UNIVERSITÉ DE CERGY **Année 2016-2017**

U.F.R. Économie & Gestion

Licence d'Économie et Finance / Licence de Gestion

FIN 201 : Mathématiques financières

FORMULAIRE

Nota : Ce formulaire qui reprend la progression du cours, sera utilisé lors des séances de T.D. C'est aussi le seul document dont vous disposerez lors des épreuves et auquel vous pourrez vous référer en utilisant la numérotation des formules. **Il est strictement interdit d'y apporter des annotations**. Enfin, ce formulaire n'est qu'un aide-mémoire qui n'a aucun caractère d'exhaustivité et qui ne dispense pas de venir en cours et de préparer les exercices de T.D. ...

Chapitre I : Outils mathématiques

1 Suites arithmétiques

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r :

$$\text{Pour tout entier } n,\ u_{n+1} = u_n + r \qquad (\mathbf{I}.1)$$

Si le premier terme est u_0 :

$$\text{Pour tout entier } n,\ u_n = u_0 + n.r \qquad (\mathbf{I}.2a)$$

Si le premier terme est u_1 :

$$\text{Pour tout entier } n \neq 0,\ u_n = u_1 + (n-1).r \qquad (\mathbf{I}.2b)$$

Somme des n premiers termes d'une suite arithmétique (u_n) :

$$\text{Pour tout entier } n,\ S_n = \sum_{i=0}^{n-1} u_i = \frac{n(u_0 + u_{n-1})}{2} = \frac{n(2u_0 + (n-1)r)}{2} \qquad (\mathbf{I}.3a)$$

$$\text{Pour tout entier } n \neq 0,\ S_n = \sum_{i=1}^{n} u_i = \frac{n(u_1 + u_n)}{2} = \frac{n(2u_1 + (n-1)r)}{2} \qquad (\mathbf{I}.3b)$$

2 Suites géométriques

Soit (u_n) une suite géometrique de raison q :

$$\text{Pour tout entier } n,\ u_{n+1} = q \cdot u_n \tag{\textbf{I}.4}$$

Si le premier terme est u_0 :

$$\text{Pour tout entier } n,\ u_n = u_0 \cdot q^n \tag{\textbf{I}.5a}$$

Si le premier terme est u_1 :

$$\text{Pour tout entier } n \neq 0,\ u_n = u_1 \cdot q^{n-1} \tag{\textbf{I}.5b}$$

Somme des n premiers termes d'une suite géométrique (u_n) : $(q \neq 1)$

$$\text{Pour tout entier } n,\ S_n = \sum_{k=0}^{n-1} u_k = u_0 \frac{1-q^n}{1-q} \tag{\textbf{I}.6a}$$

$$\text{Pour tout entier } n \neq 0,\ S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k = u_1 \frac{1-q^n}{1-q} \tag{\textbf{I}.6b}$$

Cas particuliers : (que l'on retrouvera régulièrement)

$$\text{Si } q = 1+r :\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_n = \sum_{k=0}^{n-1}(1+r)^k = \frac{1-(1+r)^n}{1-(1+r)} = -\frac{1-(1+r)^n}{r} = \frac{(1+r)^n - 1}{r} \tag{\textbf{I}.6c}$$

$$\text{Si } q = (1+r)^{-1} :\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_n = \sum_{k=1}^{n}(1+r)^{-k} = (1+r)^{-1}\left(\frac{1-(1+r)^{-n}}{1-(1+r)^{-1}}\right) = \frac{1-(1+r)^{-n}}{r} \tag{\textbf{I}.6d}$$

3 Suites arithmético-géométriques

Soit (u_n) la suite arithmético-géométrique définie par $u_{n+1} = au_n + b$ où $a \neq 1$.
Soit α l'unique solution de l'équation caractéristique $(E)\ :\ x = ax + b$.

$$\text{La suite } (v_n) \text{ définie par } v_n = u_n - \alpha \text{ est une suite géométrique de raison } a \tag{\textbf{I}.7}$$

4 interpolation Linéaire

Soit f une fonction définie, continue et strictement monotone sur un intervalle $[x_1, x_2]$. On suppose connues les valeurs $f(x_1)$ et $f(x_2)$.

