La Théorie de l'Oligopole
Duopole de Cournot et Bertrand

Théorie des Jeux 2016-2017

20 Octobre 2016

Concurrence en Quantité: Duopole de Cournot

- un bien homogéne
- 2 entreprises: $i = 1, 2$
- l'entreprise i décide uniquement du niveau de sa production q_i
- donc la *variable strategique est la quantité* vendu
- prise de decision *simultanée*
- toute la production vendu au même prix P
- P déterminé par la fonction de demande inverse $P(Q), Q = q_1 + q_2$
- le côut pour l'entreprise i de produire q_i unités de bien est égal a $C_i(q_i)$
- côut marginal croissant: $\partial C_i(q_i)/\partial q_i > 0$

Duopole de Cournot: example

- demande *linéaire*:

$$P(Q) = \left\{ \begin{array}{c} 4 - Q, \text{ si } Q \leq 4 \\ 0, \text{ si } Q > 4 \end{array} \right\}$$

- coûts *quadratiques symétriques*:

$$C_i(q_i) = q_i^2, \; i = 1, 2$$

Duopole de Cournot: description du jeu

- 2 joueurs: {entreprise 1, entreprise 2}
- ensemble d'actions pour $i = 1, 2$: $q_i \geq 0$ ou $q_i \in \mathbb{R}_+$
- paiements: les profits $\Pi_i(q_1, q_2)$

$$\Pi_i(q_1, q_2) = q_i P(Q) - C_i(q_i)$$

Duopole de Cournot

- profits pour joueur 1:

$$\Pi_1(q_1, q_2) = q_1 P(Q) - q_1^2 = \left\{ \begin{array}{c} (4 - q_2)q_1 - 2q_1^2, \text{ si } Q \leq 4 \\ -q_1^2, \text{ si } Q > 4 \end{array} \right\}$$

- par symétrie:

$$\Pi_2(q_1, q_2) = q_2 P(Q) - q_2^2 = \left\{ \begin{array}{c} (4 - q_1)q_2 - 2q_2^2, \text{ si } Q \leq 4 \\ -q_2^2, \text{ si } Q > 4 \end{array} \right\}$$

Duopole de Cournot: meilleurs réponses

- le meilleur réponse pour entreprise 1 est la quantité q_1 qui maximise les profits $\Pi_1(q_1, q_2)$ pour toute quantité q_2 produite par entreprise 2
- Cas 1: $Q \leq 4$

$$E1 : \max_{q_1}[\Pi_1(q_1, q_2) = (4 - q_2)q_1 - 2q_1^2]$$

- premier-ordre condition:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial q_1}\Pi_1(q_1, q_2) &= 0 \Longleftrightarrow 4 - q_2 - 4q_1 = 0 \\ \Rightarrow \quad & q_1 = 1 - \frac{1}{4}q_2 = B_1(q_2) \end{aligned}$$

- Cas 2: $Q > 4$

$$\begin{aligned} E1 \quad : \quad & \max_{q_1}[\Pi_1(q_1, q_2) = -q_1^2] \\ \Rightarrow \quad & q_1 = 0 \end{aligned}$$

Duopole de Cournot: meilleurs réponses

- Donc, MR pour joueur 1:

$$q_1 = B_1(q_2) = \left\{ \begin{array}{c} 1 - \frac{1}{4}q_2, \text{ si } Q \leq 4 \Leftrightarrow q_2 \leq 4 - q_1 \\ 0, \text{ si } Q > 4 \Leftrightarrow q_2 > 4 - q_1 \end{array} \right\}$$

- par symétrie, MR pour joueur 2:

$$q_2 = B_2(q_1) = \left\{ \begin{array}{c} 1 - \frac{1}{4}q_1, \text{ si } Q \leq 4 \Leftrightarrow q_1 \leq 4 - q_2 \\ 0, \text{ si } Q > 4 \Leftrightarrow q_1 > 4 - q_2 \end{array} \right\}$$

Equilibre de Nash (Cournot)

