suivantes:

$$\text{Entreprise } \mathbf{1}: \qquad C_1(q_1) = q_1$$

$$\text{Entreprise } \mathbf{2}: \qquad C_2(q_2) = \frac{1}{2}q_2^2$$

q_1, q_2 désignant la production des entrepriss **1** et **2**, avec $Q = q_1 + q_2$.

1. Déterminer l'équilibre de Nash (l'équilibre dite Cournot-Nash).
2. On suppose que l'entreprise 2 est en position de firme dominante: elle choisit sa production la première, l'entreprise 1 s'ajustant ensuite. Déterminer l'équilibre de Nash parfait en sous-jeux (l'équilibre dite Stackelberg).
3. Les deux entreprises forment un cartel. Quels vont être leur niveaux de production ? Quel sera le prix du cartel?