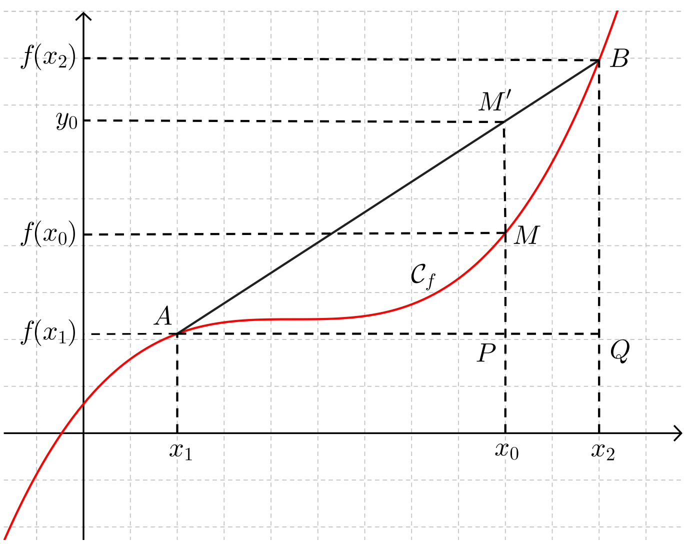
1. Soit $x_0 \in [x_1; x_2]$. On peut prendre comme valeur approchée de $f(x_0)$ le réel y_0 :

$$f(x_0) \approx y_0 = f(x_1) + (x_0 - x_1)\left(\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}\right) \tag{I.8}$$

Autre formulation :

2. Soit y_0 un réel compris entre $f(x_1)$ et $f(x_2)$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique réel $x_0 \in [x_1, x_2]$ tel que $f(x_0) = y_0$. On peut prendre comme valeur approchée de x_0 le réel $x_0^\star$:

$$x_0 \approx x_0^\star = x_1 + (y_0 - f(x_1))\left(\frac{x_2 - x_1}{f(x_2) - f(x_1)}\right) \tag{I.9}$$



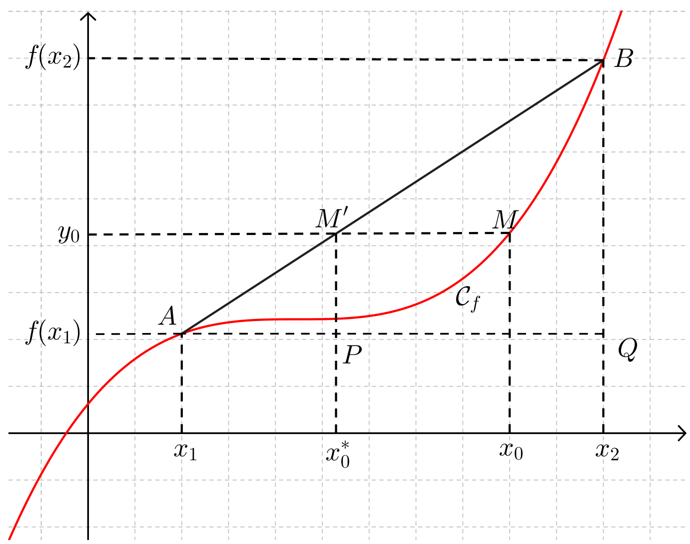


FIGURE 1 – Interpolation linéaire : **1.** $f(x_0) \approx y_0$ // **2.** $x_0 \approx x_0^\star$

Chapitre II : Intérêts

1 Intérêts simples

On note :

- C_0 : le capital placé.
- $r\% = \dfrac{r}{100}$: le taux d'intérêt annuel

1.1 Formule fondamentale

L'intérêt I rapporté par le placement C_0 au taux $r\%$ pendant n années est :

$$I = C_0 \times r \times n \tag{\textbf{II}.1a}$$

On place une somme C_0 pendant m mois au taux d'intérêt annuel r. L'intérêt I rapporté par cette somme est :

$$I = C_0 \times r \times \frac{m}{12} \tag{\textbf{II}.1b}$$

On place une somme C_0 pendant j jours au taux d'intérêt annuel r : par convention, dans les banques, une année commerciale fait 360 jours. L'intérêt commercial I rapporté par cette somme est :

$$I = C_0 \times r \times \frac{j}{360} \tag{\textbf{II}.1c}$$

L'intérêt civil I' (pour une année de 365 jours) rapporté par cette somme est :

$$I' = C_0 \times r \times \frac{j}{365} \tag{\textbf{II}.1d}$$

1.2 Valeur acquise par un capital (ou valeur future)

Soit C_j la valeur acquise par un capital C_0 placé j jours au taux d'intérêt annuel $r\%$

$$C_j = C_0 + I = C_0 \left(1 + r \cdot \frac{j}{360}\right) \tag{\textbf{II}.2a}$$