- tous les joueurs sont en meilleure réponse par rapport aux actions des autre jouers

$$
\begin{aligned}
q_1 &= B_1(q_2) \\
q_2 &= B_2(q_1)
\end{aligned}
$$

- équilibre(s) de Nash, intersections des MRs: $B_1(q_2) \cap B_2(q_1)$
- unique équilibre de Cournot-Nash avec stratégies pures: $q_1^* = q_2^* = \frac{4}{5}$.
- quantité totale produite: $Q^* = q_1^* + q_2^* = \frac{8}{5}$
- prix d'équilibre: $P^* = 4 - q_1^* - q_2^* = \frac{12}{5}$
- paiements (profits) pour jouers 1,2:

$$\Pi_i^*(q_1^*, q_2^*) = q_i^* P^* - (q_i^*)^2 = \frac{32}{25}$$

Solution de cartel

- les firmes vont maximiser le profit *joint=la somme de deux profits*

$$\max_{q_1,q_2}[\Pi^K(q_1,q_2)=\Pi_1(q_1,q_2)+\Pi_2(q_1,q_2)] \Leftrightarrow$$
$$\max_{q_1,q_2}[q_1(4-q_1-q_2)-q_1^2+q_2(4-q_1-q_2)-q_2^2]$$

- optimum:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Pi^K(q_1,q_2)}{\partial q_1} &= 4-2q_2-4q_1=0\\ \frac{\partial \Pi^K(q_1,q_2)}{\partial q_2} &= 4-2q_1-4q_2=0\end{aligned}$$

- Solution du cartel: $q_1^K=q_2^K=\frac{2}{3}$

Solution de cartel

- solution du cartel: $q_1^K = q_2^K = \frac{2}{3}$
- quantité totale de cartel: $Q^K = q_1^K + q_2^K = \frac{4}{3} < \frac{8}{5} = Q^*$
- prix du cartel: $P^K = 4 - Q^K = \frac{8}{3} > \frac{12}{5} = P^*$
- le cartel produit *moins* et vend à un prix *plus élevé*!
- profits du chaque jouers dans le cartel:

$$\Pi_i^K(q_1^K, q_2^K) = \frac{4}{3} > \frac{32}{25} = \Pi_i^*(q_1^*, q_2^*)$$

- profits plus grandes que les profits de Cournot!

Stabilité de cartel?

- si firme 1 pense que l'entreprise 2 maintiendra son output de cartel inchangé q_2^K, a-t-elle l'intérêt d'augmenter de facon *unilaterale* sa production?
- y at-il une déviation unilatérale profitable pour joueur 1 ou 2?
- supposons firme 1 joue une petite deviation de la quantité du cartel $q_{1,\varepsilon}^K = \frac{2}{3} + \varepsilon$, $\varepsilon \geq 0$
- firme 2 continue de jouer la quantité de cartel $q_2^K = \frac{2}{3}$

Stabilité de cartel?

- le profit pour cet deviation:

$$\begin{aligned}\Pi^K_{1,\varepsilon}(q^K_{1,\varepsilon}, q^K_2) &= (\frac{2}{3}+\varepsilon)(4-\frac{2}{3}-\varepsilon-\frac{2}{3})-(\frac{2}{3}+\varepsilon)^2 \\ &= -2\varepsilon^2+\frac{2}{3}\varepsilon+\frac{4}{3}\end{aligned}$$

- alors, $\Pi^K_{1,\varepsilon}(q^K_{1,\varepsilon}, q^K_2) - \Pi^K_1(q^K_1, q^K_2) = -2\varepsilon^2 + \frac{2}{3}\varepsilon = \frac{2}{3}\varepsilon(1-3\varepsilon) > 0$ pour $\varepsilon \geq 0$ petite
- donc, (q^K_1, q^K_2) n'est pas un équilibre de Nash du duopole Cournot!

Stabilité de cartel: dilemme du prisonnier

- rationalité individuelle
  - max. *individuelle* $\Rightarrow$ équilibre de Cournot-Nash
- rationalité collective
  - maximisation *jointe* $\Rightarrow$ solution de cartel
- pour maintenir le cartel:
  - moyen de detection et de punition pour tricheurs
  - jeu repeté?

Concurrence en Prix: duopole de Bertrand

- A. Cournot (1838): *Recherches sur les principes mathématiques de la théorie des richesses*
  - variable strategique: la *quantité* produite
- J. Bertrand (1883): *Théorie mathematique de la richesse sociale*
  - la decision strategique: le *prix* de vente

Oligopole de Bertrand avec côuts linéare

- toutes les entreprises produisent un bien homogène
- chaque entreprise $i \in N$ produit la quantité q_i
- fonction linéaire des coûts pour entreprise i:

$$C_i(q_i) = cq_i$$

- $c > 0$, paramètre
- l'ensemble de strategies disponible: $p_i \in \mathbb{R}_+$