Inversement, un capital C_j disponible au bout de j jours admet une valeur actuelle (ou présente) C_0 telle que :

$$C_0 = \frac{C_j}{1 + r \cdot \dfrac{j}{360}} \tag{\textbf{II}.2b}$$

la formule (**II**.2a) permet également de calculer le taux d'intérêt ou le nombre de jours de placement :

$$r = \left(\frac{C_j - C_0}{C_0}\right)\left(\frac{360}{j}\right) \qquad et \qquad j = \left(\frac{C_j - C_0}{C_0}\right)\left(\frac{360}{r}\right) \tag{\textbf{II}.2c}$$

1.3 Intérêt précompté. Taux effectif de placement

Lorsque l'emprunteur verse les intérêts (au taux « précompté » $r\%$) au prêteur le jour de la conclusion du contrat pour un capital prêté C_0 pendant n années, le taux d'intérêt effectif est r_e

$$r_e = \frac{r}{1 - rn} \tag{\textbf{II}.3}$$

Si la durée du placement est exprimée en (j) jours

$$r_e = \frac{r}{1 - r\dfrac{j}{360}} \Longleftrightarrow r = \frac{r_e}{1 + r_e\dfrac{j}{360}} \tag{\textbf{II}.4}$$

2 Intérêts composés

On note :

- C_0 : le capital placé (exprimé en euros)
- n : la durée du placement, exprimée en années.
- C_p : le capital acquis à la fin de l'année p ($p \in [\![1, n]\!]$)
- I_p : les intérêts reçus pour l'année p
- $r\%$: le taux d'intérêt (soit $\dfrac{r}{100}$)

A la fin de chaque période on obtient un capital :

$$C_p = C_{p-1} + I_p = C_0(1 + r)^p \tag{\textbf{II}.5}$$

Le capital acquis en fin de période de placement est alors :

$$C_n = C_0(1 + r)^n \tag{\textbf{II}.6}$$

La suite (C_n) est la suite géométrique de raison $q = 1 + r$ et de premier terme C_0.

2.1 Utilisation de la formule de base

La formule (**II**.6) permet d'obtenir :

$$C_0 = \frac{C_n}{(1 + r)^n} \tag{\textbf{II}.6b}$$

$$r = \left(\frac{C_n}{C_0}\right)^{\frac{1}{n}} - 1 \tag{\textbf{II}.6c}$$

$$n = \frac{\ln\left(\dfrac{C_n}{C_0}\right)}{\ln(1 + r)} \tag{\textbf{II}.6d}$$

Les intérêts acquis au cours de ces n années :

$$I = C_n - C_0 = C_0\Big[(1 + r)^n - 1\Big] = C_n\left[1 - (1 + r)^{-n}\right] \tag{\textbf{II}.7}$$

2.2 Taux équivalent - Taux effectif - Capitalisation continue

• Équation d'équivalence entre le taux annuel r et le **taux équivalent** r_k relatif à une période k fois plus petite que l'année.

$$(1+r) = (1+r_k)^k \Longleftrightarrow r_k = (1+r)^{\frac{1}{k}} - 1 \qquad (\textbf{II}.8)$$

• Le **taux proportionnel** r'_k relatif à une période k fois plus petite que l'année, vérifie :

$$r'_k = \frac{r}{k} \qquad (\textbf{II}.9)$$

• Taux annuel effectif r_e équivalent au taux proportionnel $r'_k = \dfrac{r}{k}$:

$$r_e = \left(1 + \frac{r}{k}\right)^k - 1 \qquad (\textbf{II}.10)$$

• Comportement asymptotique : Capitalisation continue au taux d'intérêt annuel j :

$$\lim_{k\to+\infty} \left(1 + \frac{r}{k}\right)^k = e^r \quad \text{donc} \quad j = \lim_{k\to+\infty} r_e = e^r - 1 \qquad (\textbf{II}.11)$$

2.3 Actualisation et capitalisation

On note :
• VA_0 : la valeur actuelle du capital.
• $r\%$: le taux d'intérêt annuel. (intérêt composé)
• VF_n : la valeur acquise au bout de n années du capital.

$$VF_n = VA_0(1+r)^n \Longleftrightarrow VA_0 = \frac{VF_n}{(1+r)^n} \qquad (\textbf{II}.12)$$

Si on note $u = (1+r)$, le *facteur de capitalisation* et $v = (1+r)^{-1}$ la *facteur d'actualisation*

$$VF_n = VA_0 u^n \quad \text{et} \quad VA_0 = VF_n v^n \qquad (\textbf{II}.12b)$$

2.4 Escompte à intérêt composé

On note :
• VN : la valeur nominale de la créance négociée, à la date de négociation.
• $r\%$: le taux d'escompte annuel à intérêt composé proposé par la banque.
• n : le nombre d'années séparant la date de remise de l'escompte de la date d'échéance de l'effet.
• V_0 : la valeur actuelle commerciale : c'est la somme remise par la banque contre la créance.
• e : l'escompte commercial.

$$e = VN - V_0 \qquad (\textbf{II}.13)$$

$$VN = V_0 \times (1+r)^n \Longleftrightarrow V_0 = V_N \times (1+r)^{-n} \qquad (\textbf{II}.14)$$

Chapitre III : Séquences de flux

1 Annuités

1.1 Valeur acquise et valeur actuelle d'une séquence de flux

Par convention, l'origine 0 de la suite d'annuité se situera **une période avant** le versement de la première annuité.

On note :

- $r\%$: le taux de capitalisation attaché à la même période que la suite des versements.
- A_k : le montant du $k^{\text{ième}}$ versement ($k \in [\![1;n]\!]$) : les annuités sont versées à intervalles de temps réguliers : la période. Cette période peut être l'année, le semestre, le trimestre ou le mois.
- VF_n : la valeur acquise (ou définitive ou future) exprimée à la date n, immédiatement après le $n^{\text{ième}}$ versement.
- VA_0 : la valeur actuelle des n versements , calculée à la date 0

$$VF_n = \sum_{k=1}^{n} A_k(1+r)^{n-k} \qquad (\textbf{III}.1)$$

$$VA_0 = \sum_{k=1}^{n} A_K(1+r)^{-k} \qquad (\textbf{III}.2)$$

Remarque :

$$VF_n = VA_0 \times (1+r)^n \text{ et } VA_0 = \frac{VF_n}{(1+r)^n} \qquad (\textbf{III}.3)$$

1.2 Cas des versements constants

$$\text{Si } \forall k \in [\![1;n]\!],\ A_k = A,\ VF_n = A\frac{(1+r)^n - 1}{r} \quad \text{et} \quad VA_0 = A\frac{1-(1+r)^{-n}}{r} \qquad (\textbf{III}.4)$$

Échéance moyenne : C'est la date x à laquelle on peut faire un unique versement de nA de telle sorte à obtenir le même capital VF_n. x vérifie alors :

$$A\frac{(1+r)^n - 1}{r} = nA(1+r)^{n-x} \iff (1+r)^x = \frac{nr}{1-(1+r)^{-n}} \qquad (\textbf{III}.5)$$

1.3 Cas des versements en progression géométrique de raison q

On suppose que pour tout $k \in [\![1;n]\!],\ A_k = A_1 q^{k-1}$

Premier cas : $q \neq 1+r$

$$VF_n = A_1\left(\frac{(1+r)^n - q^n}{1+r-q}\right) \quad \text{et} \quad VA_0 = VF_n \times (1+r)^{-n} = \frac{A_1}{(1+r)^n}\left(\frac{(1+r)^n - q^n}{1+r-q}\right) \qquad (\textbf{III}.6)$$

Second cas : $q = 1 + r$

$$VF_n = nA_1(1+r)^{n-1} \quad \text{et} \quad VA_0 = VF_n \times (1+r)^{-n} = nA_1(1+r)^{-1} \tag{III.7}$$

2 Rente perpétuelle

Cas d'une rente perpétuelle à termes constants, on note :

- $r\%$: le taux d'intérêt rattaché à la rente
- A : Montant du terme
- $VA_0(RP)$: La valeur actuelle de la rente perpétuelle.

$$VA_0(RP) = \frac{A}{r} \tag{III.8}$$

3 Critères de choix d'investissement - Taux actuariel

On note :

- A_0 : l'investissement initial (ou l'emprunt initial)
- n : la durée de l'investissement
- A_k : le flux à la date k, $k \in [\![1, n]\!]$
- $r\%$: le taux d'intérêt
- V_n : la valeur résiduelle à l'année n (lorsqu'elle existe)