Oligopole de Bertrand avec côuts linéare

- la demande associe a chaque niveau de prix la quantité demandé par le consommateurs à ce prix
- les consommateurs observent les prix fixés par les entreprise et achètent le bien à l'entreprise qui a fixé le prix le plus bas
- si plusieurs entreprises ont fixé le prix plus bas, on fait l'hypothèse que la demande se repartit de maniere uniforme entre ces entreprises
  - ex: si trois entreprises ont fixé le prix plus bas $\underline{p}$ alors chacune de ces trois sert la demande $\frac{D(\underline{p})}{3}$

Oligopole de Bertrand - forme strategique

- $J = (N, X_i, U_i)$
  - l'ensemble de joueurs N : l'ensemble des entreprises
  - l'ensemble de strategies X_i de chaque joueur i : l'ensemble des prix positifs $p_i \in \mathbb{R}_+$
  - fonction de gain/utilité est donné pour chaque joueur i par les profits:

$$(\forall)\mathbf{p} \in X, U_i(\mathbf{p}) = \left\{ \begin{array}{c} p_i \cdot \frac{D(p_i)}{|\underline{\mathrm{p}}|} - C_i(\frac{D(p_i)}{|\underline{\mathrm{p}}|}), \text{ si } p_i = \underline{\mathrm{p}} \\ 0, \text{ si } p_i > \underline{\mathrm{p}} \end{array} \right\}$$

  - côuts de production *linéare* et symétrique:

$$C_i(q_i) = cq_i$$

  - côut marginal constant: $c \in \mathbb{R}_+$

Oligopole de Bertrand - forme strategique

Theorem

(Bertrand). Pour tout $N \geq 2$ le jeu d'oligopole Bertrand avec des côuts linéare admet un unique équilibre de Nash (dite Bertrand-Nash) $\mathbf{p}^* \in X$ tel que pour chaque $i \in N$, $p_i^* = c$.

- pour $n = 2$ (duopole) tout se passe comme si le marché etait parfaitment concurrentiel:
    - les entreprises tarifent a côut marginal et font un profit nul
- *paradoxe* de Bertrand

Duopole de Bertrand

- 2 entreprise: 1,2
- fonction de demande inverse:

$$P = a - bQ$$

- fonction côut (linéare et symétrique):

$$C_i(q_i) = cq_i$$

- restrictions sur l'ensemble de strategies:
    - profit pour entreprise 1: $\Pi_1(P_1) = (P_1 - c)q_1; \Pi_1(P_1) \geq 0 \Leftrightarrow P_1 \geq c$
    - si entreprise 1 sert tout la marché$\Rightarrow Q = q_1 > 0 \Rightarrow \frac{a-P_1}{b} > 0 \Leftrightarrow P_1 \leq a$
- alors, $P_1, P_2 \in [c, a]$

Meilleurs réponses

- la quantité demandé pour joueur i depend sur la relation entre les choix des strategies P_1, P_2 :

$$q_i = \left\{ \begin{array}{c} 0, \text{ si } P_i > P_j : "j" \text{ sert tout le marché} \\ \frac{a-P_i}{b}, \text{ si } P_i < P_j : "i" \text{ sert tout le marché} \\ \frac{a-P_i}{2b}, \text{ si } P_i = P_j : \text{ marché est partagé} \end{array} \right\}$$

- déterminer les meilleurs réponse du joueur 1
  - sous constraits: $P_1, P_2 \in [c, a]$

Meilleurs réponses

- Si $P_2 = a \Rightarrow B_1(P_2) = a - \varepsilon = P_1' \Rightarrow$

$$\left\{ \begin{array}{c} q_1 = \frac{a-P_1'}{b} \\ q_2 = 0 \end{array} \right\}$$

- $B_2(P_1') = B_2(a - \varepsilon) = a - \varepsilon - \varepsilon = P_2' \Rightarrow$

$$\left\{ \begin{array}{c} q_2 = \frac{a-P_2'}{b} \\ q_1 = 0 \end{array} \right\}$$

Meilleurs réponses

- $B_1(P_2') = B_1(a - 2\varepsilon) = a - 2\varepsilon - \varepsilon = P_1^{''}$...
- chaque entreprise veut vendre moins cher que l'adversaire...
- le processus iteratif va converger vers *l'équilibre Bertrand-Nash avec stratégies pures*: $P_1^* = P_2^* = c$!
- la solution du marché concurrentielle: prix=côut marginal même avec deux entreprises
- resolution du paradoxe Bertrand?
    - les *contraintes de capacité* de production
        - entreprise 1,2 ne peut pas servir tout le marché