3.1 Taux actuariel

Définition 1. *On appelle taux actuariel, le réel x tel que :*

$$A_0 = \sum_{k=1}^{n} A_k \times \frac{1}{(1+x)^k} \tag{III.9}$$

3.2 Critère de la VAN (Valeur actuelle nette)

$$VAN(r) = -A_0 + \sum_{k=1}^{n} \frac{A_k}{(1+r)^k} + \frac{V_n}{(1+r)^n} \tag{III.10}$$

L'investissement doit être envisagé si $VAN(r) \geq 0$

3.3 Critère du TRI (Taux de rentabilité interne)

Le TRI est le taux d'actualisation x pour lequel la VAN est nulle :

$$VAN(x) = 0 = -A_0 + \sum_{k=1}^{n} \frac{A_k}{(1+x)^k} + \frac{V_n}{(1+x)^n} \tag{III.11}$$

Chapitre IV : Emprunts Indivis

1 Tableau d'amortissement

Pour le remboursement d'un capital emprunté C_0 au taux d'intérêt $r\%$ sur n périodes :

Période $(\mathbf{p})$	Capital restant dû (CRD) en début de période $(\mathbf{C_{p-1}})$	Intérêt de la période $(\mathbf{I_p})$	Amortissement de la période $(\mathbf{M_p})$	Annuité de la période $(\mathbf{A_p})$	Capital restant dû en fin de période $(\mathbf{C_p})$
1	C_0	rC_0	M_1	$rC_0 + M_1$	$C_0 - M_1$
2	C_1	rC_1	M_2	$rC_1 + M_2$	$C_1 - M_2$
$\vdots$					
p	C_{p-1}	rC_{p-1}	M_p	$rC_{p-1} + M_p$	$C_{p-1} - M_p$
$\vdots$					
$n-1$	C_{n-2}	rC_{n-2}	M_{n-1}	$rC_{n-2} + M_{n-1}$	$C_{n-2} - M_{n-1}$
n	C_{n-1}	rC_{n-1}	M_n	$rC_{n-1} + M_n$	0

Remarques immédiates et générales :

- **Remarque 1 :**

$$\text{Pour tout } p \in [\![1, n-1]\!],\ I_p = rC_{p-1} \text{ et } A_p = I_p + M_p = rC_{p-1} + M_p \qquad (\mathbf{IV}.1)$$

- **Remarque 2 :**

$$\text{Pour tout } p \in [\![1, n-1]\!],\ C_p = C_{p-1} - M_p \Longleftrightarrow M_p = C_{p-1} - C_p \qquad (\mathbf{IV}.2)$$

- **Remarque 3 :** Montant de la dernière annuité A_n : $C_n = 0$ donc $M_n = \ C_{n-1}$

$$A_n = I_n + M_n = rC_{n-1} + C_{n-1} = (r+1)C_{n-1} = (1+r)M_n \qquad (\mathbf{IV}.3)$$

- **Remarque 4 :**

$$\begin{aligned} \text{Pour tout } p \in [\![1, n-1]\!],\ A_{p+1} - A_p &= rC_p + M_{p+1} - rC_{p-1} - M_p \\ &= r(C_p - C_{p-1}) + M_{p+1} - M_p \\ &= M_{p+1} - (1+r)M_p \end{aligned} \qquad (\mathbf{IV}.4)$$

- **Lois fondamentales :**

Règle N°1 : Le capital emprunté est égal à la somme des amortissements :

$$C_0 = \sum_{p=1}^{n} M_p \tag{IV.5}$$

Règle N°2 : dite règle fondamentale : La valeur actuelle de la suite d'annuités est égale au montant du capital emprunté :

$$C_0 = \sum_{k=1}^{n} A_k (1+r)^{-k} \tag{IV.6a}$$

Règle N°2 bis : La valeur acquise à la fin de l'emprunt par le capital emprunté est égale à la valeur acquise à cette même date par les annuités :

$$C_0(1+r)^n = \sum_{k=1}^{n} A_k (1+r)^{n-k} \tag{IV.6b}$$

Règle N°3 : Le capital restant dû après paiement de la $p^{\text{ième}}$ annuité est la différence entre la valeur acquise à la date p par le capital prêté et la somme des valeurs acquises à cette même date par les p annuités déjà versées :

$$\forall p \in [\![1, n]\!],\ C_p = C_0(1+r)^p - \sum_{k=1}^{p} A_k (1+r)^{p-k} \tag{IV.7}$$

Remarque : On retrouve la règle N°2 lorsque $p = n$ (et $C_n = 0$)

Règle N°4 : Le capital restant dû après paiement de la $p^{\text{ième}}$ annuité A_p est égal à la somme des valeurs actuelles exprimées à cette même date p, des $(n-p)$ annuités restantes :

$$\forall p \in [\![1, n-1]\!], C_p = \sum_{k=1}^{n-p} A_{p+k} (1+r)^{-k} \text{ et } C_n = 0 \tag{IV.8}$$

2 Les différents types de remboursement :

2.1 Remboursement par échéances constantes

Définition 2. *Le remboursement se fait par annuités constantes si pour tout* $p \in [\![1, n]\!]$, $A_p = A$

- **Montant de l'annuité :** La règle fondamentale N°2 (**IV**.6a) implique :

$$C_0 = \sum_{k=1}^{n} A(1+r)^{-k} = A \times \frac{1-(1+r)^{-n}}{r} \text{ donc } A = \frac{rC_0}{1-(1+r)^{-n}} \tag{IV.9}$$

- **Amortissements :**
  - De la remarque 4 (**IV**.4), on déduit :

$$\forall p \in [\![1, n-1]\!],\ M_{p+1} = (1+r)M_p \tag{IV.10}$$

La suite des amortissements (M_p) est donc une suite géométrique de raison $(1+r)$

$$\forall p \in [\![1,n]\!],\ M_p = M_1(1+r)^{p-1} \tag{IV.11}$$

- De la remarque 3 (**IV**.3), on déduit :

$$M_1 = \frac{M_n}{(1+r)^{n-1}} = \frac{A}{(1+r)^n} = \frac{rC_0}{(1+r)^n - 1} \tag{IV.12}$$

De la formule (**IV**.11) on déduit :

$$\forall p \in [\![1,n]\!], M_p = \frac{A}{(1+r)^{n-p+1}} \tag{IV.13}$$

- **Capital amorti R_p :** c'est le capital qu'on a remboursé après le versement de la $p^{\text{ième}}$ annuité

$$R_p = \sum_{k=1}^{p} M_k = C_0 \times \frac{(1+r)^p - 1}{(1+r)^n - 1} \tag{IV.14}$$

- **Capital restant restant dû (CRD) en fin de période :**

$$C_p = C_0 - R_p = C_0 \times \frac{(1+r)^n - (1+r)^p}{(1+r)^n - 1} \tag{IV.15}$$

2.2 Remboursement par amortissements constants :

- **Amortissements :** La règle N°1 (**IV**.5), permet de déduire immédiatement :

$$\forall p \in [\![1,n]\!],\ M_p = M \iff \forall p \in [\![1,n]\!],\ M_p = \frac{C_0}{n} \tag{IV.16}$$

- **Annuités :** De la remarque (**IV**.4), on déduit que la suite des annuités est arithmétique de raison $-r\dfrac{C_0}{n}$:

$$\forall p \in [\![1,n]\!], A_p = A_1 - r(p-1)\frac{C_0}{n} \text{ avec } A_1 = M_I + I_1 = \frac{C_0}{n} + rC_0 \tag{IV.17}$$

- **Intérêts & Capital restant dû :** Des remarques 2 (**IV**.2) et 1 (**IV**.1), on déduit que les suites (C_p) et (I_p) sont également des suites arithmétiques :

$$\forall p \in [\![1,n]\!], C_p = \left(1 - \frac{p}{n}\right) C_0 \text{ et } I_p = \left(r - \frac{r(p-1)}{n}\right) C_0 \tag{IV.18}$$

2.3 Remboursement *in fine* :

- **Capital restant dû :**

$$\forall p \in [\![1, n-1]\!],\ C_p = C_0 \text{ et } C_n = 0 \tag{IV.19a}$$

- **Amortissements :**

$$\forall p \in [\![1, n-1]\!],\ M_p = 0 \text{ et } M_n = C_0 \tag{IV.19b}$$

- **Intérêts :**

$$\forall p \in [\![1, n]\!],\ I_p = rC_p = rC_0 \tag{IV.19c}$$

- **Annuités :**

$$\forall p \in [\![1, n-1]\!],\ A_p = I_p + M_p = rC_0 \text{ et } A_n = (1+r)C_0 \tag{IV.19d}$$

- **Capital amorti :**

$$\forall p \in [\![1, n-1]\!], R_p = 0 \text{ et } R_n = C_0 \tag{IV.19e}$$

2.4 Cas des annuités en progression géométrique de raison $q \neq 0$ et de première annuité A_1 :

$$\forall p \in [\![1, n]\!],\ A_p = q^{p-1} A_1 \tag{IV.20}$$

- **Premier cas :** $1 + r \neq q$

$$C_0 = \frac{A_1\left((1+r)^n - q^n\right)}{(1+r)^n(1+r-q)} \tag{IV.21}$$

- **Second cas :** $1 + r = q$

$$C_0 = \frac{nA_1}{1+r} \Longleftrightarrow A_1 = C_0 \frac{1+r}{n} \tag{IV.22}$$

Chapitre V : Emprunts obligataires

On note :

- C_0 : le nominal du capital emprunté.
- C_p, $p \in [\![1;n]\!]$: le capital restant dû après le paiement de la $p^{\text{ième}}$ échéance.
- N : le nombre d'obligations émise lors de l'émission.
- V_N : la valeur nominale d'une obligation.
- V_E : la valeur d'émission
- V_R : la valeur de remboursement
- $r\%$: le taux d'intérêt de l'obligation, également appelé taux facial ou taux nominal
- $r'\%$: taux d'intérêt effectif ou taux réel (lorsque $V_R \neq V_N$)
- C : le coupon
- n : la durée en années : cette durée est fixée dès l'émission des obligations.
- M_p : l'amortissement lors du paiement de la $p^{\text{ième}}$ échéance.
- μ_p : le nombre d'obligations remboursées à la $p^{\text{ième}}$ échéance.
- d_p : le nombre d'obligations encore vivantes après la $p^{\text{ième}}$ échéance.
- A_p : l'annuité de l'année p pour l'emprunteur.

1 Propriétés générales

- **Montant total emprunté :** C'_0

$$C_0 = N \times V_N \text{ et } C'_0 = N \times V_E \tag{V.1}$$

- **Coupon :**

$$C = r \times V_N \tag{V.2}$$

- **Prime d'émission :**

$$P_E = V_N - V_E \; si \; V_N > V_E \tag{V.3}$$

- **Prime de remboursement :**

$$P_R = V_R - V_N \; si \; V_N < V_R \tag{V.4}$$

- **Amortissements :**

$$\forall p \in [\![1;n]\!],\; M_p = \mu_p \times V_R \tag{V.5}$$

$$d_p = d_{p-1} - \mu_p \tag{V.6}$$

2 Différents types de remboursements

2.1 Obligations « in fine » :

$$\forall p \in [\![1;n-1]\!],\; A_p = I = rC_0 = rNV_N = NC \text{ et } A_n = rNV_N + NV_R \tag{V.7}$$

2.2 Cas des annuités constantes :

- **a) Cas où $\mathbf{V_N = V_R}$**

$$\forall p \in [\![1, p]\!],\ A_p = rC_{p-1} + M_p = rd_{p-1}V_N + \mu_p V_N = A \qquad (\mathbf{V}.8)$$

Remarque : Les propriétés vues dans le *Chapitre IV : « Emprunts indivis »* restent valables :

Comparaison emprunt indivis / emprunt obligataire
dans le cas d'annuités constantes, et où $V_N = V_R$

Emprunts indivis	N°	Emprunts obligataires	N°
$A = C_0 \dfrac{r}{1-(1+r)^{-n}}$	(**IV**.9)	$A = NV_N \dfrac{r}{1-(1+r)^{-n}}$	(**V**.9)
Amortissement $M_{p+1} = (1+r)M_p$	(**IV**.10)	Amortissement $\mu_{p+1} = \mu_p(1+r)$	(**V**.10)
Premier amortissement $M_1 = C_0 \dfrac{r}{(1+r)^n - 1}$	(**IV**.12)	Nbre d'obligations amorties lors du premier tirage $\mu_1 = \dfrac{M_1}{V_N} = \dfrac{C_0}{V_N}\dfrac{r}{(1+r)^n-1} = N\dfrac{r}{(1+r)^n-1}$	(**V**.11)
$p^{\text{ième}}$ amortissement $M_p = M_1(1+r)^{p-1}$	(**IV**.11)	Nbre d'obligations amorties lors du $p^{\text{ième}}$ tirage $\mu_p = \dfrac{M_p}{V_N} = \dfrac{M_1(1+r)^{p-1}}{V_N} = \mu_1(1+r)^{p-1}$	(**V**.12)
Capital amorti après p échéances $R_p = C_0\dfrac{(1+r)^p-1}{(1+r)^n-1}$	(**IV**.14)	Nbre d'obligations amorties après p échéances $\dfrac{C_0}{V_N}\dfrac{(1+r)^p-1}{(1+r)^n-1} = N\dfrac{(1+r)^p-1}{(1+r)^n-1}$	(**V**.13)
Capital restant dû après p échéances $C_p = C_0\dfrac{(1+r)^n-(1+r)^p}{(1+r)^n-1}$	(**IV**.15)	Nbre d'obligations encore vivantes après p échéances $d_p = \dfrac{C_p}{V_N} = N\dfrac{(1+r)^n-(1+r)^p}{(1+r)^n-1}$	(**V**.14)

- **Remarque : Taux actuariel : taux de revient pour l'emprunteur / taux de rendement pour l'obligataire**

Lorsque $V_E < V_N$: le taux actuariel t égalise à la date 0 les sommes reçues et la valeur actualisée de la suite des annuités évaluées au taux t

$$NV_E = \sum_{k=1}^{n} A_k(1+t)^{-k} = A \times \left(\frac{1-(1+t)^{-n}}{t}\right) = NV_N \times \left(\frac{r}{1-(1+r)^{-n}}\right) \times \left(\frac{1-(1+t)^{-n}}{t}\right) \tag{\textbf{V}.15}$$

Ainsi, dans le cas d'annuités constantes, ce taux est indépendant du nombre d'obligations émises.

- **b) Cas où $\mathbf{V_N \neq V_R}$:**
- **Taux d'intérêt effectif ou taux réel r' :**

$$r' = r\frac{V_N}{V_R} = \frac{C}{V_R} \tag{\textbf{V}.16}$$

- **Annuités :**

$$\forall p \in [\![1;n]\!],\ \in A_p = rd_{p-1}V_N + \mu_p V_R \tag{\textbf{V}.17}$$

- **Obligations amorties :**

Lorsque les annuités sont constantes, la suite $(\mu_p)_{p\in[\![1,n]\!]}$ est une suite géométrique de raison $1+r'$ et de premier terme μ_1 :

$$\forall p \in [\![1,n]\!],\ \mu_p = \mu_1(1+r')^{p-1} \quad \text{où} \quad \mu_1 = \frac{Nr'}{(1+r')^n - 1} \tag{\textbf{V}.18}$$

- **Valeur théorique de l'annuité A_1 :**

$$A_1 = \frac{NV_R r'}{1-(1+r')^{-n}} \tag{\textbf{V}.19}$$

- **Amortissements :**

$$\forall p \in [\![1,n]\!],\ M_p = \mu_p V_R = \mu_1(1+r')^{p-1}V_R = \frac{Nr'(1+r')^{p-1}V_R}{(1+r')^n - 1} \tag{\textbf{V}.20}$$

2.3 Remboursement par séries égales ou à tranches annuelles constantes (cas où $V_R = V_N$)

Dans ce type de remboursement, l'amortissement est identique en fin de chaque période :

- **Amortissements :**

$$\forall p \in [\![1,n]\!],\ \mu_p = \frac{N}{n} \text{ et } M_p = M = \mu_p V_N \tag{V.21}$$

- **Capital restant dû :** La suite $(C_p)_{p\in[\![0,n]\!]}$ est une suite arithmétique de raison $\frac{-NV_N}{n}$ et de premier terme C_0

$$\forall p \in [\![0,n]\!],\ C_p = C_0 - \frac{p}{n}NV_N = C_0\left(1 - \frac{p}{n}\right) \tag{V.22}$$

- **Intérêts annuels :** On note I_p le montant des intérêts de la période p

La suite $(I_p)_{p\in[\![1,n]\!]}$ est une suite arithmétique de raison $\frac{-rNV_N}{n}$ et de premier terme $I_1 = rC_0$

$$\forall p \in [\![1,n]\!],\ I_p = rC_0 - (p-1)\frac{rNV_N}{n} \tag{V.23}$$

- **Annuités :** La suite $(A_p)_{p\in[\![1,n]\!]}$ est une suite arithmétique de raison $\frac{-rNV_N}{n}$ et de premier terme $A_1 = rC_0 + M$

$$\forall p \in [\![1,n]\!],\ A_p = rC_0 + M - (p-1)\frac{rNV_N}{n} \tag{V.24}$$